Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Tratamento Matemático das Observações

Folha 4 Ano de 1997/98

1. Considere a função $f(x) = e^x, x \in [-1, 1]$.
   (a) Determine o polinómio interpolador de Lagrange de grau n – p_n – para f considerando pontos igualmente distanciados no intervalo $[-1, 1]$.
   (b) Determine uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar $f(0)$ pelo seu polinómio interpolador de grau n.
   (c) Esboce os gráficos de p_1 e p_2.
   (d) Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear quando se considera uma partição com nós $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Compare o resultado obtido com o da alínea anterior.

2. Seja $[a, b]$ um intervalo real e Δ a partição dada por
$$\Delta : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
Seja ainda $\mathcal{P}_m^0(\Delta)$ o conjunto de todas as funções contínuas em $[a, b]$ que em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, da partição Δ coincidem com um polinómio de grau m.
   (a) Prove que $\mathcal{P}_1^0$ e $\mathcal{P}_2^0$ são espaços vectoriais de dimensão $n + 1$ e $2n + 1$, respectivamente.
   (b) Dadas n funções polinomiais quadráticas p_i, definidas em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, da partição Δ, existirá sempre um elemento de $\mathcal{P}_2^0(\Delta)$ cuja restrição ao i-ésimo subintervalo coincida com p_i?

3. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear para a função f tal que

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x_i)$	1	1.25	1	1.5	1

4. Calcule o polinómio interpolador de Lagrange segmentado quadrático para a função do exercício anterior.

5. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado de grau 2 para uma função f que se conhece nos pontos
$$a = x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < x_2 < x_{5/2} < x_3 = b.$$

6. Particularize o exercício anterior para
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

7. Determine o polinómio interpolador de Lagrange segmentado cúbico para uma função f supondo que esta é conhecida nos pontos
$$a = x_0 < x_{1/3} < x_{2/3} < x_1 < x_{4/3} < x_{5/3} < x_2 = b.$$

8. Particularize o resultado do exercício anterior para a função $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$.

9. Mostre que o polinómio de Hermite de grau mínimo de uma função $f \in C^4[x_0, x_1]$ é dado por

$$h_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

e deduza que o erro satisfaz a

$$\|f - h_3\|_\infty \leq \frac{(x_1 - x_0)^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty.$$

10. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \sin x$ quando se considera $x \in [0, \pi/2]$.

11. Determine, de dois modos distintos, o polinómio interpolador de Hermite para os dados

x_i	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	0.75	1	0.25
$f'(x_i)$	0.25	0.5	0.75

.

12. Considere a função $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$. Determine uma aproximação para $f(1.03)$ usando o polinómio interpolador de Hermite considerando os pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 1.05$. Determine uma estimativa para o erro cometido.

13. Considere $f(x) = e^x$. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 5 – h_5 – usando os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Compare $h_5(0.25)$ com $f(0.25)$ e com $p_2(0.25)$ em que p_2 é o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2, para a função f, determinado nos mesmos pontos.

14. Mostre que o polinómio de Taylor de grau m de uma função f em torno do ponto $x = x_0$ oscula m vezes com f o ponto x_0.

15. Considere as funções f e g das quais se conhecem os valores

x_i	0	1
$f(x_i)$	−1	0
$f'(x_i)$	−2	10
$f''(x_i)$		40

,

x_i	0	0.25
$g(x_i)$	0.75	1
$g'(x_i)$	0.25	0.5
$g''(x_i)$	0.25	0.5

.

   (a) Determine o polinómio p que oscula com f duas vezes o ponto $x_0 = 0$ e três vezes o ponto $x_1 = 1$.

   (b) Determine o polinómio p que oscula com g duas vezes os pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.25$.

16. Determine o polinómio interpolador de Hermite segmentado cúbico de f sabendo que

x_i	0	0.25	0.5
$f(x_i)$	0.5	1	0.5
$f'(x_i)$	0.5	0	−0.5

.

17. Suponha que conhece uma função e a sua derivada nos pontos

$$x_0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < x_2.$$

Determine o polinómio interpolador de Hermite segmentado de grau 5 de dois modos distintos.

18. Particularize o exercício anterior para a função $f(x) = \cos x$ considerando os pontos

$$x_0 = 0, \qquad x_{1/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad x_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_{3/2} = \frac{5\pi}{4}, \qquad x_2 = \pi.$$