Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Recurso de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

17 de Setembro de 1998 | Duração: 3h00

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

Parte I

1. Considere o intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e uma função f conhecida nos nós da partição uniforme, de espaçamento h,

$$\Delta: \qquad a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sejam

$$x_{-i} = a - ih, \quad x_{n+i} = b + ih, \qquad i = 1,2,3,$$

e B_i, $i = -1, 0, \ldots, n, n+1$, os splines cúbicos dados, para $x \in [x_{-3}, x_{n+3}]$, por

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

(a) Mostre que

x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
$B_i(x)$	0	1	4	1	0
$B_i''(x)$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

.

(b) Estabeleça o sistema algébrico que permite determinar o spline cúbico livre s interpolador da função f nos nós da partição Δ.

Nota: O spline cúbico livre tem como condições de fronteira $s''(a) = s''(b) = 0$.

(c) Considere o intervalo $[1,2]$ e a função f dada na tabela

x_i	1	1.5	2
$f(x_i)$	1	0.5	-2

.

Determine um valor aproximado para $f(1.3)$ usando o spline cúbico livre interpolador da função nos pontos dados.

2. Mostre, a partir do polinómio interpolador de Lagrange da função f nos pontos x_0, x_1 e x_2, tais que $x_1 - x_0 = h$ e $x_2 - x_1 = \alpha h$, que

$$f''(x) \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_0)}{1+\alpha} - \frac{f(x_1)}{\alpha} + \frac{f(x_2)}{\alpha(1+\alpha)}\right].$$

Parte II

1. Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y o vector aleatório dado por $Y = AX + B$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Mostre que a matriz de covariância de Y é dada por $C_Y = AC_XA^T$, onde C_X representa a matriz de covariância do vector X.

2. Considere um prisma triangular de altura h cuja base é um triângulo equilátero de lado l. Suponha que foram efectuadas várias medições dos valores de h e l, tendo-se obtido os seguintes resultados (em metros):

h	3.12	3.10	3.13	3.11	3.12
l	4.61	4.61	4.62	4.60	4.61

Seja $Y = (A, V)$ um vector aleatório onde A e V representam, respectivamente, a área da superfície e o volume do prisma. Determine uma aproximação para:

(a) a esperança Y;

(b) a matriz de covariância de Y;

(c) o coeficiente de correlação das variáveis aleatórias A e V.

Parte III

1. Sejam l_i, $i = 1, 2, 3, 4$, valores observados para quatro quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$l + B\Delta = d$$

em que B é uma matriz real do tipo 4×2, $l = [l_1, l_2, l_3, l_4]^T$, $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2]^T$ e $d = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$.

(a) Utilizando o princípo dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$;

(b) Mostre que a matriz cofactor de Δ é dada por

$$Q_\Delta = (B^T W B)^{-1},$$

sendo W a matriz peso de l.

2. As coordenadas de um ponto y do plano foram medidas por dois métodos distintos tendo sido obtidos os seguintes resultados:

- método 1: $y_1 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2.0 \end{bmatrix}$, com a matriz peso $W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;
- método 2: $y_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.1 \end{bmatrix}$, com a matriz peso $W_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Supondo que não existe correlação entre y_1 e y_2, determine:

(a) a melhor estimativa para as coordenadas do ponto, usando o algoritmo dos mínimos quadrados obtido na questão anterior;

(b) a matriz cofactor dos valores obtidos na alínea anterior e uma estimativa para a variância de referência.