

1. (a) Determine o polinómio de grau mínimo que faça a concordância entre a circunferência

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1, \quad \text{no ponto } (1, -1),$$

e a recta

$$y = -2 + \frac{1}{2}(8 - x), \quad \text{no ponto } (8, -2).$$

Nota: Duas curvas dizem-se concordantes de tiverem a mesma tangente no ponto de união.

- (b) Seja h_{2n+1} o polinómio de Hermite de grau menor ou igual a $2n + 1$ interpolador de f e da sua derivada nos pontos da rede $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Se $f \in C^{2n+2}([a, b])$ então, prove que, para todo $\bar{x}$, existe um $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(\bar{x}) - h_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} w^2(\bar{x}), \quad \text{com } w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Nota: Considere a função $F(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) - \left(\frac{w(x)}{w(\bar{x})}\right)^2 [f(\bar{x}) - h_{2n+1}(\bar{x})]$.

2. Um carro percorre uma rua, em linha recta, tendo sido efectuados os seguintes registos:

tempo (t) em segundos	0	5	10
distância (d) em metros	0	90	150
velocidade (v) em km/hora	40		40

Usando o spline cúbico completo interpolador da função distância nos pontos dados, indique, justificando, uma aproximação para:

- (a) o primeiro instante em que o carro excedeu o limite de velocidade permitido dentro das localidades;
 (b) o instante em que o carro atingiu a velocidade máxima nos primeiros 5 segundos.

Formulário

$$s_i(x) = \frac{1}{h^3} \left[C_{i-2}(x_i - x)^3 + C_{i-1}[h^3 + 3h^2(x_i - x) + 3h(x_i - x)^2 - 3(x_i - x)^3] \right. \\ \left. + C_i[h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3] + C_{i+1}(x - x_{i-1})^3 \right], \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$