DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

TRATAMENTO MATEMÁTICO DAS OBSERVAÇÕES

FOLHA 8 — ANO DE 1997/98

1. Seja (X,Y) uma v.a. cuja função de probabilidade é dada na tabela

$x \backslash y$	2	4
1	0.2	0.3
2	0.1	0.1
3	0.2	0.1

   (a) Determine a função de distribuição da v.a. (X,Y).

   (b) Calcule $P(X \le 3, Y \le 4)$, $P(X \le 3,\, 2 < Y \le 4)$ e $P(1 < X \le 3,\, 2 < Y \le 4)$.

2. Seja (X,Y) uma v.a. que tem por função densidade

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Determine a função de distribuição da v.a. (X,Y).

   (b) Calcule $P(X \le 3, Y \le 4)$, $P(X \le 3, 2 < Y \le 4)$ e $P(1 < X \le 3, 2 < Y \le 4)$.

3. Seja (X,Y) uma v.a. cuja função de probabilidade é dada na tabela

$x \backslash y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

   (a) Determine a função de probabilidade das distribuições marginais de X e Y.

   (b) Determine a função de distribuição marginal de X e Y.

4. Vai ser atribuído a uma família, através de um sorteio, um apartamento num edifício com três andares, havendo dois tipos de apartamentos em cada andar (tipo A e B). Pretendendo o dono do edifício que a referida família fique, de preferência, com um no primeiro andar e do tipo A, viciou o sorteio de modo que a função probabilidade fosse a seguinte:

	1º andar	2º andar	3º andar
apartamento do tipo A	$\frac{20}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
apartamento do tipo B	$\frac{6}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

   (a) Determine as distribuições marginais das variáveis em questão.

   (b) Qual é a probabilidade de sair um apartamento do tipo A? E qual é a probabilidade de sair o primeiro andar?

   (c) Diga se as variáveis são dependentes ou independentes.

5. Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento ao acaso de dois dados regulares. Seja X a v.a. que representa o número de pontos obtidos pelo primeiro dado e Y o maior número de pontos obtidos no conjunto dos dois lançamentos.

   (a) Determine a função de probabilidade da v.a. (X,Y) e as funções de probabilidade marginais das v.a. X e Y.

   (b) Diga se as v.a. X e Y são ou não independentes.

6. Seja (X, Y) um vector aleatório que tem por função de probabilidade

$x \backslash y$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{5}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$
3	$\frac{2}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{5}{110}$	$\frac{2}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{5}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{110}$
5	$\frac{2}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{4}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{5}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{5}{110}$
7	$\frac{2}{110}$	$\frac{5}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{8}{110}$
9	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{5}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$	$\frac{1}{110}$	$\frac{3}{110}$

(a) Determine as funções de probabilidade das distribuições marginais de X e Y.

(b) As v.a. X e Y são independentes?

(c) Calcule a probabilidade de sair para X o número 7. Qual é a probabilidade de sair para Y o número 10?

(d) Calcule a probabilidade de sair para X um número ímpar inferior a 5 e para Y um número par inferior a 12.

(e) Calcule o valor mais provável para (X, Y).

(f) Determine $E(X)$, $E(Y)$, σ_X^2, σ_Y^2 e $\sigma_{X,Y}$.

7. Considere a v.a. (X, Y) que tem por função densidade

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a função densidade das distribuições marginais de X e Y.

(b) Determine a função de distribuição marginal de X e Y.

(c) As v.a. são independentes?

(d) Quanto vale $P(X \leq 4, Y \in \mathbb{R})$ e $P(X \in \mathbb{R}, Y \leq 4)$?

(e) Qual é a esperança matemática do vector aleatório (X, Y)?

(f) Determine $E(X)$, $E(Y)$, σ_X^2, σ_Y^2 e $\sigma_{X,Y}$.

8. Considere a v.a. (X, Y) que tem por função densidade

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a esperança do vector aleatório (X, Y).

(b) Determine $E(X)$, $E(X^2)$, σ_X^2 e $\sigma_{X,Y}$.

(c) Diga se v.a. X e Y são ou não independentes.

9. Considere a v.a. (X, Y) que tem por função densidade

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^{11}}, & (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que, apesar da v.a. (X, Y) ter covariância igual a zero, as v.a. X e Y não são independentes.