1. (a) Seja $X = (X_1, X_2, X_3)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que a covariância de Y é dada por $\sigma_Y^2 \approx J_G C_X J_G^T$, onde C_X representa a matriz de covariância do vector X e

$$J_G = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial G}{\partial x_1}(E(X)), & \frac{\partial G}{\partial x_2}(E(X)), & \frac{\partial G}{\partial x_3}(E(X)) \end{array} \right].$$

- (b) Para determinar a área de um terreno triangular efectuaram-se várias medições, todas nas mesmas condições, dos seus três lados, tendo-se obtido os seguintes resultados (em metros):

lado a	136.3	136.5	136.4	136.6
lado b	57.5	57.2	57.7	57.4
lado c	104.1	103.9	104.2	104.1

Supondo que as medições são não correlacionados, determine a área esperada do terreno bem como uma estimativa para o seu desvio padrão.

2. (a) Sejam $l_i, i = 1, 2, 3, 4$, valores observados para quatro quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$\hat{l} + B\Delta = d$$

em que B é uma matriz real do tipo 4×1 , $\Delta \in \mathbb{R}$, $d = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$ e $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3, \hat{l}_4]^T$, as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$.

- (b) A lei de Hooke estabelece que a força F aplicada a uma mola é directamente proporcional ao deslocamento provocado de acordo com a seguinte relação

$$F = k(e - e_0),$$

onde k é a constante da mola, e o comprimento da mola quando sujeita à força F e e_0 o comprimento inicial da mola.

No sentido de determinar a constante da mola usaram-se diferentes forças (conhecidas) tendo sido observados os comprimentos resultantes, dados na seguinte tabela

força F (em gramas)	3	5	8	10
comprimento e (em milímetros)	13.3	16.3	19.4	20.9

Sabendo que o comprimento inicial da mola é $e_0 = 10 \text{ mm}$ e considerando as medições (não correlacionadas) com precisão inversamente proporcional ao comprimento observado, determine a melhor estimativa para a constante da mola, usando o algoritmo dos mínimos quadrados obtido na alínea anterior.