Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Tratamento Matemático das Observações

Folha 3 — Ano de 1997/98

1. Mostre que se $x_i \neq x_j$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, então o determinante da matriz de Vandermonde

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

é dado por

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j).$$

2. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ um conjunto de $n+1$ pontos distintos no intervalo real $[a, b]$. Considere os polinómios de Lagrange

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Mostre que:

   (a) os polinómios de Lagrange dados formam uma base do espaço $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau inferior ou igual a n;

   (b) se $p_n \in \mathcal{P}_n$, então $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_n(x_i) l_i(x)$;

   (c) é válida a igualdade $l_i(x) = w(x)/[(x - x_i)w'(x_i)]$, $i = 0, \ldots, n$, onde

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{1}$$

3. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e seja f uma função conhecida em a, b e $(a+b)/2$, com $a < b$.

   (a) Determine de três modos distintos o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2 para f em a, $(a+b)/2$ e b.

   (b) Repita o exercício proposto na alínea anterior considerando $(a, f(a)) = (0, 1)$, $(b, f(b)) = (0.5, 0.5)$ e $(c, f(c)) = (1, 1)$.

4. Conhecem-se as coordenadas de cinco pontos de uma curva plana, que representa uma região de uma peça em corte. Determine o polinómio de Lagrange de grau 4 que interpola a referida curva sabendo que os pontos de coordenadas conhecidas são: $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 1)$, $P_3 = (3, 1)$, $P_4 = (4, 2.5)$ e $P_5 = (5, 4)$. Determine ainda valores aproximados para as ordenadas dos pontos cujas abcissas são 0, 2.5 e 6.

5. Use o polinómio interpolador de Lagrange para determinar $\log 2.45$ sabendo que

x_i	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
$\log x_i$	0.34242	0.36173	0.38021	0.39794	0.41497

Determine uma estimativa para o erro cometido.

6. Na seguinte tabela são dados diferentes valores para o peso específico p da água a diferentes temperaturas t (em graus centígados):

t	0	1	2	3
p	0.999871	0.999928	0.999969	0.999991

Usando interpolação linear, quadrática e cúbica, determine uma aproximação para p quando $t = 4^o\ C$ usando a fórmula interpoladora de Lagrange e de Newton. Compare os resultados obtidos sabendo que o valor exacto é 1.000000.

7. Durante a sedimentação da reacção de saponificação entre quantidades equimolares de hidróxido de sódio e acetato de etilo, a concentração c (g mole/litro) de cada reagente varia com o tempo t (min) de acordo com a equação $1/c = 1/c_0 + kt$, onde c_0 é a concentração inicial e k (litro/g mole min) é a constante de reacção. Foram obtidos os seguintes resultados em laboratório à temperatura de $77^o\ F$:

t	1	2	3	4	5	7	10	12	20	25
$1/c$	24.7	32.4	38.4	45.0	52.3	65.6	87.6	102	154	192

   (a) Obtenha uma estimativa para a concentração inicial.

   (b) Obtenha uma estimativa para a concentração ao fim de 15 minutos e compare-a com a solução obtida em laboratório (ao fim de 15 minutos obteve-se $1/c = 135$).

8. Seja p_n o polinómio interpolador de $f \in C^{n+1}[a,b]$ de grau inferior ou igual a n nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ e w o polinómio nodal dado em (1). Mostre que:

   (a) se verifica a igualdade
$$f[x_0, x_1 \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}.$$

   (b) para cada $\overline{x} \in [a,b]$ que não coincida com nenhum x_i, $i = 0, \ldots, n$, se tem
$$f(\overline{x}) - p_n(\overline{x}) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}]w(\overline{x}).$$

   (c) existe um ponto $\xi \in (a,b)$ tal que $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$.

9. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ um conjunto de $n+1$ pontos distintos no intervalo real $[a,b]$ e w o polinómio nodal dado em (1). Prove que se x pertence ao intervalo definido pelos pontos dados, então
$$\|w(x)\|_\infty \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}, \qquad h = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

   Sugestão: Suponha que $x \in [x_i, x_{i+1}]$ e mostre que $\|(x - x_i)(x - x_{i+1})\|_\infty \leq h^2/4$.

10. Seja $f(x) = 3xe^x - 2e^x$. Determine uma aproximação para $f(1.03)$ usando o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2 e considerando os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ e $x_2 = 1.07$. Determine uma estimativa para o erro cometido.

11. Pretende-se construir uma tabela para a função $f(x) = e^x$, com $x \in [0,1]$. Considere o valor de e com 5 casas decimais correctas e uma partição com pontos igualmente distanciados. Determine o diâmetro da partição a considerar de modo que o polinómio interpolador de Lagrange permita obter uma aproximação para f com um erro inferior a 10^{-6}.

12. Considere a função $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in [1,3]$. Determine o polinómio interpolador de Lagrange que aproxima f em $[1,3]$ com um erro inferior a 10^{-2}.