1. Escreva aproximações com três e cinco algarismos significativos correctos para os números:

$$\pi, \qquad \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{11}, \qquad \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad 16^{-2}, \qquad e^3.$$

2. Os Babilónios recorriam às seguintes duas aproximações para $\sqrt{2}$: $(1.\underline{25})_{60}$ e $(1.\underline{24}\,\underline{51}\,\underline{10})_{60}$. Converta estes valores à base decimal e determine os erros absoluto e relativo cometidos.

3. Ptolomeu de Alexamdria (século II) usou na sua obra *Almagest* (em árabe, "O Grande Compêndio"), seguindo os Babilónios, o valor de $\pi = (3.8\underline{30})_{60}$. É claro que a notação usada não foi esta, mas sim a notação grega corrente na época $\pi = \gamma\eta'\lambda''$.

   (a) Converta à base decimal e determine os erros absoluto e relativo cometidos.

   Nota: Este foi o valor usado por Cristóvão Colombo (século XV) nos cálculos de navegação.

   (b) Tente explicar a notação usada por Ptolomeu tendo em atenção que os gregos recorriam às letras do seu alfabeto para representar os números. Assim $\alpha = 1$, $\beta = 2, \ldots, \iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 30$, $\rho = 100, \ldots$.

4. Um meio bastante eficaz de calcular o valor de π consiste em usar a série

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)![545140134 \cdot n + 13501409]}{n!^3(3n)!(-640320)^{3n}}.$$

   (a) Mostre que se trata de uma série convergente.

   (b) Pode mostrar-se que, tomando os $k+1$ primeiros termos desta série, π vem determinado com $14.18(k+1)$ casas decimais correctas. Verifique este facto para $k = 5$ e $k = 10$.

5. Sejam x, y e z três quantidades exactas. Por arredondamento obtiveram-se as seguintes aproximações: $\overline{x} = 231$, $\overline{y} = 2.31$ e $\overline{z} = 23.147$.

   (a) Conte o número de casas decimais correctas nas aproximações e calcule limites superiores para o erro absoluto em cada uma delas. Compare os resultados e comente.

   (b) Conte o número de algarismos significativos correctos nas aproximações e calcule limites superiores para o erro relativo em cada uma delas. Compare os resultados e comente.

6. Atendendo à comutatividade da adição, seria de esperar que num ciclo de repetição tipo FOR (em PASCAL e C) ou DO (em FORTRAN) usado para efectuar uma soma, é indiferente considerar o índice do ciclo de forma crescente ou decrescente. Para provar que tal não acontece, calcule, usando uma aritmética com três dígitos significativos, a soma

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$$

   na forma $1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$ e na forma $\frac{1}{100} + \frac{1}{81} + \cdots + 1$. Comente os resultados.

7. Escreva um programa de computador que calcule a soma $x+y+z$ nas formas $x+(y+z)$ e $(x+y)+z$. Execute o programa quando: (i) $x = 1.0$, $y = -5.0$ e $z = 6.0$; (ii) $x = 1 \times 10^{20}$, $y = -1 \times 10^{20}$ e $z = 1.0$. Explique os resultados.

8. Calcule no seu computador favorito o valor da expressão

$$z = \left[(x+y)^2 - x^2 - 2xy\right]/y^2,$$

com $x = 100.0$ e $y = 10^{-k}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Explique o sucedido e perdoe-lhe.

9. A série harmónica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

é divergente. Calcule a sucessão $\{s_n\}_{i=1}^{\infty}$ das somas parciais no computador e explique o sucedido.

10. Tente obter no computador o valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{100^n}{n!}\right),$$

tomando valores de n sucessivamente maiores. O que consegue concluir?

11. A equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é usualmente resolvida pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1}$$

(a) Prove que uma solução alternativa é dada por

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \tag{2}$$

(b) Escreva um programa de computador que resolva equações de segundo grau de duas maneiras distintas: (i) usando as fórmulas (1); (ii) calculando uma raiz pela fórmula de (1) em que não se subtraem números do mesmo sinal e a outra raiz pela fórmula de (2) adequada.

(c) Execute o programa construído em (b) quando: (i) $a = 1.0$, $b = -5.0$, $c = 6.0$; (ii) $a = 1.0$, $b = 12345678.03$, $c = 0.92$.

12. Consideremos $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e suponhamos que pretendemos calcular $p(\overline{x})$. Ao usar $p_n(\overline{x}) = a_n\overline{x}^n + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{x} + a_0$ efectuamos n adições/subtracções e $2n-1$ multiplicações/divisões. No entanto, se considerarmos

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x))),$$

designada por **forma encaixada do polinómio**, ao calcular $p(\overline{x})$ só efectuamos n adições/subtracções e n multiplicações/divisões. Esta forma é a base do chamado **método (ou algoritmo) de Horner**, que consiste formalmente nas seguintes operações:

$$\begin{aligned} &p \leftarrow a_n; \\ &p \leftarrow p\overline{x} + a_i, \qquad i = n-1(-1)0, \end{aligned}$$

sendo $p_n(\overline{x}) = p$.

(a) Demonstre a chamada **regra de Ruffini**: *O valor numérico de $p_n(\overline{x})$ de um polinómio p_n em $\overline{x}$ é igual ao resto da divisão de $p_n(x)$ por $x - \overline{x}$.*

(b) Dividindo $p_n(x)$ por $x - \overline{x}$ obtém-se $p_n(x) = (x - \overline{x})q_{n-1}(x) + r$, onde q_{n-1} é um polinómio de grau inferior ou igual a $n-1$ e r uma constante. Usando o algoritmo de Horner construa um algoritmo que permita determinar r e os coeficientes de q_{n-1} (algoritmo de Ruffini).

(c) Calcule o valor de $p_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 12$ em $\overline{x} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

(d) Quais as soluções inteiras de um polinómio de grau n de coeficientes inteiros?