Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Tratamento Matemático das Observações

Folha 2 Ano de 1997/98

1. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$. Prove que
$$\|x-y\| \leq |\,\|x\|-\|y\|\,|,$$
para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathbb{R}^n$.

   (a) Norma 1:
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

   (b) Norma 2 ou norma euclidiana:
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

   (c) Norma infinito, norma máxima ou norma de Chebyshev:
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

3. Seja $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

   (a) Mostre que esta relação define uma norma matricial a partir de uma norma vectorial.

   (b) Para a norma matricial assim definida, prove que
$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

4. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Prove que $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, para todo o $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

5. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e I a respectiva matriz identidade de ordem n. Mostre que se $C = I - BA$ e $\|C\| \leq 1$, então A e B são não singulares.

6. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Prove que:

   (a) $\|A-B\| \geq \|A\| - \|B\|$.

   (b) Se A e B forem não singulares, $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|A-B\|$.

7. Prove que as seguintes funções são normas em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e que são induzidas pelas normas vectoriais homónimas.

   (a) Norma 1:
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \qquad \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

   (b) Norma infinito ou norma de Chebyshev:
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

8. Seja A uma matriz real, não singular e de ordem n. Prove que se λ é um valor próprio de A então

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|.$$

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Calcule $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$.

10. Ao resolver o sistema de equações lineares $Ax = b$, suponha que o termo independente b não é exacto, encontrando-se afectado de um erro δb. Qual o erro que vem para x resultante dessa inexactidão?

11. O número de condição de uma matriz A é definido por $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

    (a) Mostre que uma medida do número de condição pode ser dada por λ_M/λ_m, onde λ_M e λ_m são, respectivamente, o maior e menor (em módulo) valores próprios de A.

    (b) Mostre que se A é singular $\mathrm{cond}(A)$ é infinito e se A é não singular $\mathrm{cond}(A) \geq 1$.

    (c) Resolva o sistema

$$\begin{cases} 2.000112x_1 + 1.414215x_2 &= 0.521471 \\ 1.414215x_1 + 1.000105x_2 &= 0.232279 \end{cases}$$

    pelo método de eliminação de Gauss. Sabendo que a sua solução exacta é

$$(x_1, x_2) = (607.1248, -858.2826),$$

    explique os resultados obtidos

12. Considere o sistema

$$\begin{cases} 3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913 \\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 28.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254 \end{cases}$$

    cuja solução é $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

    (a) Determine a sua solução utilizando o método de eliminação de Gauss.

    (b) Determine o resíduo para a solução calculada.

    (c) Determine o número de condição para a matriz do sistema.

13. As matrizes dos sistemas

$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ x - 1.00001y &= 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - y &= 1 \\ x - 0.99999y &= 0 \end{cases}$$

    são aproximadamente iguais. Determine e compare as suas soluções.

14. Prove que as seguintes funções são normas em $C[a, b]$.

    (a) Norma L_2:

$$\forall f \in C[a, b], \qquad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

    (b) Norma de Chebyshev:

$$\forall f \in C[a, b], \qquad \|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$