

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) \mapsto y$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que a covariância de Y é dada por

$$\sigma_Y^2 \approx a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + 2a_1 a_2 \sigma_{X_1 X_2} + a_2^2 \sigma_{X_2}^2,$$

com $a_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(E(X))$.

- (b) Para determinar a medida do perímetro da Terra (p), Eratóstenes (276-195 a.C.) usou a relação

$$p = \frac{2\pi}{\alpha} s,$$

sendo α o ângulo (em radianos) que os raios solares faziam com a vertical do lugar em Alexandria, no solstício de Verão, ao meio-dia, e s a distância de Alexandria a Siena (local onde se sabia que os raios solares, nessa data e nessa hora, incidiam verticalmente).

Suponhamos, por hipótese, que Eratóstenes efectuou as seguintes observações (na realidade ele só efectuou a primeira)

distância s (em estádios)	5000	5020	4080	5007	4091
ângulo α (em graus)	7.2°	7.1°	7.0°	7.3°	7.2°

Considerando as observações não correlacionadas, determine uma estimativa para o valor mais provável do perímetro da Terra obtido por Eratóstenes bem como uma estimativa para o seu desvio padrão (1 estádio = 157.5 m = 0.1575 km).

2. (a) Sejam l_i , $i = 1, 2, \dots, n$, valores observados para n quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$A\hat{l} = d$$

em que A é uma matriz real do tipo $c \times n$, $d = [d_1, d_2, \dots, d_c]^T$ e $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, \dots, \hat{l}_n]^T$, as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$.

- (b) Num nivelamento trigonométrico de alta precisão entre quatro marcos foram feitas as seguintes observações (dN):

lado	distância (km)	dN (m)
AB	20	+42.285
BC	10	-12.016
BD	25	-20.240
CD	20	-8.114
DA	30	-22.224

Determine os valores mais prováveis para as diferenças de nível entre os marcos bem como uma estimativa para a variância de referência.