1. Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ onde se considera a partição em pontos igualmente distanciados
$$a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$
Seja $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, .., n$, e considere ainda os seguintes pontos
$$x_{-i} = a - ih, i = 1, 2, 3, \qquad x_{n+i} = b + ih, i = 1, 2, 3.$$
Suponha que conhece a função f nos nodos da partição e a sua derivada f' em x_0 e x_n. Estabeleça o sistema de equações lineares que permite calcular o *spline* cúbico completo interpolador de f.

2. Utilize o *spline* cúbico natural (ou livre) interpolador f para determinar uma aproximação para

   (a) $f(2.5)$ sabendo que

x_i	2.2	2.4	2.6
$f(x_i)$	0.5207843	0.5104147	0.4813306

   (b) $f(5.3)$ sabendo que

x_i	5	5.2	5.4
$f(x_i)$	2.168861	1.797350	1.488591

   (c) $f(0.5)$ sabendo que

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

3. Considere o exercício anterior e determine uma aproximação para o valor da função f no ponto indicado considerando *splines* cúbicos completos com as seguintes condições para a derivada:

   (a) $f'(2.2) = -0.0014878$ e $f'(2.6) = -0.1883635$;

   (b) $f'(5.0) = -1.495067$ e $f'(5.4) = -1.070309$;

   (c) $f'(0.2) = 0.20271$ e $f'(1.0) = 1.55741$.

4. Diga se a função
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x \le 0 \\ ax^3 + bx^2 + c, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$
pode ou não ser um *spline* cúbico. No caso afirmativo, quais os valores que a, b e c podem assumir.

5. Construa o *spline* cúbico natural interpolador da função $f(x) = \cos \pi x$ nos pontos $0, 0.25, 0.5, 0.75$ e 1.0.

   (a) Integre o *spline* interpolador em $[0, 1]$ e compare o resultado obtido com
$$\int_0^1 f(x)dx.$$

   (b) Utilize as derivadas do *spline* determinado para calcular uma aproximação para $f'(0.5)$ e $f''(0.5)$. Compare os resultados obtidos com os valores exactos.

6. Repita o exercício anterior para $f(x) = e^{-x}$.

7. Repita os dois exercícios anteriores considerando *splines* cúbicos completos e, respectivamente, as seguintes condições
$$f'(0) = f'(1) = 0,$$
$$f'(0) = -1, \qquad f'(1) = -e^{-1}.$$

8. Pretende-se interpolar a função $f(x) = \sin(\pi x/2)$ no intervalo $[0, 1/2]$ por um *spline* cúbico completo numa malha uniforme. Calcule o número mínimo de pontos a usar para garantir que os erros não excedam 0.5×10^{-4} nos valores da função e 0.5×10^{-3} nos valores da derivada.

9. Considere uma função f conhecida em três pontos x_0, x_1 e x_2. Determine uma fórmula de aproximação para $f'(x_0)$ utilizando o polinómio interpolador de Lagrange grau 2 e estabeleça uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar $f'(x_0)$ utilizando a fórmula deduzida.

10. Considere o exercício anterior e a função $f(x) = xe^x$. Atendendo a que
$$f(1) = 2.71828, \qquad f(1.02) = 2.82865, \qquad f(1.04) = 2.94238,$$
calcule uma aproximação para $f'(1.04)$. Compare o resultado obtido com $f'(1.04)$.

11. Repita o exercício anterior utilizando a fórmula de diferenças centradas.

12. Num circuito eléctrico com voltagem aplicada $E(t)$ e inductância L, a primeira lei de Kirchoff dá-nos a relação
$$E(t) = L\frac{dI}{dt}(t) + RI(t),$$
onde R é a resistência e I a corrente. Suponhamos que medimos a corrente para vários valores de t obtendo

t_i	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
$I(t_i)$	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

,

onde t é medido em segundos, I em amperes, a inductância L é uma constante igual a 0.98 henries e a resistência é 0.142 ohms. Aproxime a voltagem E nos valores de t dados na tabela.

13. Considere uma função f conhecida em três pontos x_0, x_1 e x_2. Determine uma fórmula de aproximação para $f'(x_2)$ utilizando o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2 e estabeleça uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar $f'(x_2)$ utilizando a fórmula deduzida.

14. Considere o exercício anterior e a função $f(x) = xe^x$. Atendendo a que
$$f(1) = 2.71828, \qquad f(1.02) = 2.82865, \qquad f(1.04) = 2.94238,$$
calcule uma aproximação para $f'(1.04)$. Compare o resultado obtido com $f'(1.04)$.

15. Considere uma função f conhecida em três pontos x_0, x_1 e x_2. Determine uma fórmula de aproximação para $f''(x_1)$ utilizando o polinómio interpolador de Lagrange.

16. Considere a função $f(x) = 2^x \sin \pi x$.
   (a) Repita o exercício anterior considerando:
      i. $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ e $x_2 = 1.1$;
      ii. $x_0 = 1.025$, $x_1 = 1.05$ e $x_2 = 1.075$.
   (b) Compare os resultados obtidos na alínea anterior.

17. Mostre, a partir do polinómio interpolador de Lagrange da função f nos pontos x_0, x_1 e x_2, tais que $x_1 - x_0 = h$ e $x_2 - x_1 = \alpha h$, que
$$f''(x) \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_0)}{1+\alpha} - \frac{f(x_1)}{\alpha} + \frac{f(x_2)}{\alpha(1+\alpha)}\right].$$
Verifique que quando $\alpha = 1$ se recupera a fórmula das diferenças centradas.