1. Seja $f$ uma função definida num intervalo $[a,b]$ onde se considera a partição em pontos igualmente distanciados
$$a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$
Seja $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,..,n$, e considere ainda os seguintes pontos
$$x_{-i} = a - ih, i = 1,2,3, \qquad x_{n+i} = b + ih, i = 1,2,3.$$
Suponha que conhece a função $f$ nos nodos da partição e a sua derivada $f'$ em $x_0$ e $x_n$. Estabeleça o sistema de equações lineares que permite calcular o *spline* cúbico completo interpolador de $f$.

2. Utilize o *spline* cúbico natural (ou livre) interpolador $f$ para determinar uma aproximação para

   (a) $f(2.5)$ sabendo que

| $x_i$ | 2.2 | 2.4 | 2.6 |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.5207843 | 0.5104147 | 0.4813306 |

   (b) $f(5.3)$ sabendo que

| $x_i$ | 5 | 5.2 | 5.4 |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 2.168861 | 1.797350 | 1.488591 |

   (c) $f(0.5)$ sabendo que

| $x_i$ | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.9798652 | 0.9177710 | 0.8080348 | 0.6386093 | 0.3843735 |

3. Considere o exercício anterior e determine uma aproximação para o valor da função $f$ no ponto indicado considerando *splines* cúbicos completos com as seguintes condições para a derivada:

   (a) $f'(2.2) = -0.0014878$ e $f'(2.6) = -0.1883635$;

   (b) $f'(5.0) = -1.495067$ e $f'(5.4) = -1.070309$;

   (c) $f'(0.2) = 0.20271$ e $f'(1.0) = 1.55741$.

4. Diga se a função
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ ax^3 + bx^2 + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
pode ou não ser um *spline* cúbico. No caso afirmativo, quais os valores que $a$, $b$ e $c$ podem assumir.

5. Construa o *spline* cúbico natural interpolador da função $f(x) = \cos \pi x$ nos pontos $0, 0.25, 0.5, 0.75$ e $1.0$.

   (a) Integre o *spline* interpolador em $[0,1]$ e compare o resultado obtido com
$$\int_0^1 f(x)dx.$$

   (b) Utilize as derivadas do *spline* determinado para calcular uma aproximação para $f'(0.5)$ e $f''(0.5)$. Compare os resultados obtidos com os valores exactos.

6. Repita o exercício anterior para $f(x) = e^{-x}$.

7. Repita os dois exercícios anteriores considerando *splines* cúbicos completos e, respectivamente, as seguintes condições
$$f'(0) = f'(1) = 0,$$
$$f'(0) = -1, \qquad f'(1) = -e^{-1}.$$

8. Pretende-se interpolar a função $f(x) = \sin(\pi x/2)$ no intervalo $[0, 1/2]$ por um *spline* cúbico completo numa malha uniforme. Calcule o número mínimo de pontos a usar para garantir que os erros não excedam $0.5 \times 10^{-4}$ nos valores da função e $0.5 \times 10^{-3}$ nos valores da derivada.

9. Considere uma função $f$ conhecida em três pontos $x_0$, $x_1$ e $x_2$. Determine uma fórmula de aproximação para $f'(x_0)$ utilizando o polinómio interpolador de Lagrange grau 2 e estabeleça uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar $f'(x_0)$ utilizando a fórmula deduzida.

10. Considere o exercício anterior e a função $f(x) = xe^x$. Atendendo a que
$$f(1) = 2.71828, \qquad f(1.02) = 2.82865, \qquad f(1.04) = 2.94238,$$
calcule uma aproximação para $f'(1.04)$. Compare o resultado obtido com $f'(1.04)$.

11. Repita o exercício anterior utilizando a fórmula de diferenças centradas.

12. Num circuito eléctrico com voltagem aplicada $E(t)$ e inductância $L$, a primeira lei de Kirchoff dá-nos a relação
$$E(t) = L\frac{dI}{dt}(t) + RI(t),$$
onde $R$ é a resistência e $I$ a corrente. Suponhamos que medimos a corrente para vários valores de $t$ obtendo

| $t_i$ | 1.00 | 1.01 | 1.02 | 1.03 | 1.04 |
|---|---|---|---|---|---|
| $I(t_i)$ | 3.10 | 3.12 | 3.14 | 3.18 | 3.24 |

onde $t$ é medido em segundos, $I$ em amperes, a inductância $L$ é uma constante igual a 0.98 henries e a resistência é 0.142 ohms. Aproxime a voltagem $E$ nos valores de $t$ dados na tabela.

13. Considere uma função $f$ conhecida em três pontos $x_0$, $x_1$ e $x_2$. Determine uma fórmula de aproximação para $f'(x_2)$ utilizando o polinómio interpolador de Lagrange de grau 2 e estabeleça uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar $f'(x_2)$ utilizando a fórmula deduzida.

14. Considere o exercício anterior e a função $f(x) = xe^x$. Atendendo a que
$$f(1) = 2.71828, \qquad f(1.02) = 2.82865, \qquad f(1.04) = 2.94238,$$
calcule uma aproximação para $f'(1.04)$. Compare o resultado obtido com $f'(1.04)$.

15. Considere uma função $f$ conhecida em três pontos $x_0$, $x_1$ e $x_2$. Determine uma fórmula de aproximação para $f''(x_1)$ utilizando o polinómio interpolador de Lagrange.

16. Considere a função $f(x) = 2^x \sin \pi x$.
    (a) Repita o exercício anterior considerando:
        i. $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ e $x_2 = 1.1$;
        ii. $x_0 = 1.025$, $x_1 = 1.05$ e $x_2 = 1.075$.
    (b) Compare os resultados obtidos na alínea anterior.

17. Mostre, a partir do polinómio interpolador de Lagrange da função $f$ nos pontos $x_0$, $x_1$ e $x_2$, tais que $x_1 - x_0 = h$ e $x_2 - x_1 = \alpha h$, que
$$f''(x) \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_0)}{1+\alpha} - \frac{f(x_1)}{\alpha} + \frac{f(x_2)}{\alpha(1+\alpha)}\right].$$
Verifique que quando $\alpha = 1$ se recupera a fórmula das diferenças centradas.