

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que a covariância de Y é dada por

$$\sigma_Y^2 \approx a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + 2a_1 a_2 \sigma_{X_1 X_2} + a_2^2 \sigma_{X_2}^2,$$

com $a_i = \frac{\partial G}{\partial X_i}(E(X))$.

- (b) Observando-se o cometa Zork obtiveram-se, num sistema de coordenadas polares, os seguintes valores para o raio (em U.A.) e o ângulo polar (em graus)

raio ρ	2.7	2.0	1.61	1.2	1.02
ângulo θ	48°	67°	83°	108°	126°

A primeira lei de Kepler estabelece uma relação entre o raio ρ , o ângulo θ e a excentricidade e da elipse através da relação

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta},$$

em que p é um parâmetro real. Detremine uma estimativa para o valor mais provável para a excentricidade bem como para o desvio padrão desse valor considerando $p = 1$.

2. (a) Sejam $l_i, i = 1, 2, \dots, n$, valores observados para n quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$A\hat{l} = d$$

em que A é uma matriz real do tipo $c \times n$, $d = [d_1, d_2, \dots, d_c]^T$ e $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n]^T$, as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados \hat{l} .

- (b) Mediram-se os ângulos $\angle AOB, \angle BOC, \angle AOC, \angle COD$ e $\angle COE$ indicados na figura obtendo-se os

valores

$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle AOC$	$\angle COD$	$\angle COE$
$30^\circ 15' 1''$	$20^\circ 00' 00''$	$50^\circ 15' 18''$	$30^\circ 00' 00''$	$70^\circ 00' 01''$

, não correlacionados e com pesos inversamente proporcionais à sua amplitude. Determine os valores ajustados dos ângulos referidos e uma estimativa para a variância de referência.