1. Os Babilónios recorriam às seguintes duas aproximações para $\sqrt{2}$: $(1.\underline{25})_{60}$ e $(1.\underline{24}\,\underline{51}\,\underline{10})_{60}$. Converta estes valores à base decimal e determine os erros absoluto e relativo cometidos.

2. Ptolomeu de Alexamdria (século II) usou na sua obra *Almagest* (em árabe, "O Grande Compêndio"), seguindo os Babilónios, o valor de $\pi = (3.8\underline{30})_{60}$. É claro que a notação usada não foi esta, mas sim a notação grega corrente na época $\pi = \gamma\eta'\lambda''$.

   (a) Converta à base decimal e determine os erros absoluto e relativo cometidos.

   Nota: Este foi o valor usado por Cristóvão Colombo (século XV) nos cálculos de navegação.

   (b) Tente explicar a notação usada por Ptolomeu tendo em atenção que os gregos recorriam às letras do seu alfabeto para representar os números. Assim $\alpha = 1$, $\beta = 2, \ldots, \iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 30$, $\rho = 100, \ldots$.

3. A equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é usualmente resolvida pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1}$$

   (a) Prove que uma solução alternativa é dada por

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{2}$$

   (b) Escreva um programa de computador que resolva equações de segundo grau de duas maneiras distintas: (i) usando as fórmulas (1); (ii) calculando uma raiz pela fórmula de (1) em que não se subtraem números do mesmo sinal e a outra raiz pela fórmula de (2) adequada.

   (c) Execute o programa construído em (b) quando: (i) $a = 1.0$, $b = -5.0$, $c = 6.0$; (ii) $a = 1.0$, $b = 12345678.03$, $c = 0.92$.

4. Consideremos $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponhamos que pretendemos calcular $p(\overline{x})$. Ao usar $p_n(\overline{x}) = a_n\overline{x}^n + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{x} + a_0$ efectuamos n adições/subtracções e $2n-1$ multiplicações/divisões. No entanto, se considerarmos

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x))),$$

designada por forma encaixada do polinómio, ao calcular $p(\overline{x})$ só efectuamos n adições/subtracções e n multiplicações/divisões. Esta forma é a base do chamado método (ou algoritmo) de Horner, que consiste formalmente nas seguintes operações: $p \leftarrow a_n$; $p \leftarrow p\overline{x} + a_i$, $i = n-1(-1)0$, sendo $p_n(\overline{x}) = p$.

   (a) Demonstre a chamada regra de Ruffini: *O valor numérico de $p_n(\overline{x})$ de um polinómio p_n em $\overline{x}$ é igual ao resto da divisão de $p_n(x)$ por $x - \overline{x}$.*

   (b) Dividindo $p_n(x)$ por $x - \overline{x}$ obtém-se $p_n(x) = (x - \overline{x})q_{n-1}(x) + r$, onde q_{n-1} é um polinómio de grau inferior ou igual a $n-1$ e r uma constante. Usando o algoritmo de Horner construa um algoritmo que permita determinar r e os coeficientes de q_{n-1} (algoritmo de Ruffini).

   (c) Calcule o valor de $p_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 12$ em $\overline{x} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

   (d) Quais as soluções inteiras de um polinómio de grau n de coeficientes inteiros?

5. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathbb{R}^n$.

   (a) Norma 1: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

   (b) Norma 2 ou norma euclidiana: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

   (c) Norma infinito, norma máxima ou norma de Chebyshev: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

6. Seja $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

   (a) Mostre que esta relação define uma norma matricial a partir de uma norma vectorial.

   (b) Para a norma matricial assim definida, prove que $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

7. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e que são induzidas pelas normas vectoriais homónimas.

   (a) Norma 1: $\quad \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

   (b) Norma infinito ou norma de Chebyshev: $\quad \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

8. Seja A uma matriz real, não singular e de ordem n. Prove que se λ é um valor próprio de A então

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \|A\|.$$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Calcule $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$.

10. Ao resolver o sistema de equações lineares $Ax = b$, suponha que o termo independente b não é exacto, encontrando-se afectado de um erro δb. Qual o erro que vem para x resultante dessa inexactidão?

11. O número de condição de uma matriz A é definido por $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

    (a) Mostre que uma medida do número de condição pode ser dada por λ_M/λ_m, onde λ_M e λ_m são, respectivamente, o maior e menor (em módulo) valores próprios de A.

    (b) Mostre que se A é singular $\mathrm{cond}(A)$ é infinito e se A é não singular $\mathrm{cond}(A) \ge 1$.

    (c) Resolva o sistema

$$\begin{cases} 2.000112x_1 + 1.414215x_2 & = & 0.521471 \\ 1.414215x_1 + 1.000105x_2 & = & 0.232279 \end{cases}$$

    pelo método de eliminação de Gauss. Sabendo que a sua solução exacta é

$$(x_1, x_2) = (607.1248, -858.2826),$$

    explique os resultados obtidos

12. As matrizes dos sistemas

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ x - 1.00001y & = & 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y & = & 1 \\ x - 0.99999y & = & 0 \end{cases}$$

    são aproximadamente iguais. Determine e compare as suas soluções.

13. Prove que as seguintes funções são normas em $C[a,b]$.

    (a) Norma L_2: $\quad \forall f \in C[a,b], \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2}$.

    (b) Norma de Chebyshev: $\quad \forall f \in C[a,b], \quad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.