Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Recurso de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

7 de Setembro de 1999 Duração: 3h00

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere a função $f(x,y) = x \sin y$, com $(x,y) \in [0,1] \times [0,\pi]$.
   (a) Determine o polinómio linear em x e quadrático em y interpolador de f numa rede uniforme no intervalo dado.
   (b) Calcule o menor número de subintervalos a considerar no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas por forma a aproximar f por um polinómio do mesmo grau em x e em y com erro inferior a 10^{-3}.

Formulário

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \left\| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} \right\|_\infty + \frac{k^{m+1}}{4(m+1)} \left\| \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}} \right\|_\infty + \frac{h^{n+1}k^{m+1}}{16(n+1)(m+1)} \left\| \frac{\partial^{n+m+2} f}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \right\|_\infty .$$

2. (a) Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$\begin{array}{cccc} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que a esperança de Y é dada por $E(Y) \approx G(E(X))$ e a covariância de Y é dada por $\sigma_Y^2 \approx J_G C_X J_G^T$, onde C_X representa a matriz de covariância do vector X e

$$J_G = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial G}{\partial x_1}(E(X)), & \frac{\partial G}{\partial x_2}(E(X)) \end{array} \right].$$

   (b) Para se determinar uma distância D (metros) em Topografia usa-se muitas vezes a relação $D = G \sin^2 z$, com $G = 100(l_s - l_i)$, sendo z (grados) o ângulo zenital e l_s e l_i (metros) leituras numa régua graduada (mira). Suponhamos que foram efectuadas as seguintes medições:

z (grados)	101.2733	101.2736	101.2732
l_s (metros)	1.756	1.754	1.757
l_i (metros)	1.000	0.997	1.001

Determine o valor mais provável para a distância D bem como o respectivo desvio padrão.

3. (a) Sejam l_i, $i = 1,2,3,4$, valores observados para quatro quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$\hat{l} + B\Delta = d$$

em que B é uma matriz real do tipo 4×2, $\Delta = [\Delta_1, \Delta_2]^T$, $d = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$ e , $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3, \hat{l}_4]^T$, as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$.

   (b) Pretende-se determinar o declive de uma recta medindo, para vários valores da abcissa x, o valor da respectiva ordenada y, obtendo-se os seguintes resultados:

abcissa x	20	40	60	80
ordenada y	-4.3	6.9	17.1	28.7

Determine o valor ajustado do referido declive, considerando as medições (não correlacionadas) com precisão inversamente proporcional a x.