Tratamento Matemático das Observações

Projecto 6 — Ano de 1997/98

A extrapolação de Richardson é usada para gerar resultados de grande precisão usando fórmulas de precisão mais baixa. Apesar do nome deste método estar associado a um trabalho de L.F. Richardson & J.A. Graunt, de 1927, a ideia que lhe está subjacente é bastante mais antiga.

Suponhamos que se pretende aproximar um determinado valor M usando uma fórmula de aproximação numérica $N_1(h)$, dependente de um parâmetro h. Suponhamos ainda que

$$M - N_1(h) = K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots.$$

Podemos também escrever

$$M - N_1\left(\frac{h}{2}\right) = K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} + \cdots.$$

Combinando de forma adequada as duas igualdades anteriores concluímos que (prove!)

$$M - N_2(h) = \frac{K_2}{2} h^2 - \frac{3K_3}{4} h^3 + \cdots,$$

com

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left[N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right].$$

Obtemos assim uma nova fórmula $N_2(h)$ que aproxima M de forma mais precisa que $N_1(h)$.

1. Prove que

$$M - N_3(h) = \frac{K_3}{8} h^3 + \cdots,$$

com

$$N_3(h) = N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{3}.$$

2. Generalize o resultado anterior provando que

$$M - N_m(h) = C_m h^m + \cdots, \qquad m = 2, 3, \ldots,$$

com

$$N_m(h) = N_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{m-1}(h)}{2^{m-1} - 1}.$$

3. Diga como poderia organizar os cálculos de extrapolação numa tabela.

4. Como é fácil de ver, a extrapolação também pode ser utilizada no caso em que

$$M - N_1(h) = K_1 h^{\alpha_1} + K_2 h^{\alpha_2} + K_3 h^{\alpha_3} + \cdots.$$

Consideremos a fórmula

$$f'(x_i) - N_1(h) = -\frac{2}{6} f'''(x_i) - \frac{4}{120} f^{(5)}(x_i) - \cdots,$$

com

$$N_1(h) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}.$$

(a) Descreva o processo de extrapolação neste contexto;

(b) Determine uma aproximação para a derivada da função $f(x) = xe^x + \sin x$, em $x = 2$, usando o processo descrito na alínea anterior.