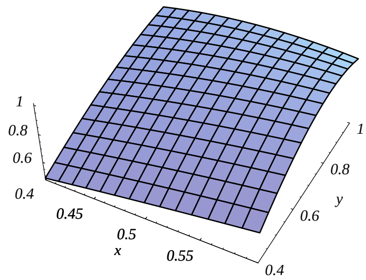
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Tratamento Matemático das Observações

Ano de 2001/02 — Folha 5

1. Considere a função $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi^2}{180}xy\right)$, com $(x,y) \in [0.4, 0.6] \times [0.4, 1]$, cujo gráfico é dado na figura seguinte.



A tabela seguinte tem os valores da função anterior nos pontos (x,y) da rede rectangular $\{0.4, 0.5, 0.6\} \times \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$:

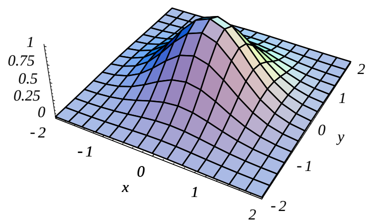
x_i \ y_i	0.4	0.6	0.8	1
0.4	0.00877	0.01390	0.01754	0.02193
0.5	0.01096	0.01644	0.02193	0.02741
0.6	0.01315	0.01973	0.02631	0.03289

(a) Construa o polinómio interpolador de Lagrange de f nos pontos da rede.

(b) Determine um valor aproximado para $f(0.5, 0.7)$ e compare o resultado obtido com o valor exacto.

(c) Utilize o polinómio interpolador de Lagrange para calcular uma aproximação para o integral da função f no rectângulo $[0.4, 0.6] \times [0.4, 1]$. Compare, se possível, o resultado obtido com o valor exacto.

2. Considere a função $f(x,y) = \exp\left(-(x^2 + y^2)\right)$, com $(x,y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$, cujo gráfico é dado na figura seguinte.



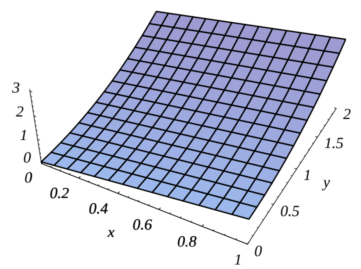
Considere o rectângulo $R = [0, 0.1] \times [0, 0.2]$. Em cada um dos intervalos $[0, 0.1]$ e $[0, 0.2]$ defina as partições de pontos igualmente distanciados e de espaçamentos, respectivamente, $h = 0.05$ e $k = 0.04$. Utilizando a rede rectangular induzida em R pelas partições anteriores determine:

(a) o polinómio interpolador de Lagrange para f;

(b) uma aproximação para $f(0.015, 0.013)$ e compare o valor obtido com o valor exacto;

(c) uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar f pelo seu polinómio interpolador de Lagrange no rectângulo considerado.

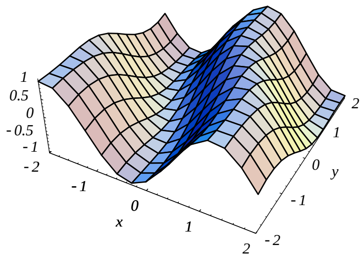
3. Determine o polinómio de Lagrange de grau 1 em x e de grau 2 em y interpolador da função $f(x, y) = x + y^2/2$, com $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, cujo gráfico é dado na figura seguinte.



Determine uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio anterior.

4. Considere o rectângulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ e a rede nele induzida pela partição em $[0, 1]$ de espaçamento uniforme igual a $h = 0.25$ e em $[0, 2]$ de espaçamento uniforme igual a $k = 0.5$. Sendo f a função que nos pontos da partição assume os valores $f(x_i, y_j) = (i - j)/(i + j + 1)$, determine o seu polinómio interpolador de Lagrange.

5. Seja $f(x, y) = \sin(2x + \sin y)$, com $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$, cujo gráfico é dado na figura seguinte.



Considere o rectângulo $[0, 0.5] \times [0.4, 1]$ e nele a rede rectangular induzida pelas partições uniformes de espaçamentos $h = 0.125$ em x e $k = 0.2$ em y.

(a) Construa o polinómio interpolador de Lagrange de grau 4 em x e de grau 3 em y.

(b) Construa o polinómio interpolador de Lagrange segmentado linear em x e em y.

(c) Calcule o polinómio interpolador de Lagrange segmentado quadrático em x e cúbico em y.

(d) Determine uma aproximação para $f(0.3, 0.7)$ considerando os polinómios construídos nas alíneas anteriores. Compare os resultados obtidos sabendo que $f(0.3, 0.7) = 0.947145$.

(e) Considere o rectângulo $[0.125, 0.25] \times [0.6, 0.8]$. Determine uma aproximação para o integral de f no rectângulo anterior considerando os polinómios determinados nas alíneas anteriores. Compare os resultados obtidos sabendo que o integral de f em $[0.125, 0.25] \times [0.6, 0.8]$ é 0.0212024.