Castelos: matemática na defesa e no ataque

Adérito Araújo

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

"Olinda não é certamente a única cidade a crescer em círculos concêntricos […]. Mas, nas outras cidades permanece bem no meio o velho círculo das muralhas bem estreito […]. Em Olinda não: as velhas muralhas dilatam-se levando consigo os bairros antigos"

Italo Calvino, *in* "As Cidades Invisíveis"

Évora, Portugal

Lisboa, Portugal

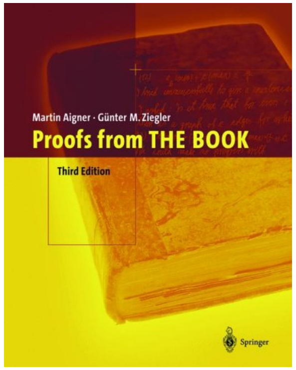
Coimbra, Portugal

Sumário

1. Evolução arquitectónica

2. A matemática dos castelos

C.J. Budd & C.J. Sangwin
"Mathematics Galore!"
Oxford UP, 2001



M. Aigner & G.M. Ziegler
"Proofs from THE BOOK"
Springer, 2003

http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/castelos/

1. Evolução arquitectónica

As primeiras fortificações foram desenhadas para defender cidades inteiras.

Mooghan, Irlanda

Yarnbury, Reino Unido

Um **Castro** é tipo de povoado existente nas montanhas do noroeste da Península Ibérica, característico da Idade do Ferro e declaradamente defensivo com estruturas predominantemente circulares.

Castro de Romariz, Portugal

Uma **Citânia** é um castro de maiores dimensões e importância, habitado continuadamente.

Citânia de Briteiros, Portugal

☺

1. Visibilidade
2. Vantagem psicológica
3. Tempo para preparar a defesa
4. É difícil subir a montanha
5. Arremesso de pedras
6. Locais menos pantanosos

Citânia de Briteiros, Portugal

☹

1. Dificuldade em obter água durante um cerco
2. Recursos como a comida e os postes/pedras para construir a fortificação ou as habitações eram difíceis de transportar

Um **Castelo** (diminutivo de *castro*) é uma estrutura arquitectónica fortificada, com funções defensiva e residencial, típica da Idade Média.

Castelo de Guimarães, Portugal

Na Idade Média dizia-se “fazer vila” o acto de cercar de muralhas uma povoação.

Óbidos, Portugal

A organização defensiva do castelo era semelhante à da vila e tinha comandamento sobre ela devido à posição mais alta e às muralhas mais fortes.

Belver, Portugal

Pátio central

Duas portas: uma para a povoação (porta da vila); a outra, para o terreno exterior (porta da traição)

Casas da guarnição encostadas às muralhas

Adarve ou ***caminho da ronda***, defendido por um muro ameiado, cuja largura variava entre 1 a 4 metros

Marvão, Portugal

Com o final da Idade Média genaralizou-se o uso de canhões e armas de fogo nos cercos aos castelos e, como tal, a sua arquitectura sofreu alterações.

Deal, Reino Unido

De entre as fortalezas construídas nessa altura aquela cuja arquitectura se revelou mais eficiente foi a que se chamou **baluarte** ou **bastião**.

Lindoso, Portugal

Em relação aos castelos medievais, constitui-se numa defesa mais baixa e larga, melhor adaptada ao emprego de artilharia, que se desenvolveu em arquitectura de fortificação, a partir do século XIV.

Forte Tilbury, Reino Unido

2. A matemática dos castelos

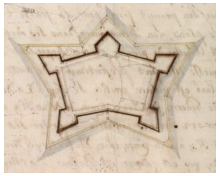
Questão 1: Como medir a altura de um castelo?

Questão 2: Qual a vantagem das formas simétricas?

Questão 3: Como defender a entrada de um castelo?

Questão 4: Como é que a evolução da forma permitiu melhorar a segurança?

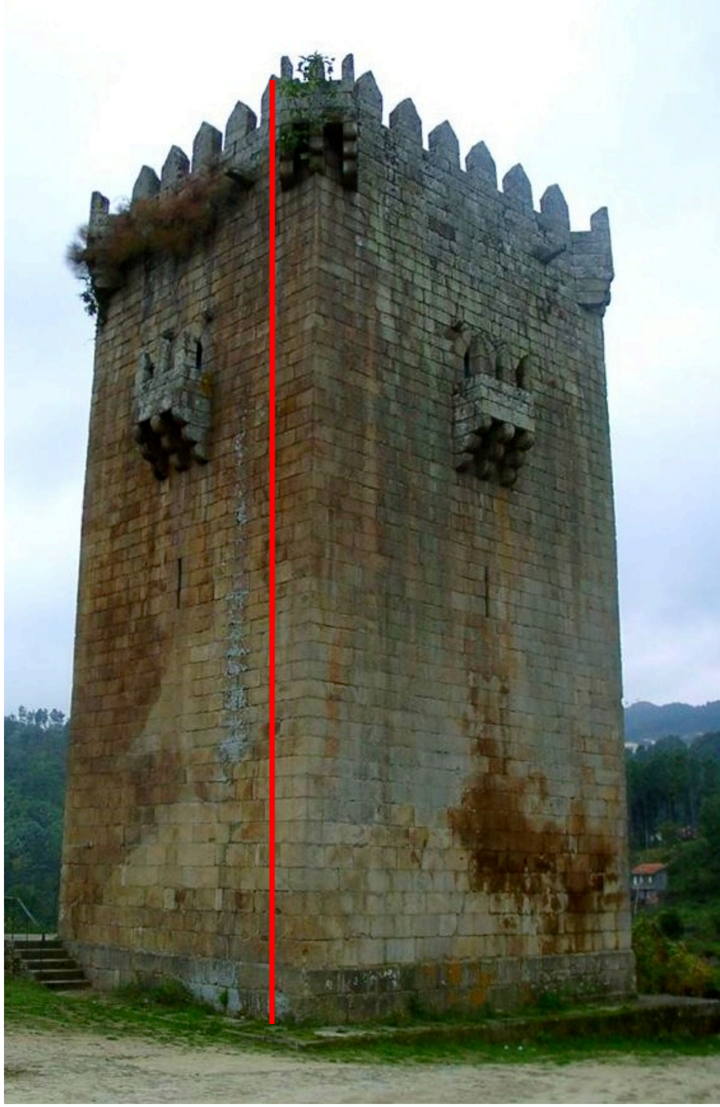
Questão 5: Como defender o interior de um castelo?



Questão 1: Como medir a altura de um castelo?

Castelo de Portchester, Inglaterra

Como medir a Torre de Quintela, Portugal?



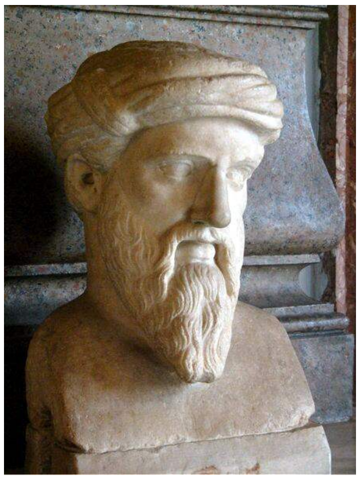
A = ?

Como medir a Torre de Quintela, Portugal?

B = 40 m

A = ?

Teorema de Pitágoras: $A^2+B^2=C^2$

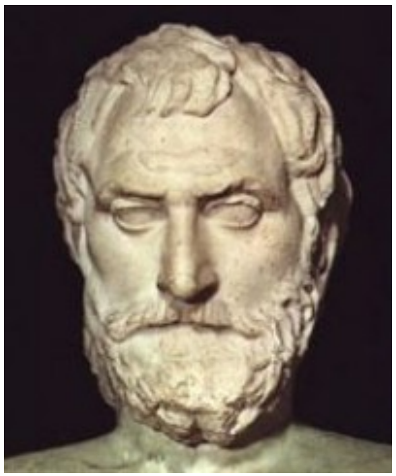


Pitágoras de Samos
(séc. V a.C.)

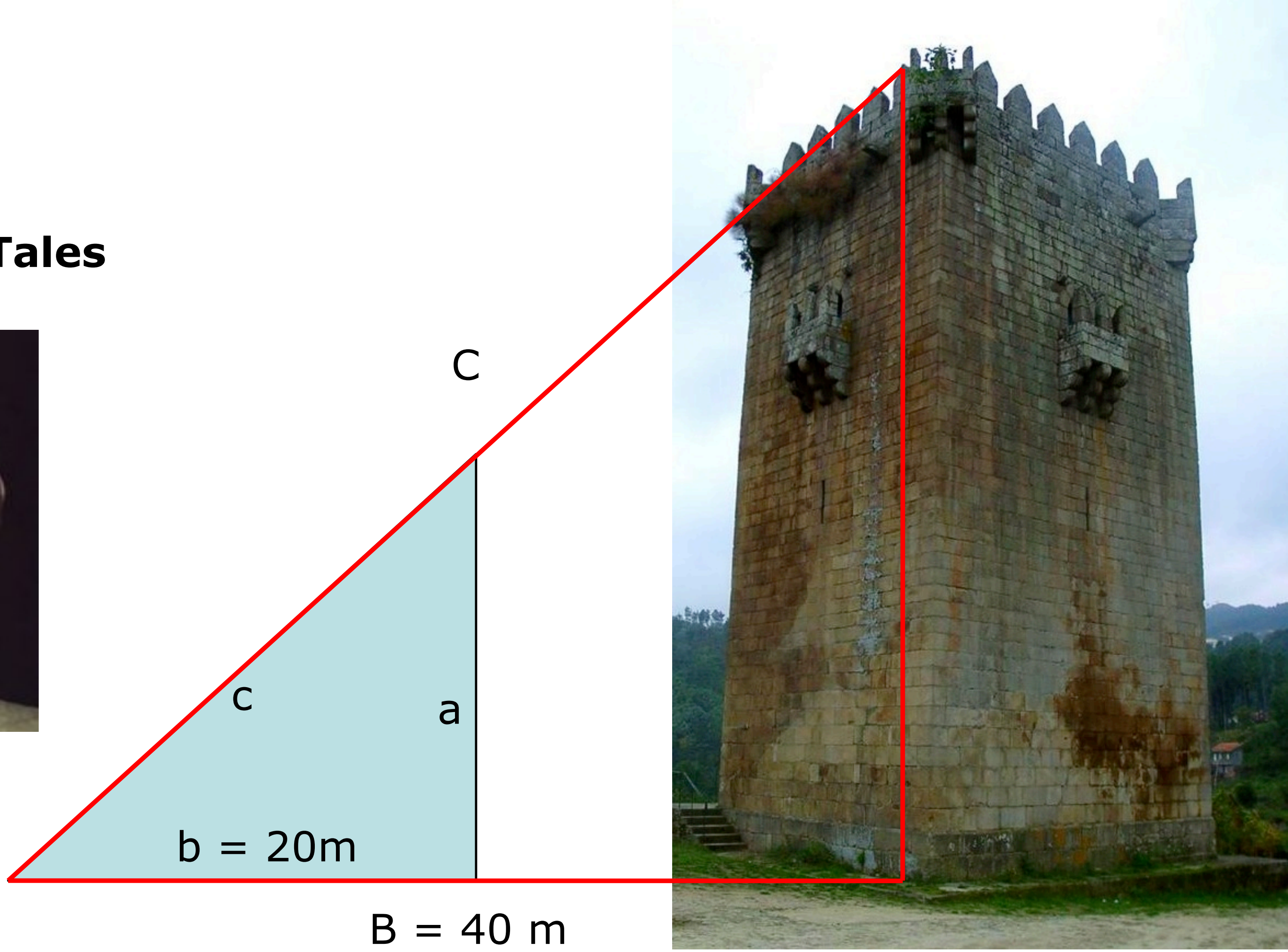
C

B = 40 m

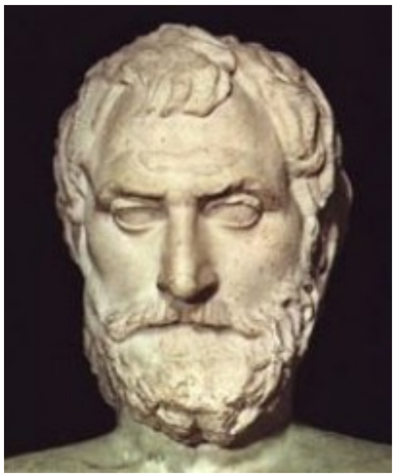
Teorema de Tales



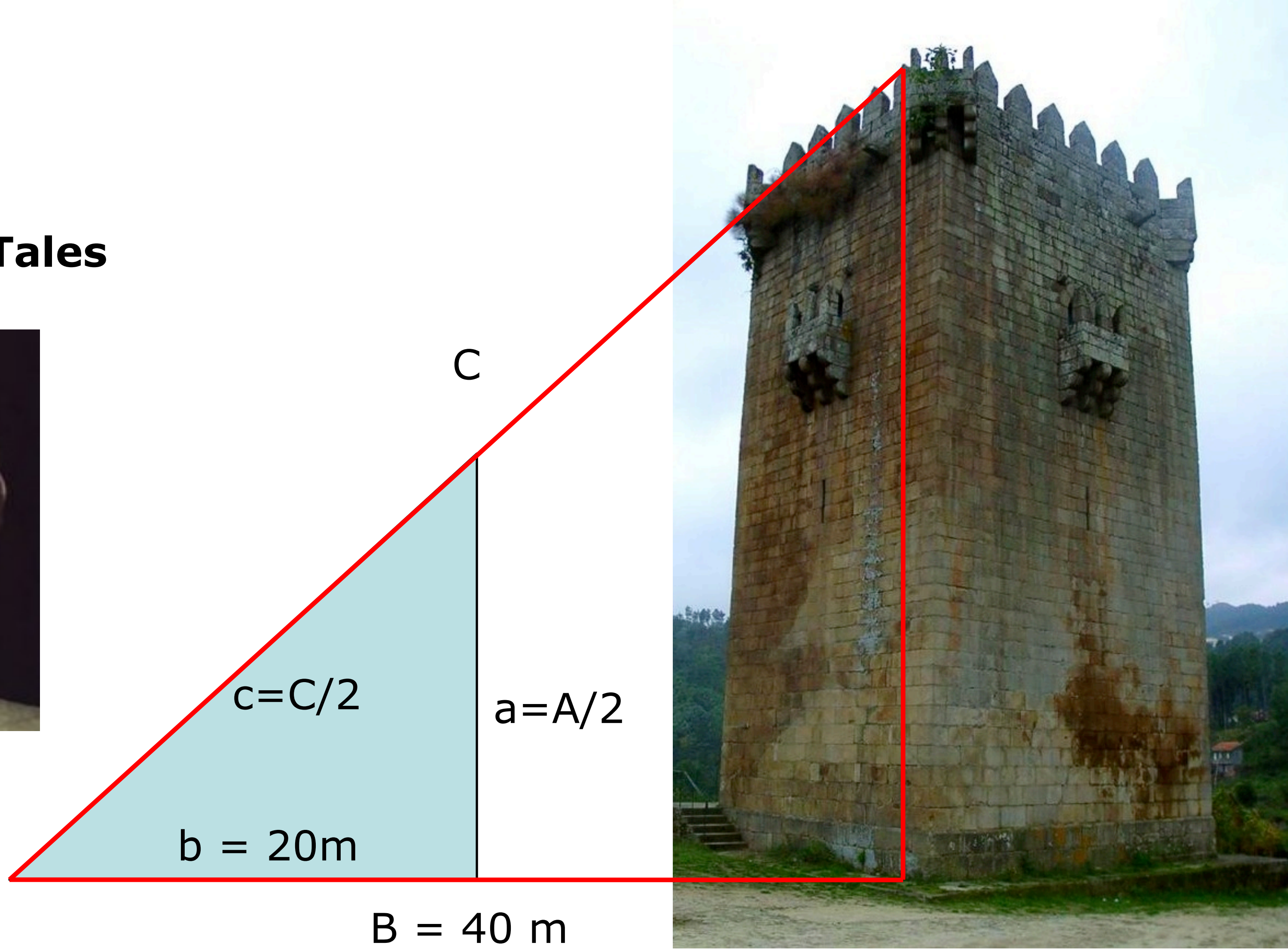
Tales de Mileto
(séc. VI a.C.)



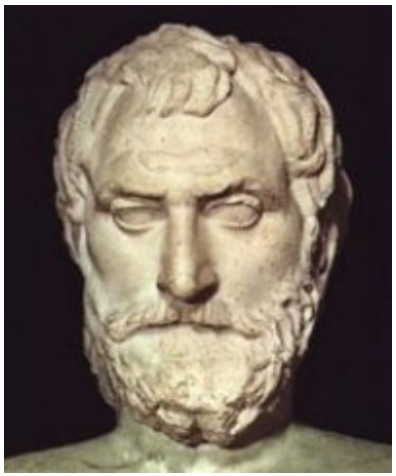
Teorema de Tales



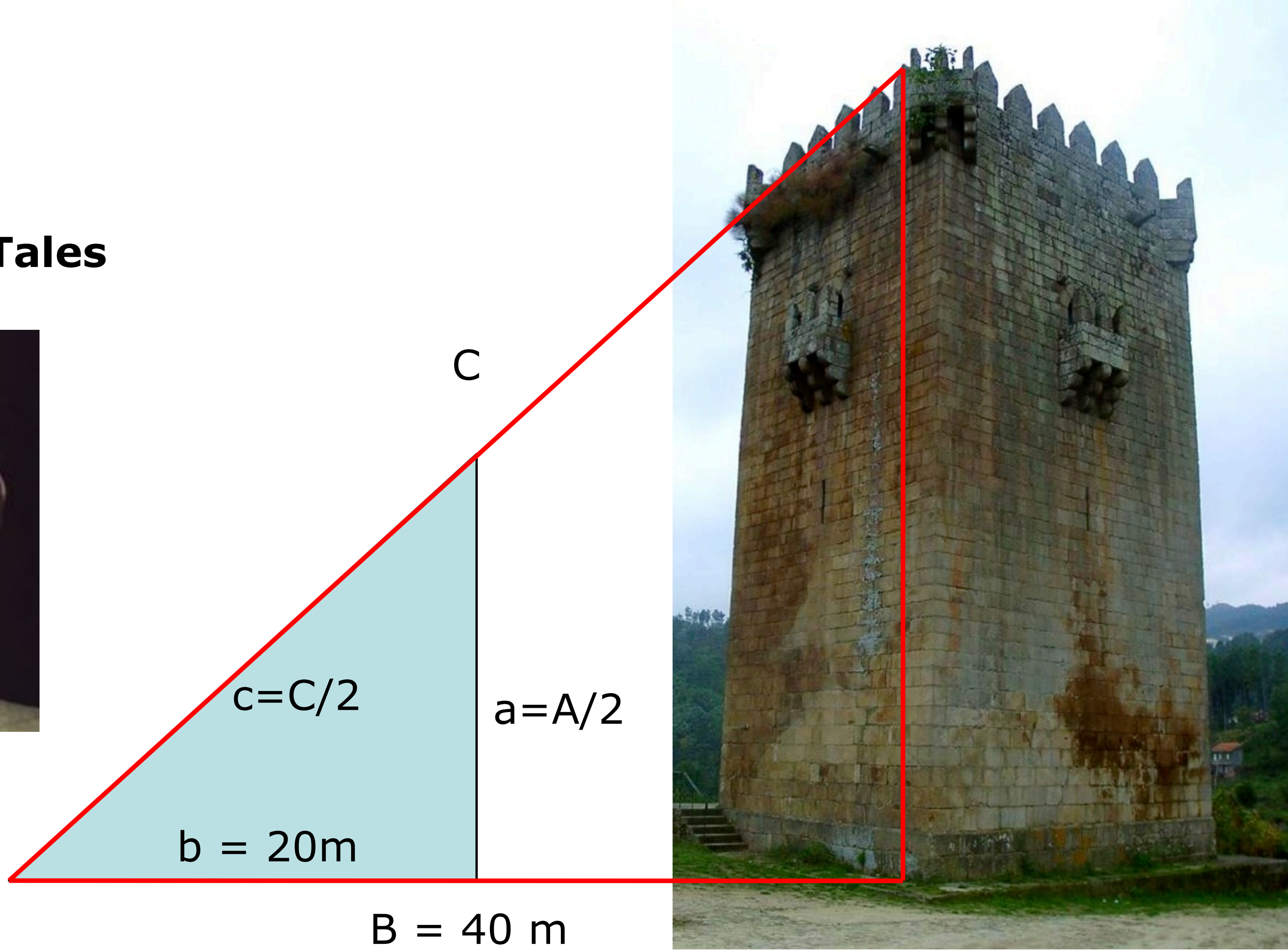
Tales de Mileto
(séc. VI a.C.)



Teorema de Tales

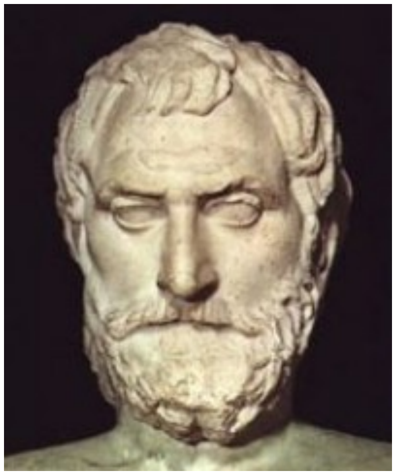


Tales de Mileto
(séc. VI a.C.)

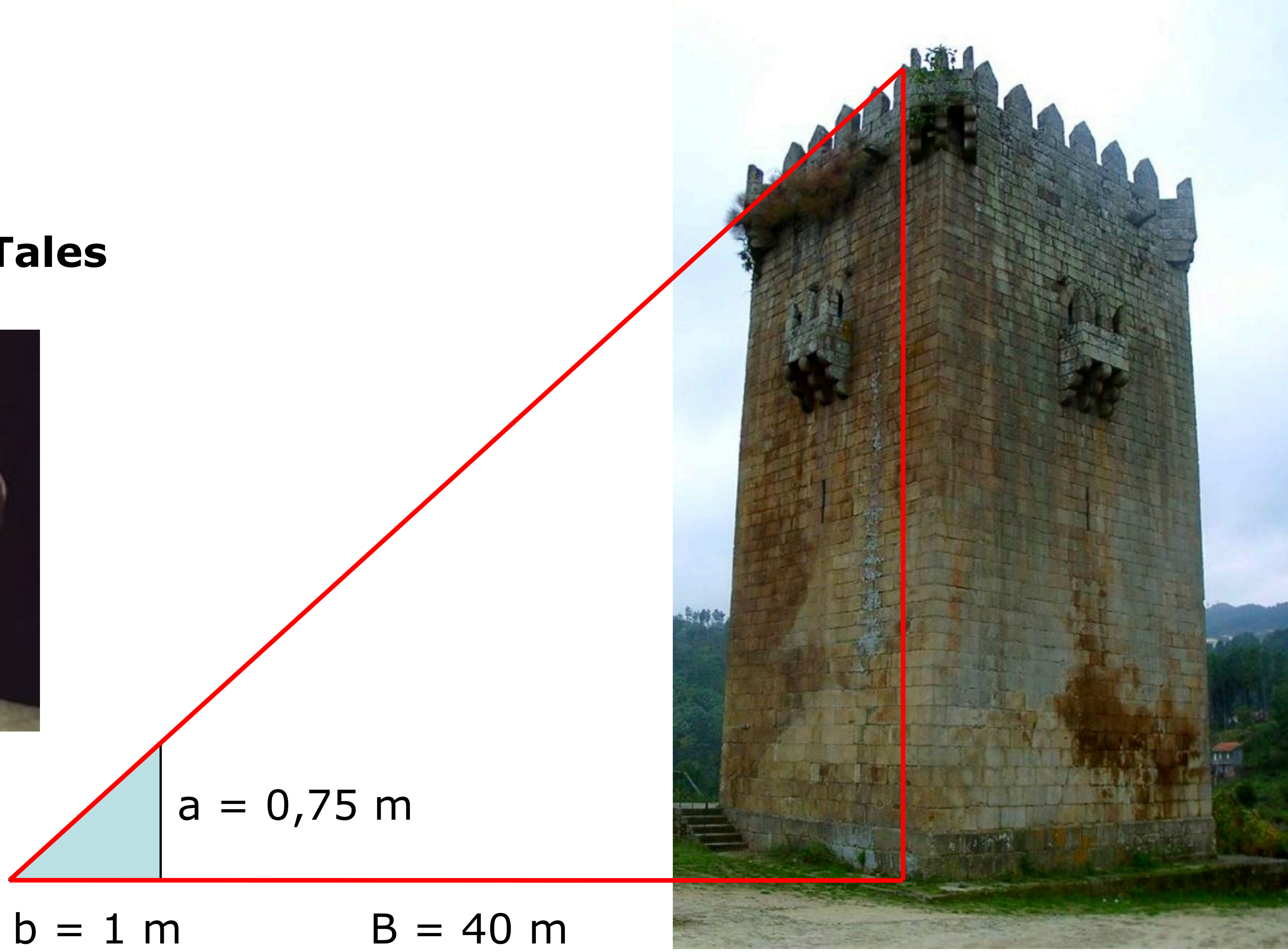


$$\frac{a}{c} = \frac{A}{C} \qquad \frac{b}{c} = \frac{B}{C} \qquad \frac{b}{a} = \frac{B}{A}$$

Teorema de Tales

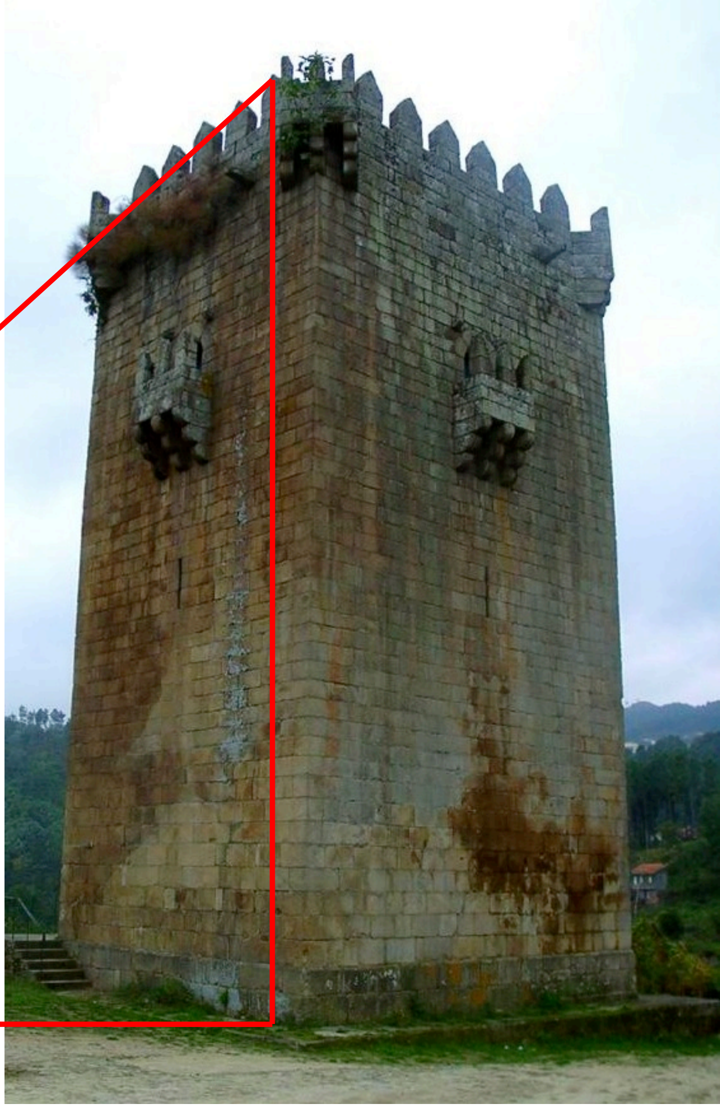


Tales de Mileto
(séc. VI a.C.)

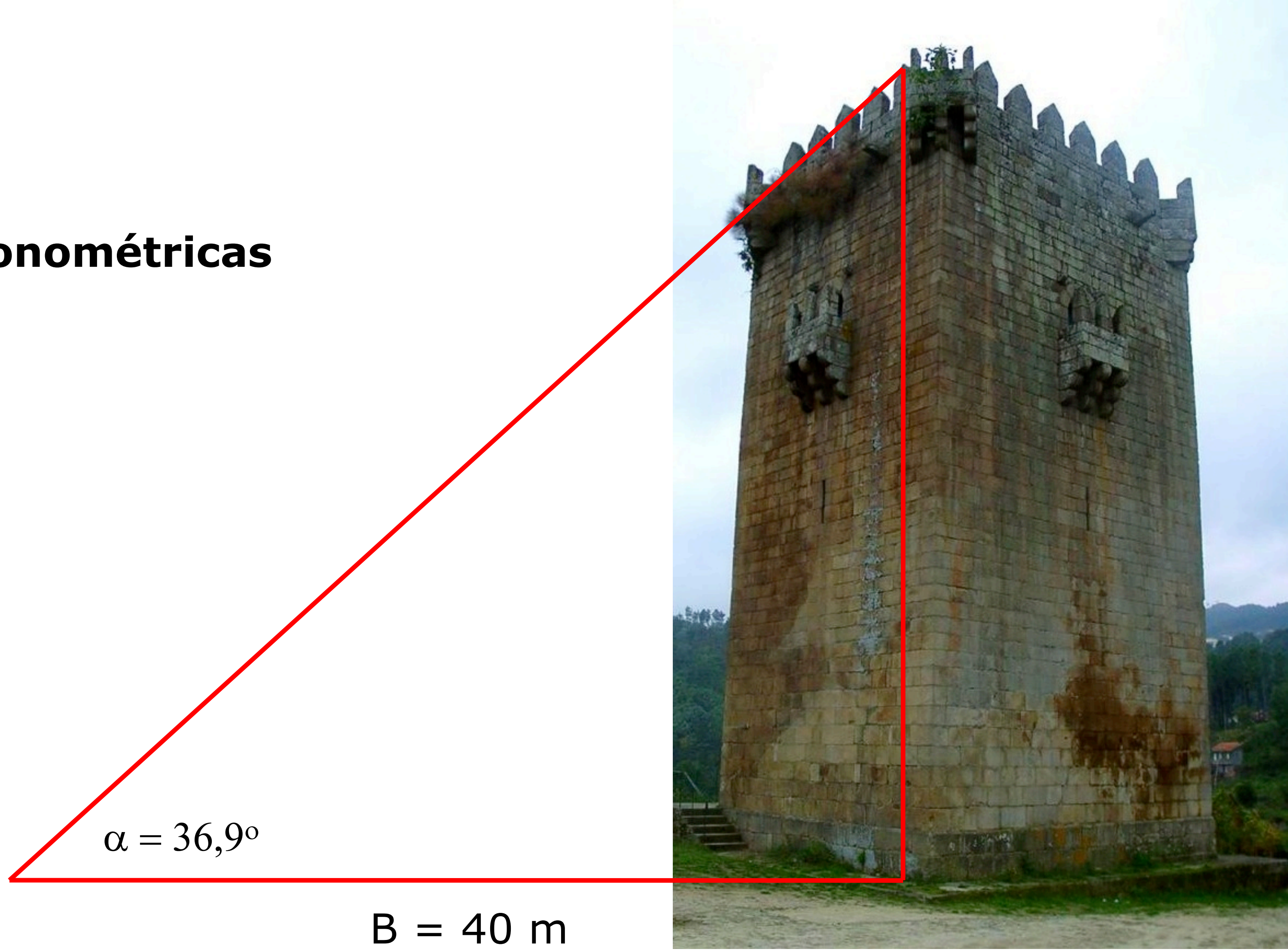


$$A = 40 \times 0{,}75 = 30 \text{ m}$$

Funções trigonométricas



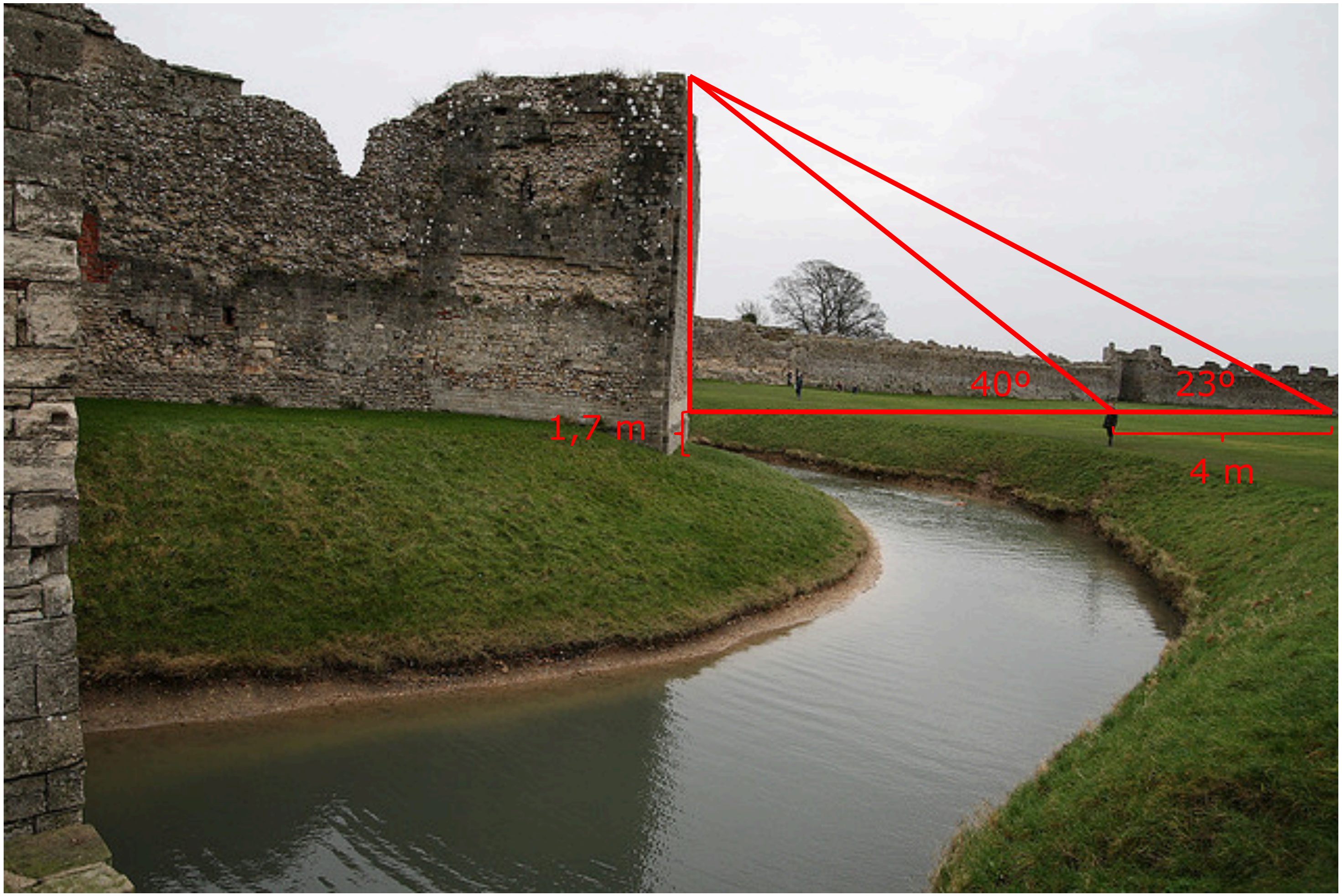
Funções trigonométricas



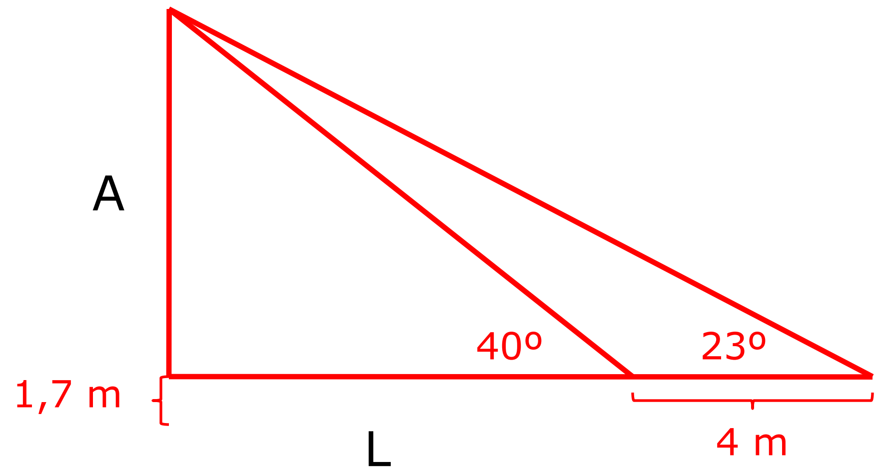
A = 40 x tan(α) = 30 m

Como medir a altura do castelo e a largura do fosso?

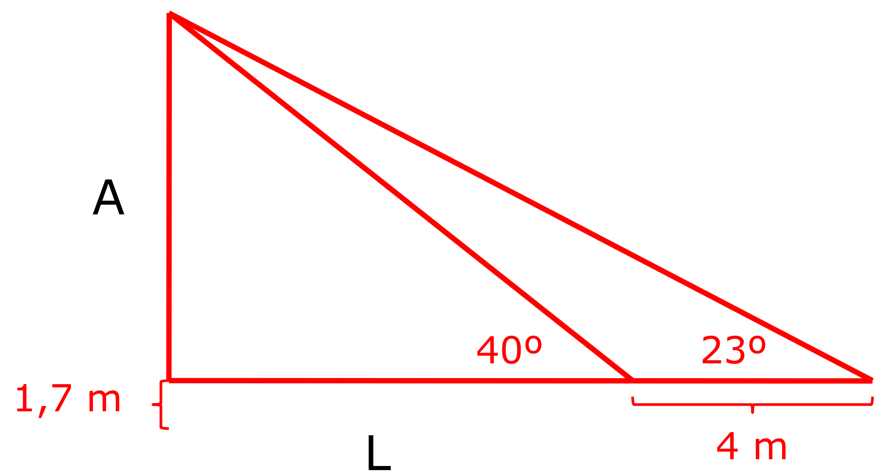
Como medir a altura do castelo e a largura do fosso?



Determine a altura do castelo e a largura do fosso.

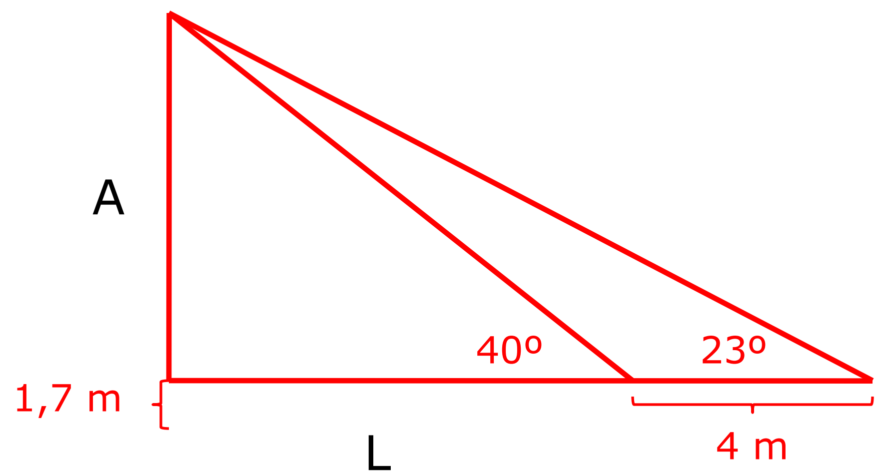


Determine a altura do castelo e a largura do fosso.



$A = \tan(40^{o})\ L = 0{,}84\ L$

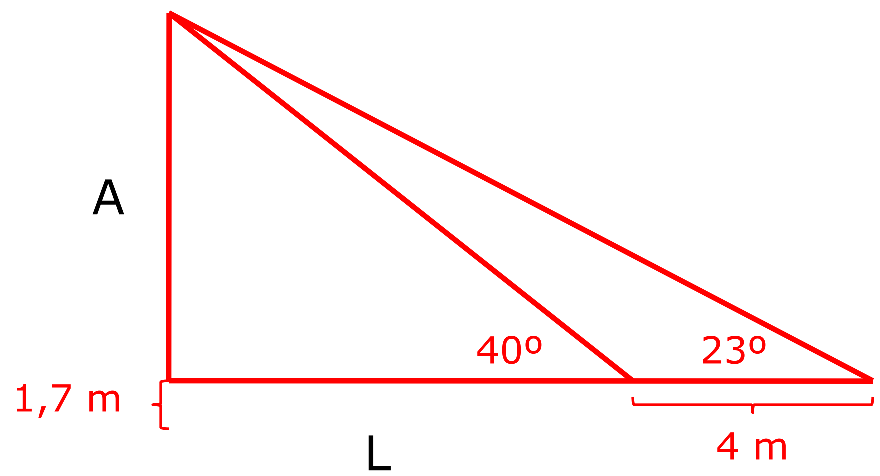
Determine a altura do castelo e a largura do fosso.



A = tan(40º) L = 0,84 L

A = tan(23º) (L+4) = 0,42 (L+4)

Determine a altura do castelo e a largura do fosso.



L = 4 m

Altura = A + 1,7 m = 0,84 L +1,7 m= 5,06 m

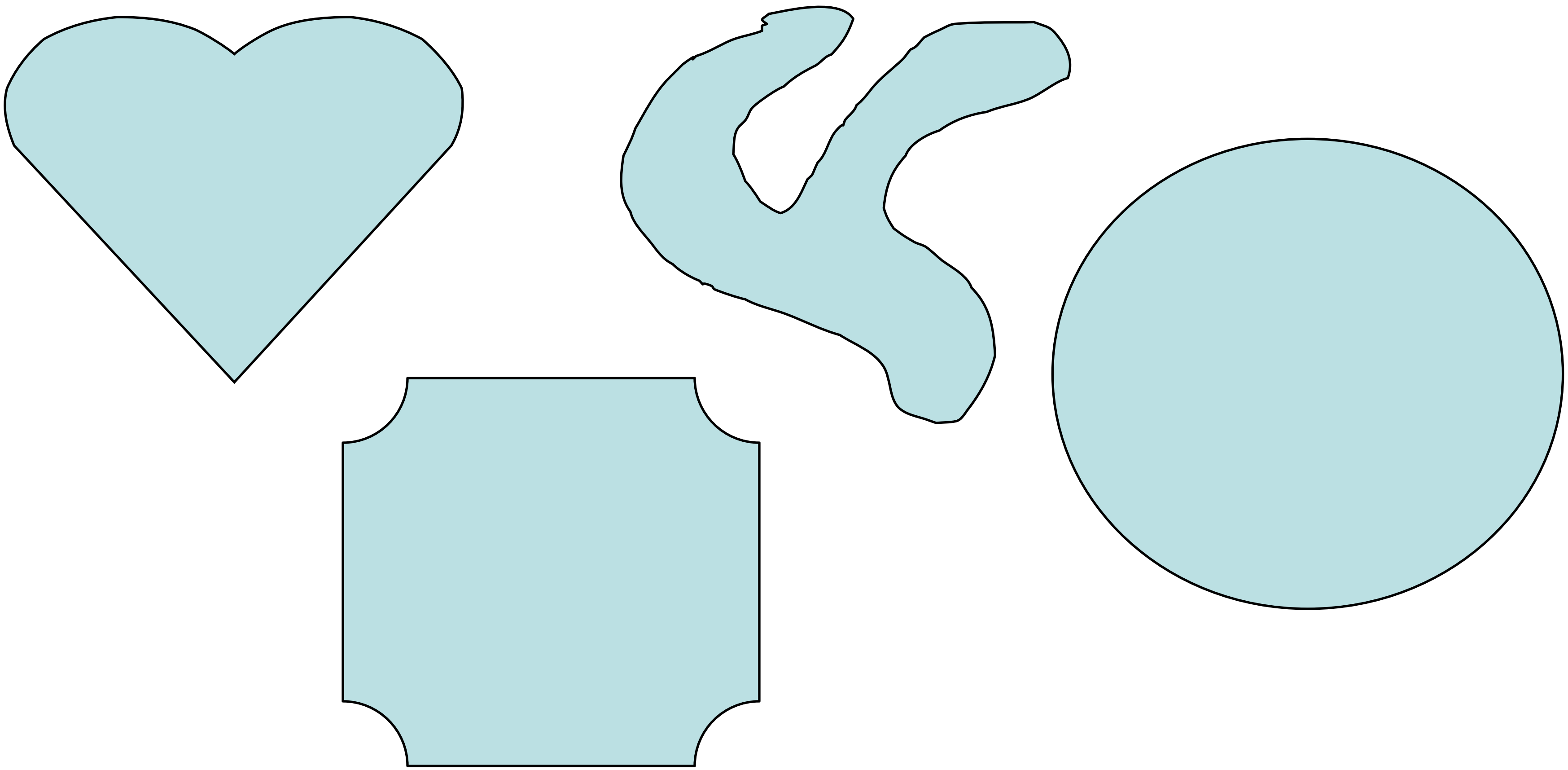
Questão 2: Qual a vantagem das formas simétricas?

Vamos supor que pretendemos construir uma paliçada e temos à nossa disposição um número finito de paus. Queremos uma vedação com área o maior possível, pois é necessário que o forte albergue o maior número possível de pessoas.

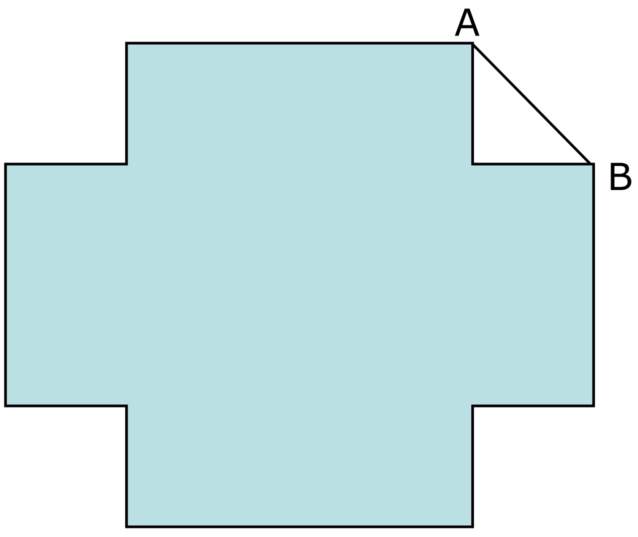
De entre as curvas simples, fechadas, do plano, com um determinado comprimento, qual é a que delimita a maior área possível?

Jakob Steiner
(1796-1863)

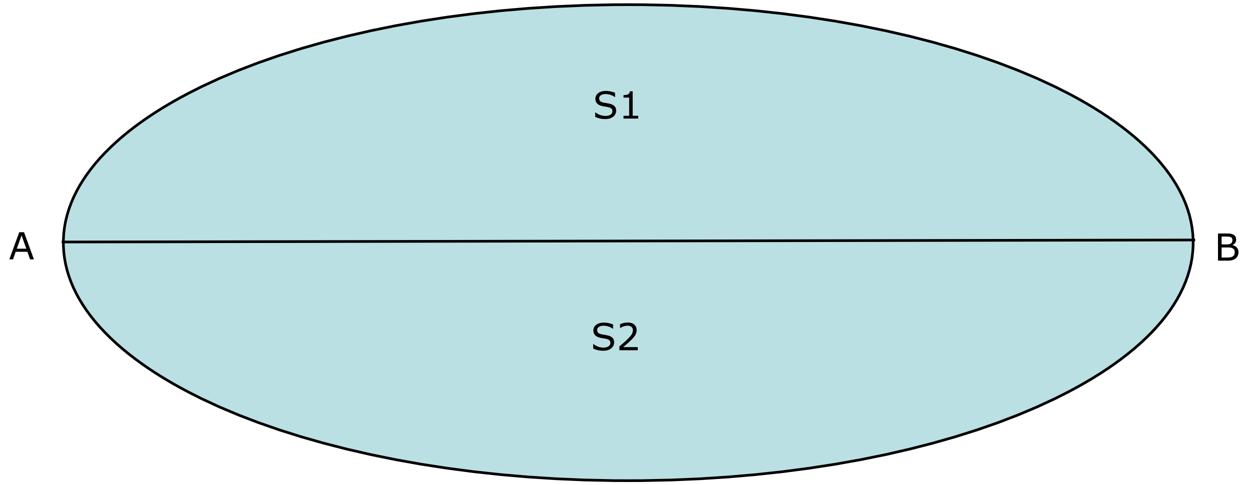
Vamos supor que o conjunto máximo *S* existe.



O conjunto máximo deve ser convexo.

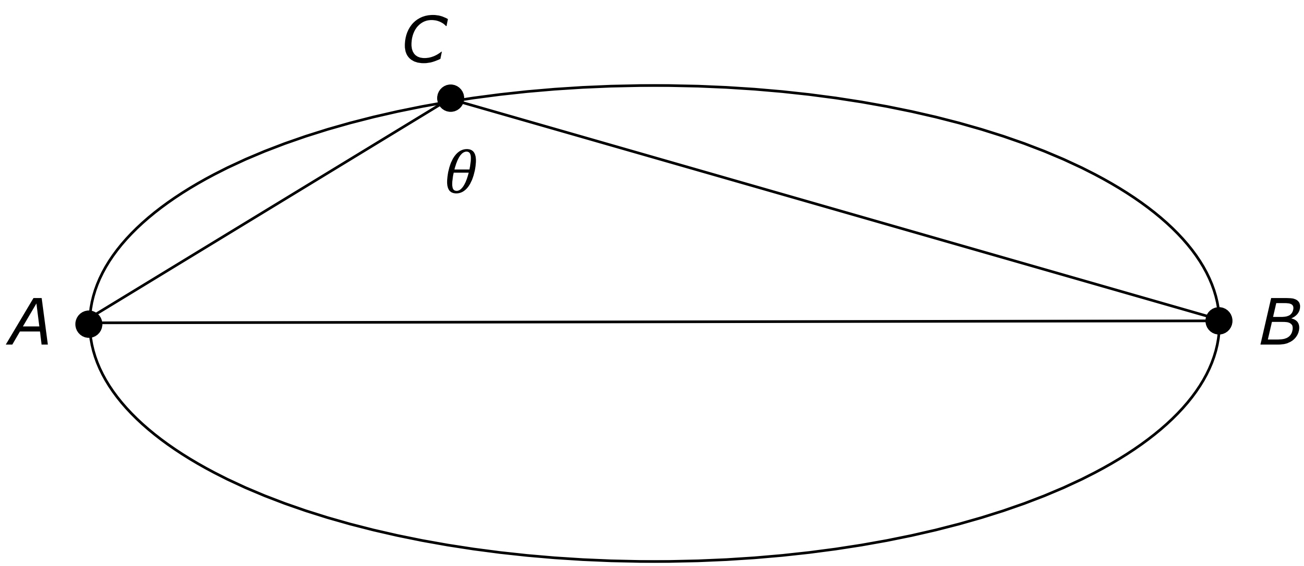


Qualquer diâmetro do conjunto máximo divide a área em duas partes iguais.

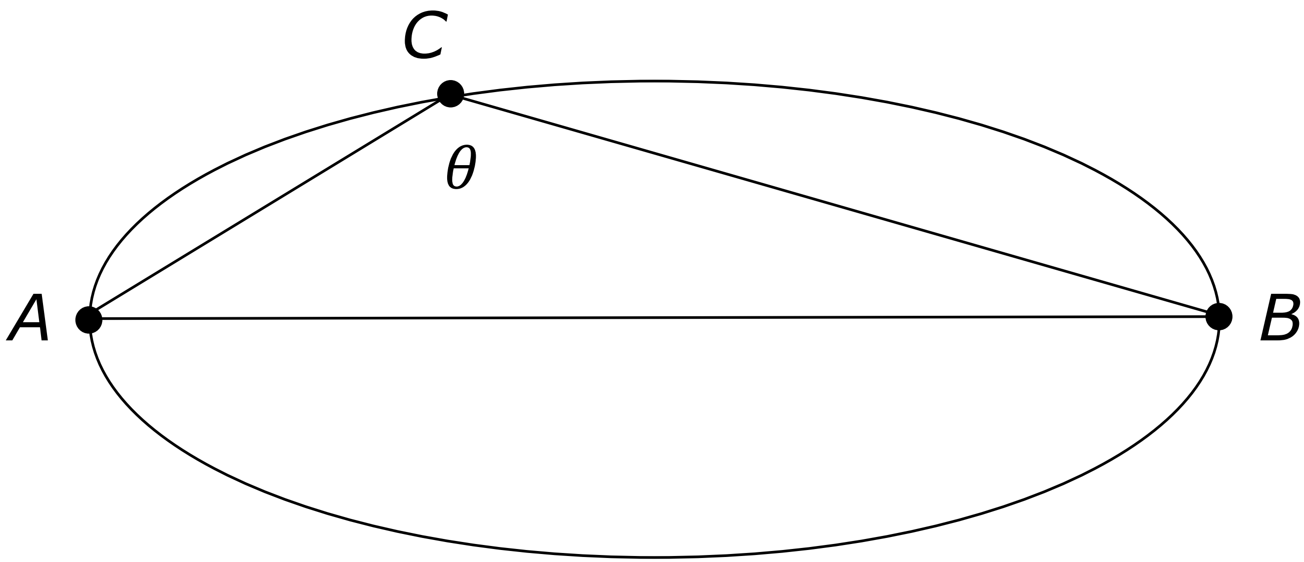


Problema de Dido: O conjunto máximo é o círculo.

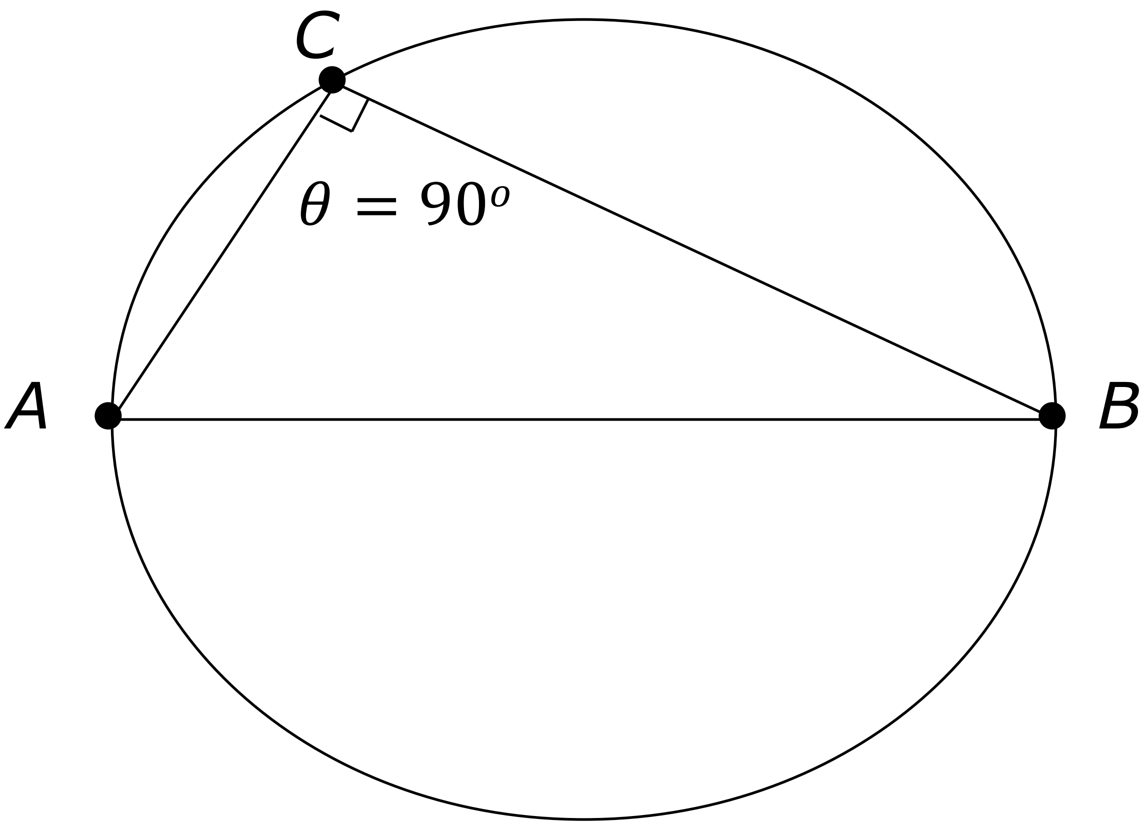
Se A e B forem dois pontos em lados opostos de um diâmetro e C um ponto qualquer da curva, então o ângulo α mede exactamente 90º.

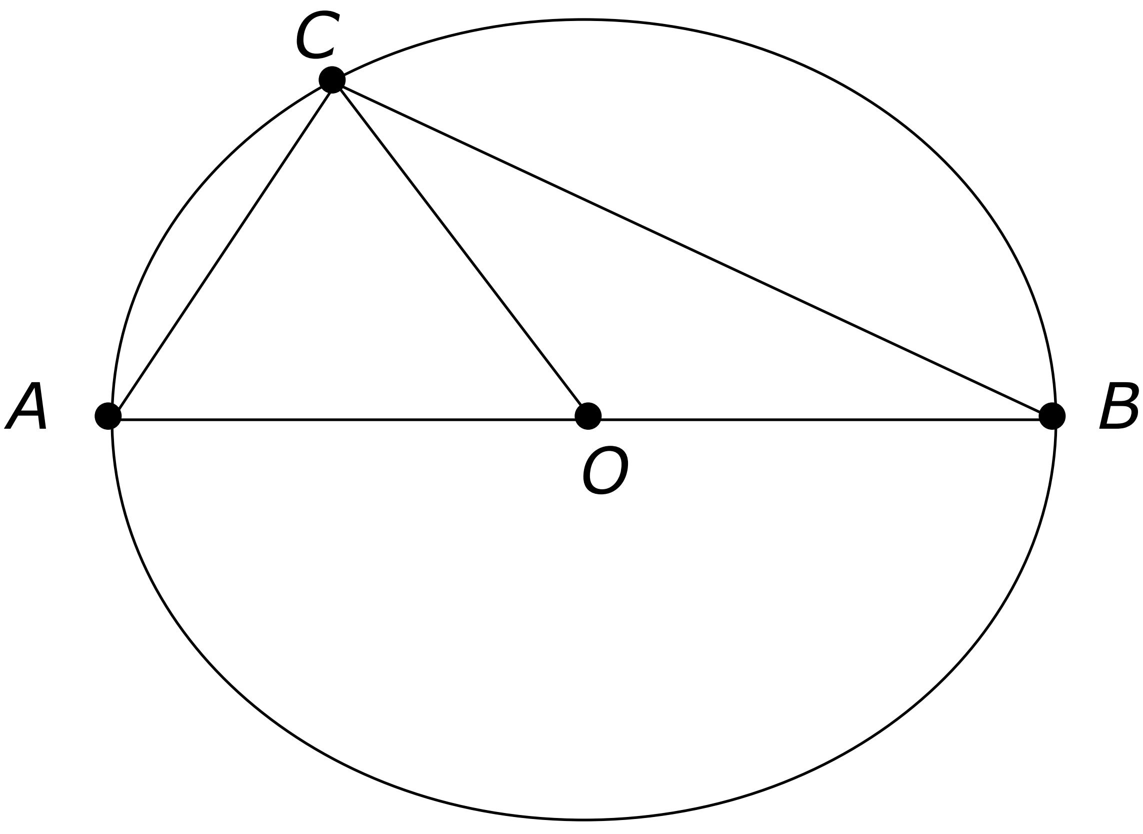


Se A e B forem dois pontos em lados opostos de um diâmetro e C um ponto qualquer da curva, então o ângulo α mede exactamente 90º.

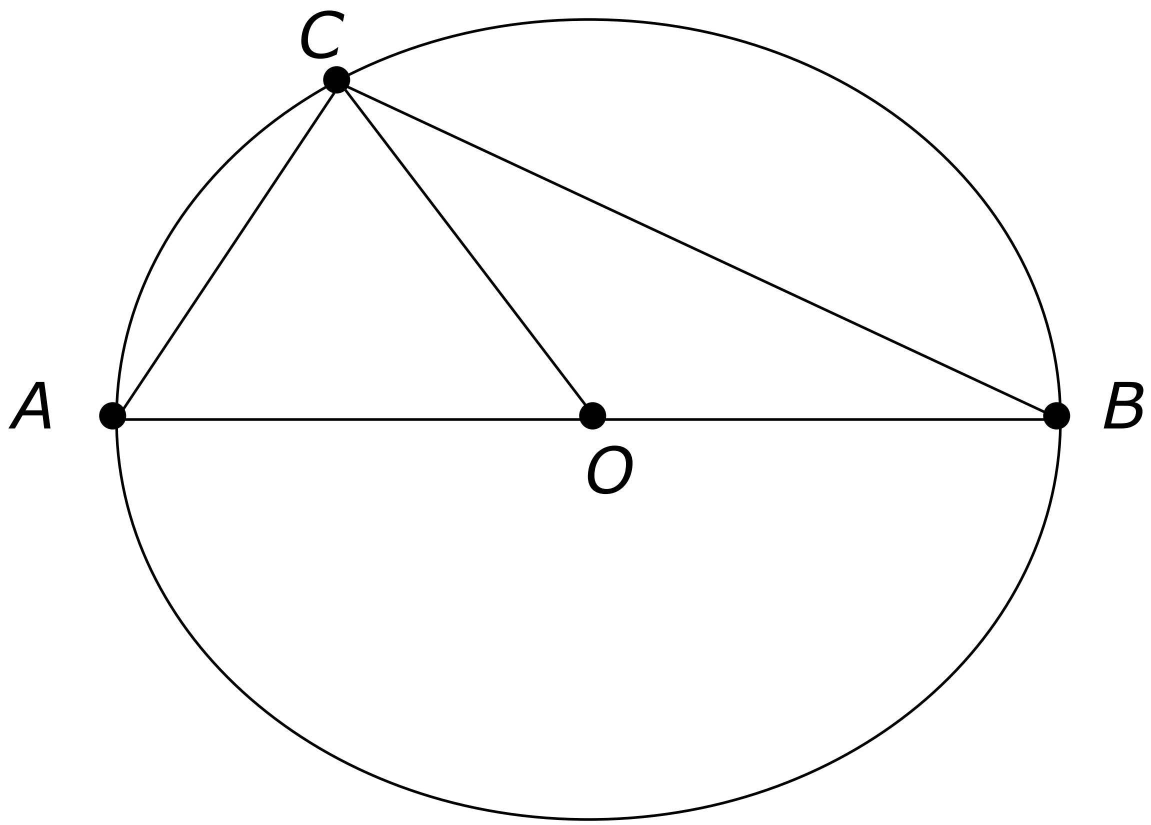


Área de um triângulo: $A_{\Delta} = \frac{1}{2}\overline{AC}\;\overline{CB}\;\sin\theta$

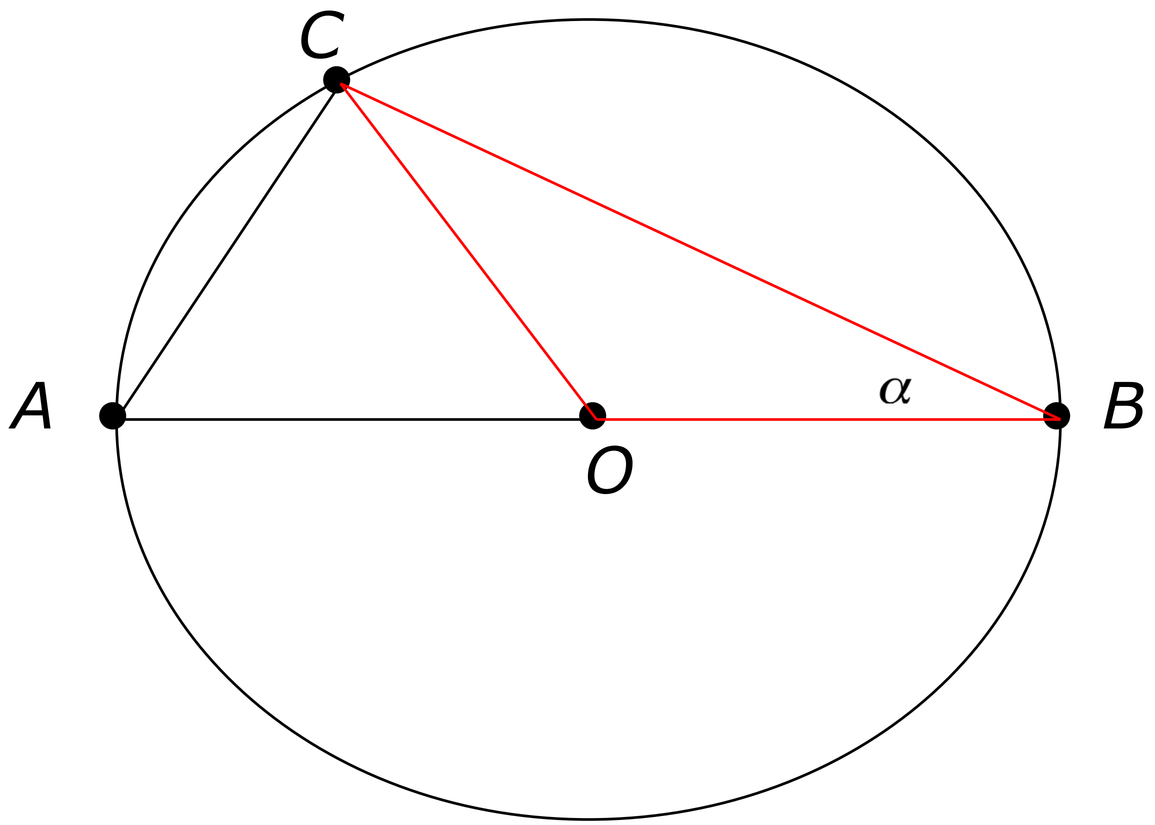

C
$\theta = 90^o$
A
B

C
A
O
B

Mostre que $\overline{OC} = \overline{B0}$.

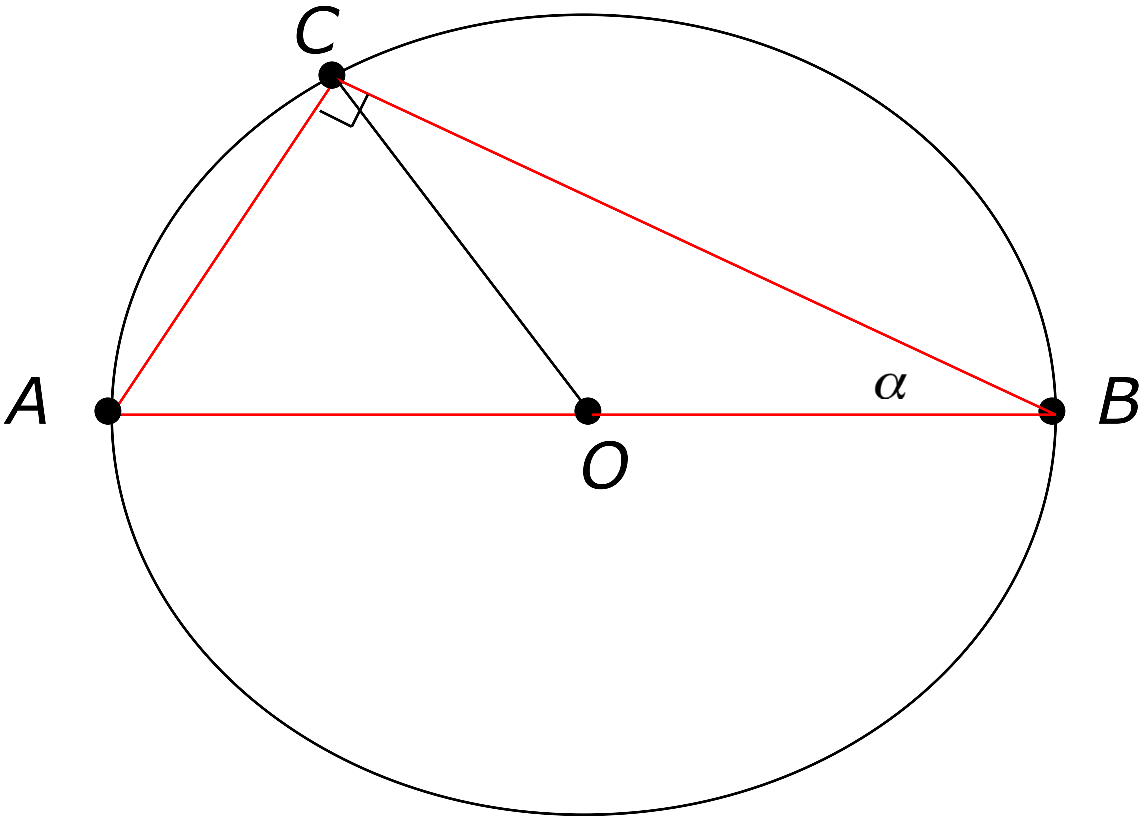


Mostre que $\overline{OC} = \overline{B0}$.



Teorema de Carnot: $\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{B0}^2 - 2\overline{BC}\;\overline{BO}\;\cos\alpha$

Mostre que $\overline{OC} = \overline{B0}$.



Teorema de Carnot: $\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{B0}^2 - 2\overline{BC}\ \overline{BO}\ \cos\alpha$

Questão 3. Como defender a entrada de um castelo?

Uma entrada melhor é aquela que obriga o atacante a permanecer muito tempo próximo da linha de defensiva se quiser entrar na fortificação.

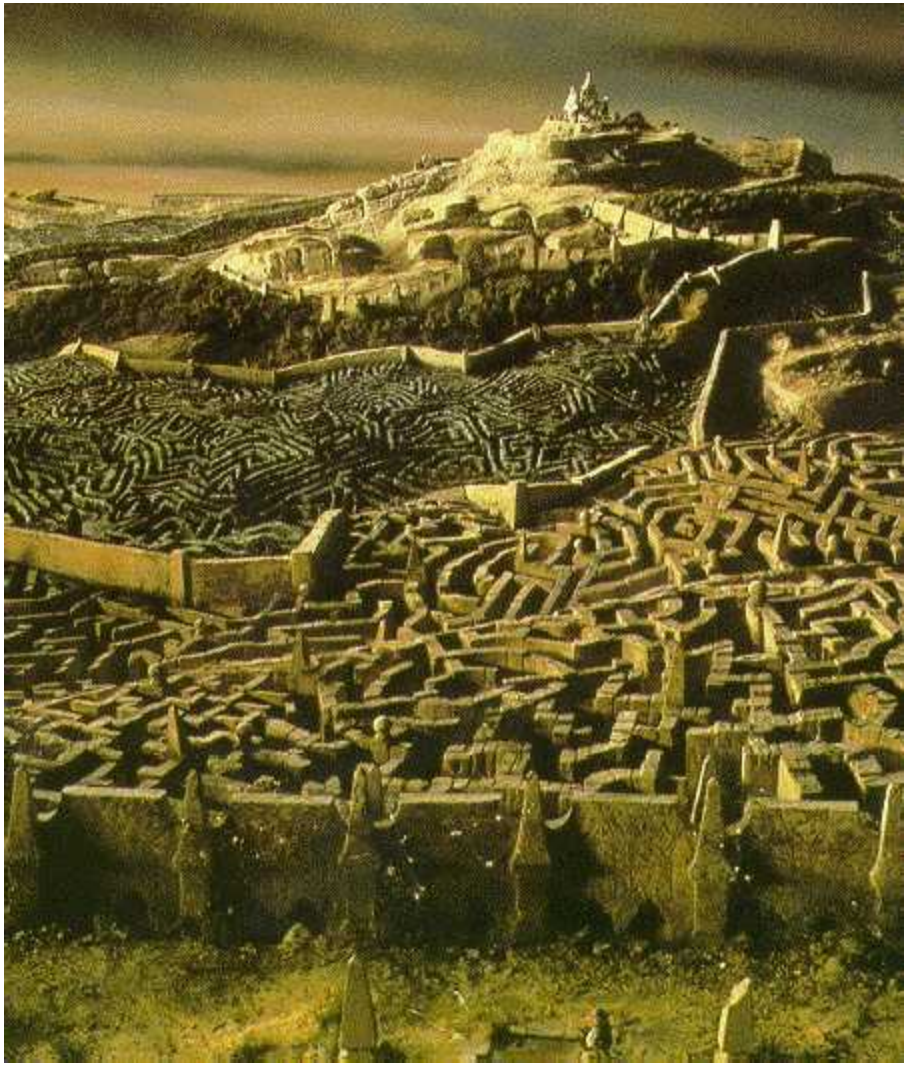
Josué 6:3 Dai uma volta em torno da cidade, vós e todos os homens de guerra. Fareis isso durante seis dias.

Cidade de Jericó

Um processo efectivo pode ser o de criar entradas em forma de labirinto.

Meiden Castle, Reino Unido

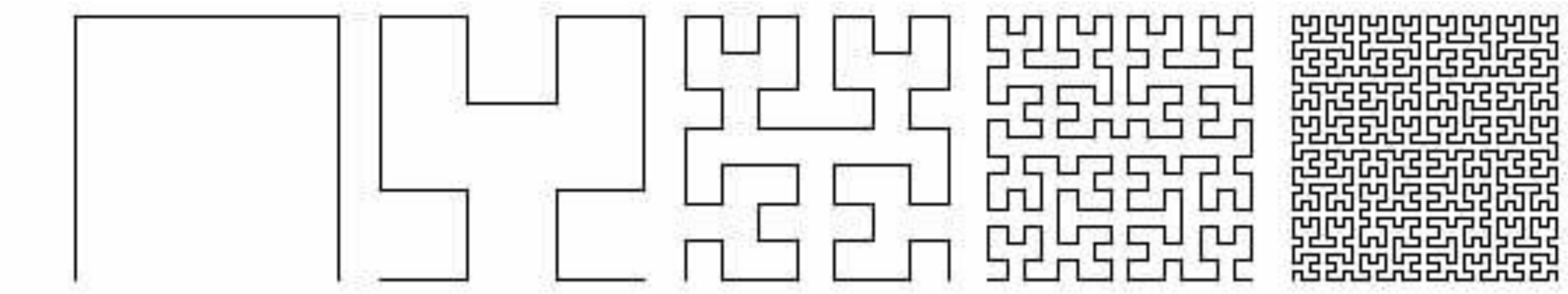
Fixada uma determinada área, como desenhar curvas com um grande perímetro?



Do filme "Labyrinth", Jim Henson, 1986

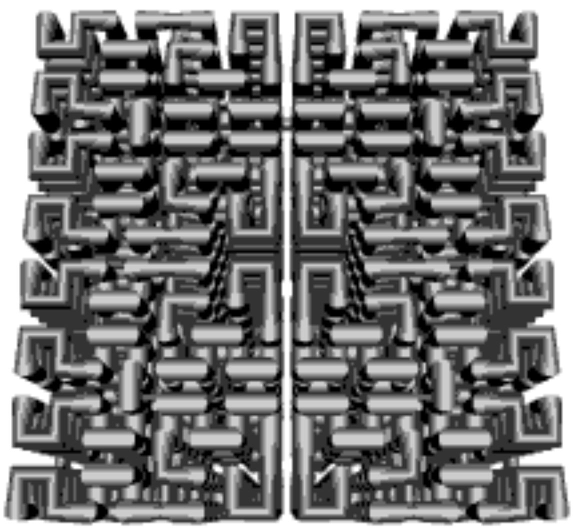
Curva de Hilbert

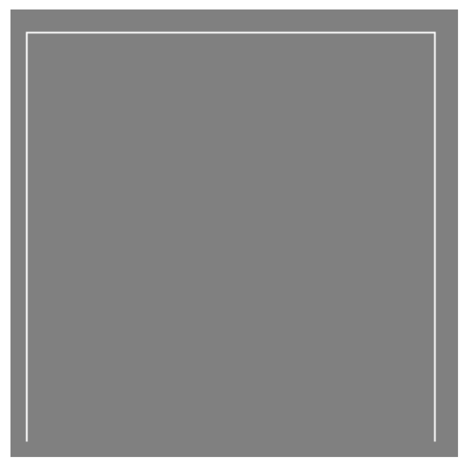
David Hilbert
(1862-1943)



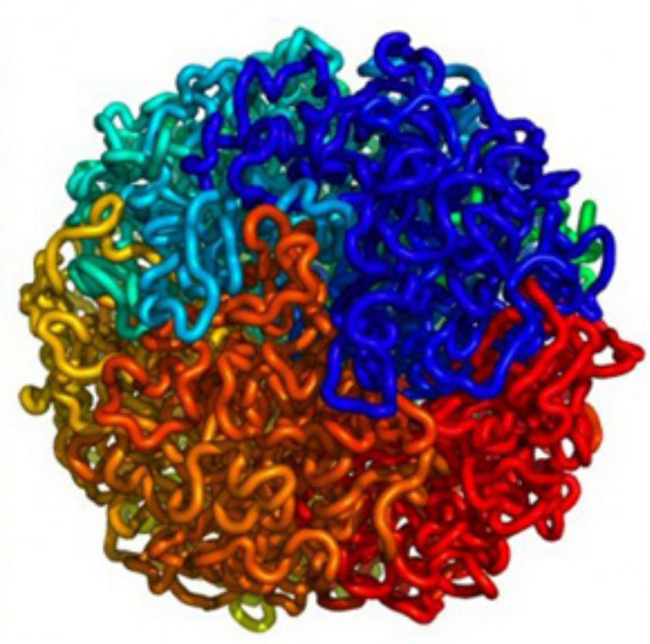
Curva de Hilbert

David Hilbert
(1862-1943)



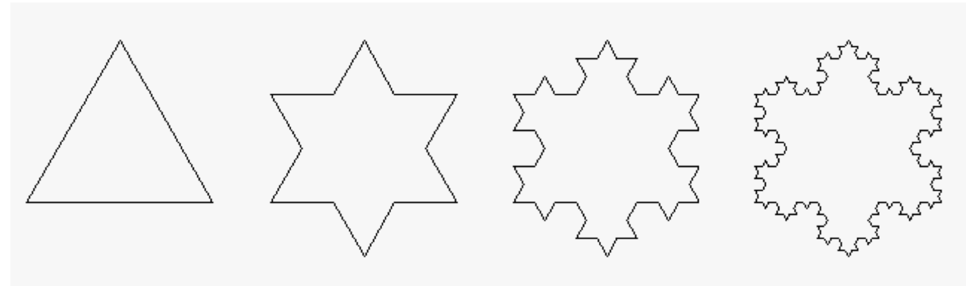


Curva de Hilbert



David Hilbert
(1862-1943)

Floco de Neve de Koch



Mostre que o perímetro total *P* da estrela é 4*L* a a sua área é

$$A = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}\left[1+\frac{1}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}L^2}{3}.$$

Mostre que o perímetro total P=16L/3 e que a sua área é

$$A = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)\right].$$

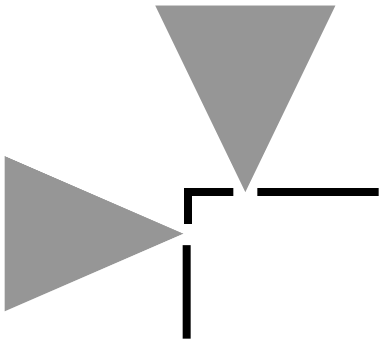
Mostre que figura fractal (*Floco de Neve de Koch*), a sua área é

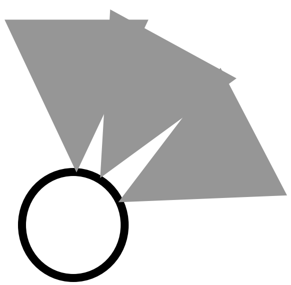
$$A = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots\right)\right] = \frac{2\sqrt{3}L^2}{5}.$$

Questão 4: Como é que a evolução da forma permitiu melhorar a segurança?

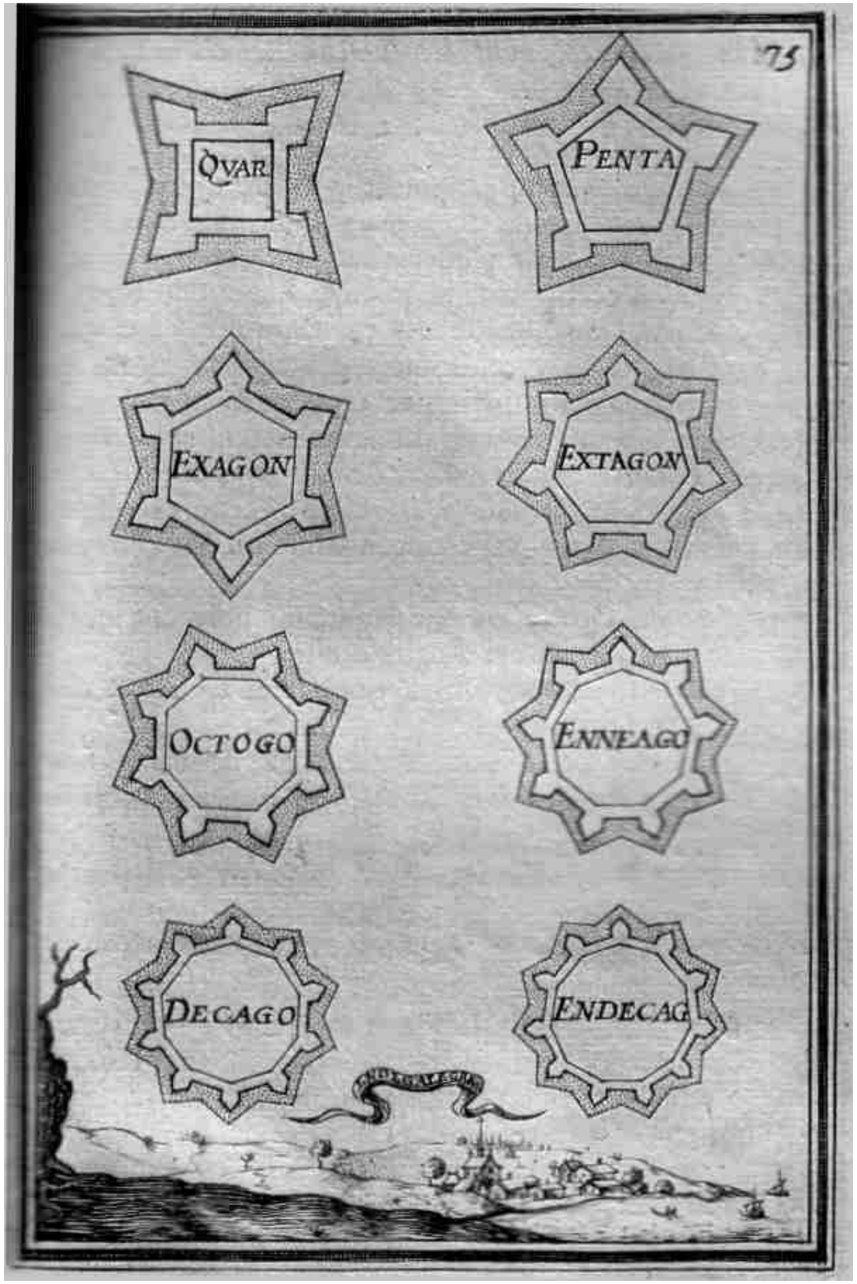
Como defender as muralhas?

Blarney Castle, Reino Unido





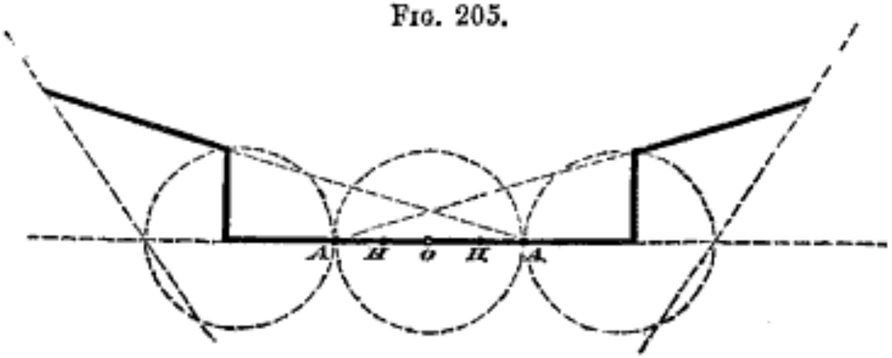
Harlech, Escócia



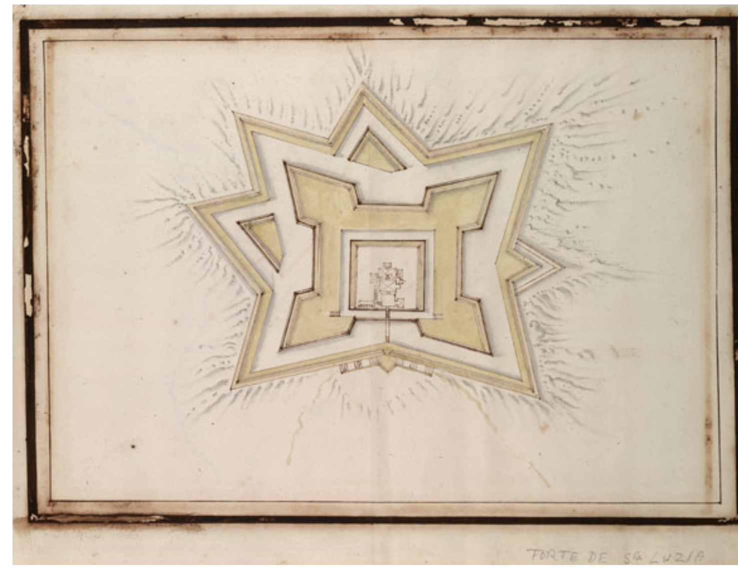
Sébastien Le Prestre, marquês de Vauban (1633-1707)

(187) The *Italian System*, due to San Micheli de Verona (1528), is the most ancient. The front is divided into six equal parts; the flanks are perpendicular to the

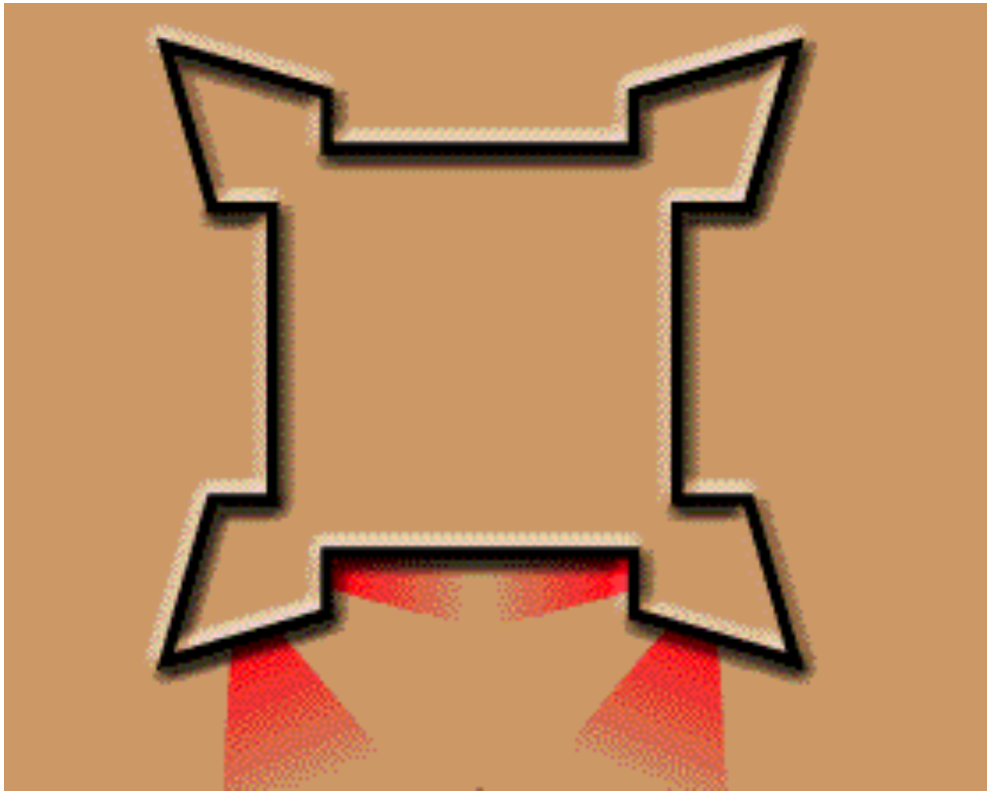
Fig. 205.



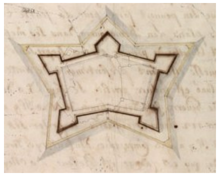
curtain, and equal to one of these parts. (Fig. 205.) The faces are obtained by joining the extremities of the flanks to *A* for the hexagon, to *O* for the heptagon, and to *H* for the octagon. Castrioto, in 1584, adopted a tracing very similar to the 2nd or 3rd of Vauban.



Elvas, Portugal



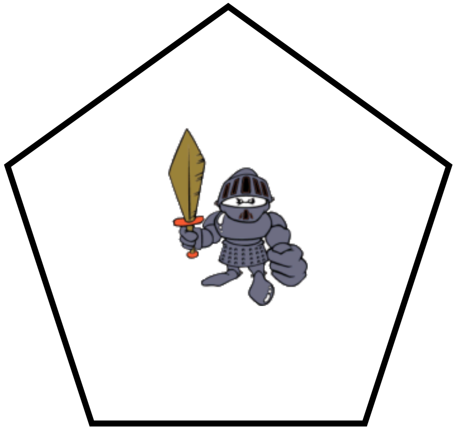
Questão 4. Como defender o interior de um castelo?



Qual a vantagem de desenhar as escadas em espiral no sentido horário?

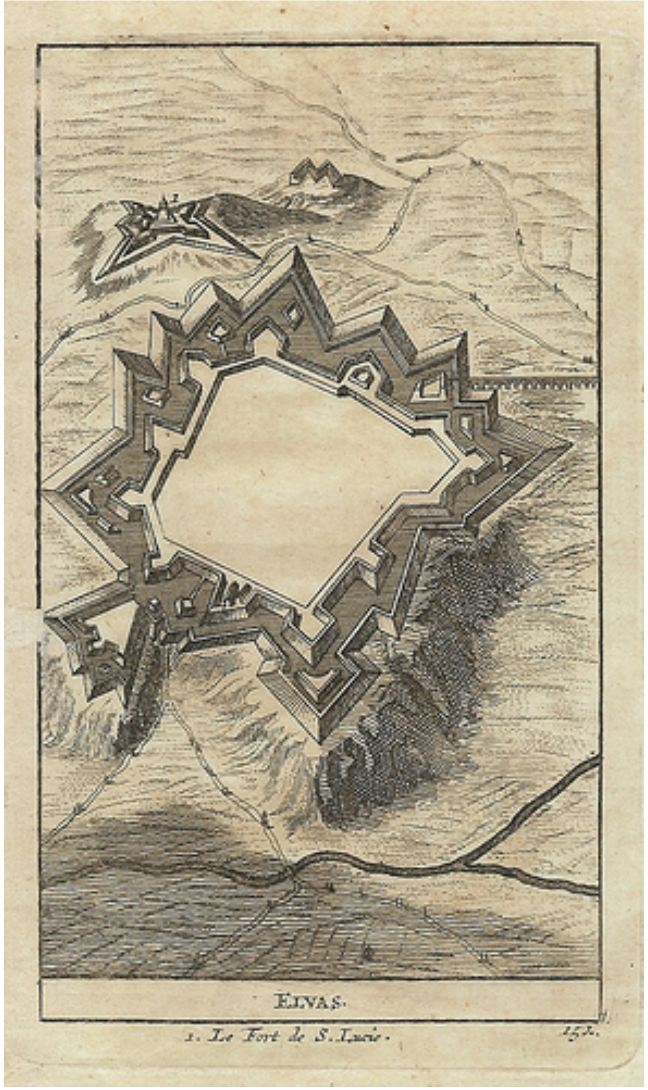
Dover, Reino Unido

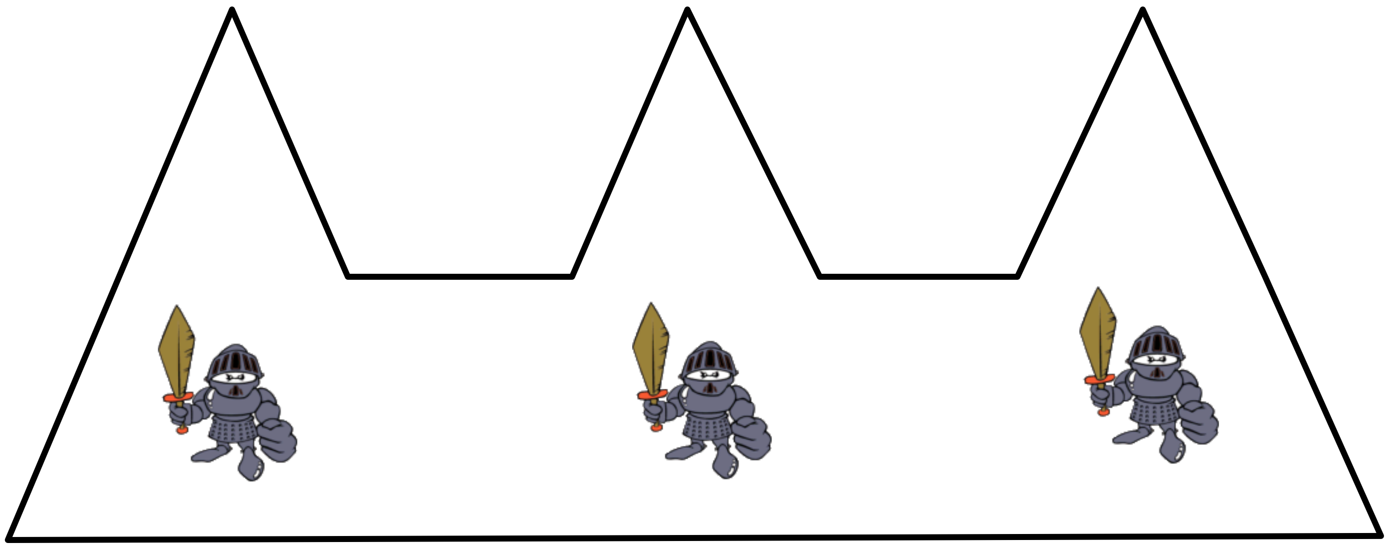
Quantos guardas são necessários para defender o interior dum castelo?



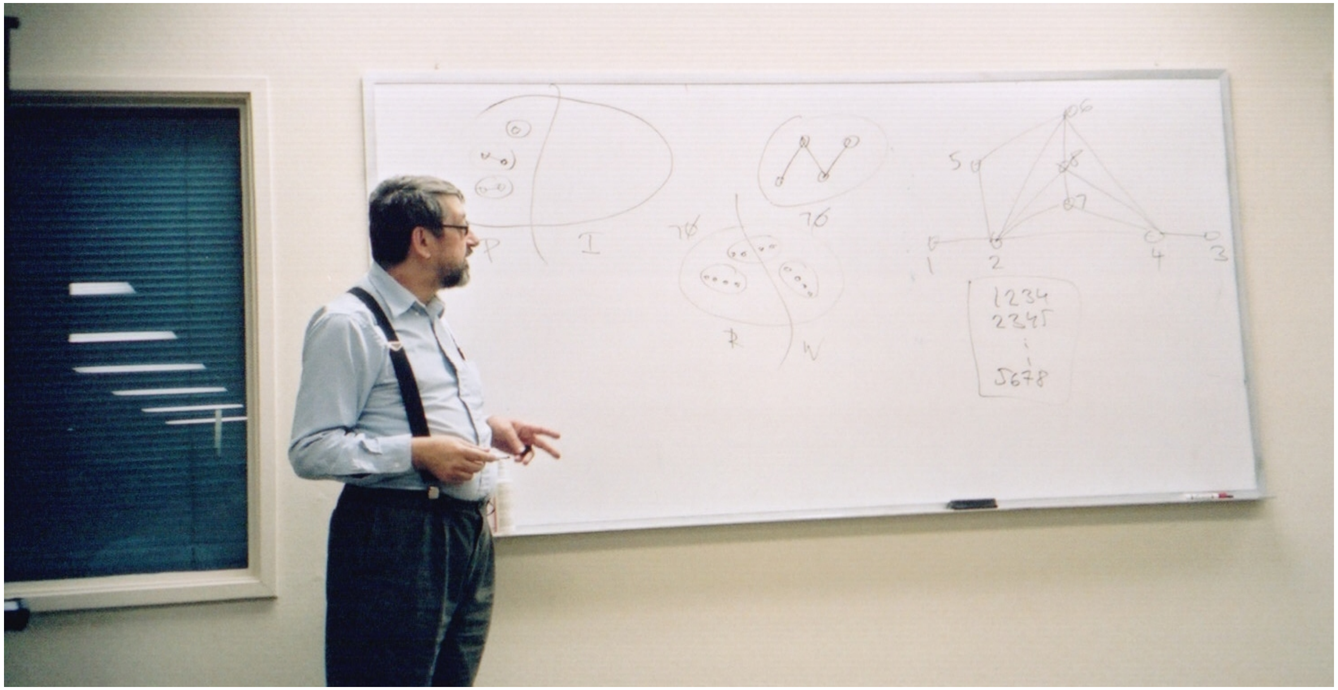
Se a planta do castelo for convexa basta um guarda.

E se a planta do castelo possuir concavidades?



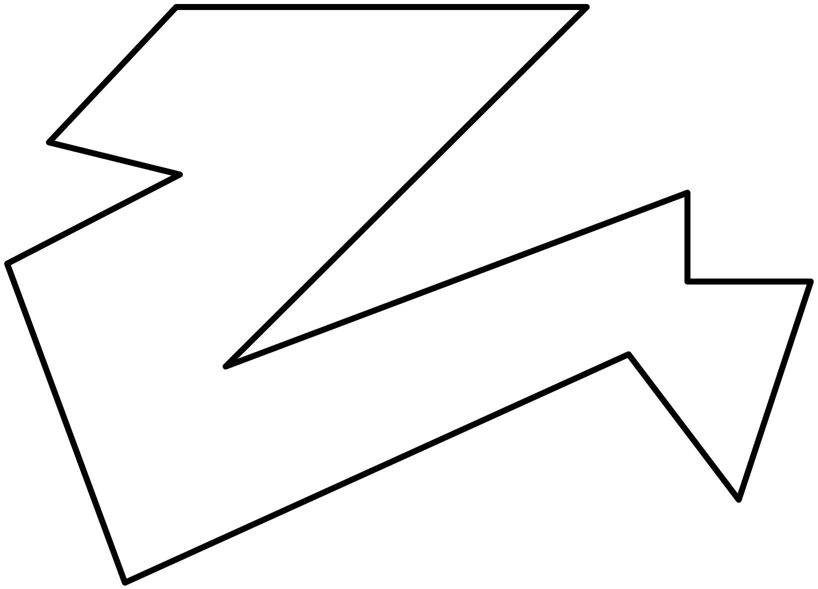


Teorema de Chvátal (1975): Para qualquer castelo com *n* paredes são necessários [*n*/3] guardas.

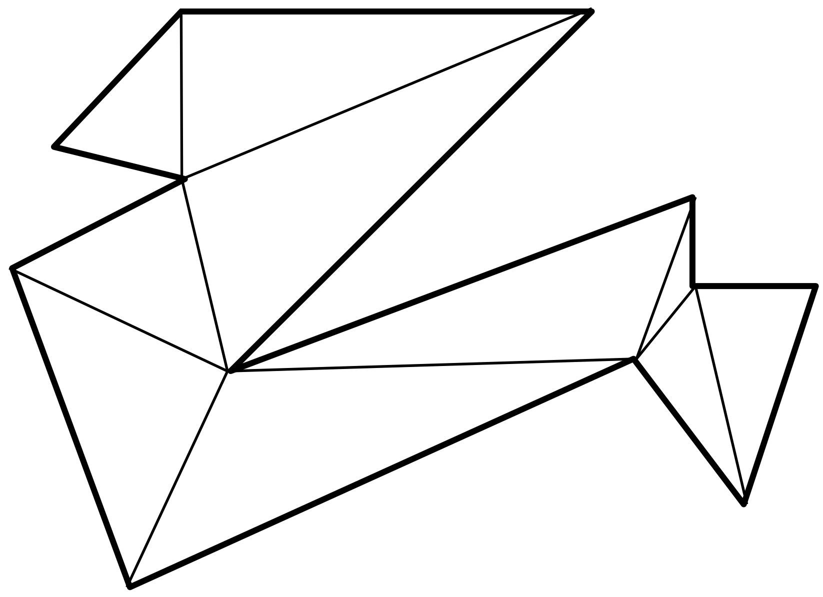


Vašek Chvátal

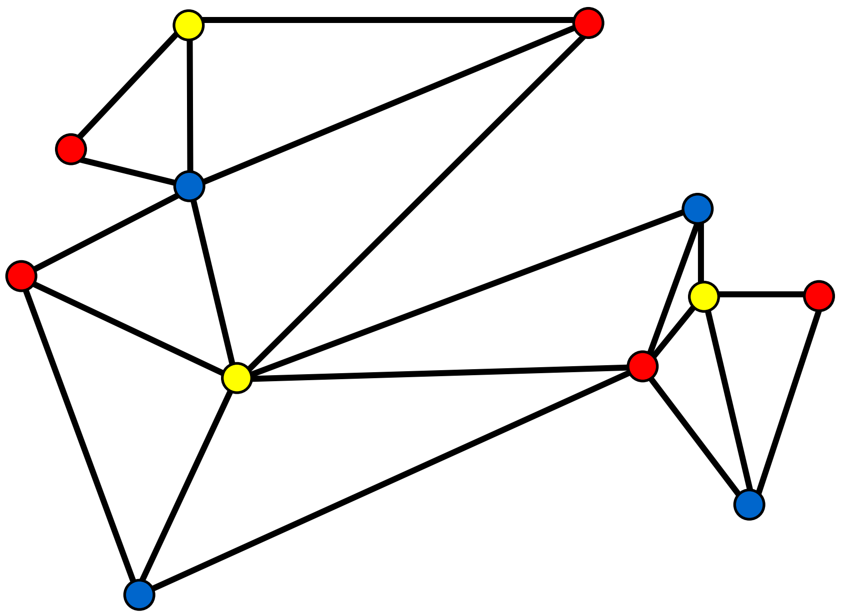
Qualquer figura poligonal plana, simples, com *n* vértices admite uma triangulação (sem a inclusão de vértices adicionais) com *n-2* triângulos.



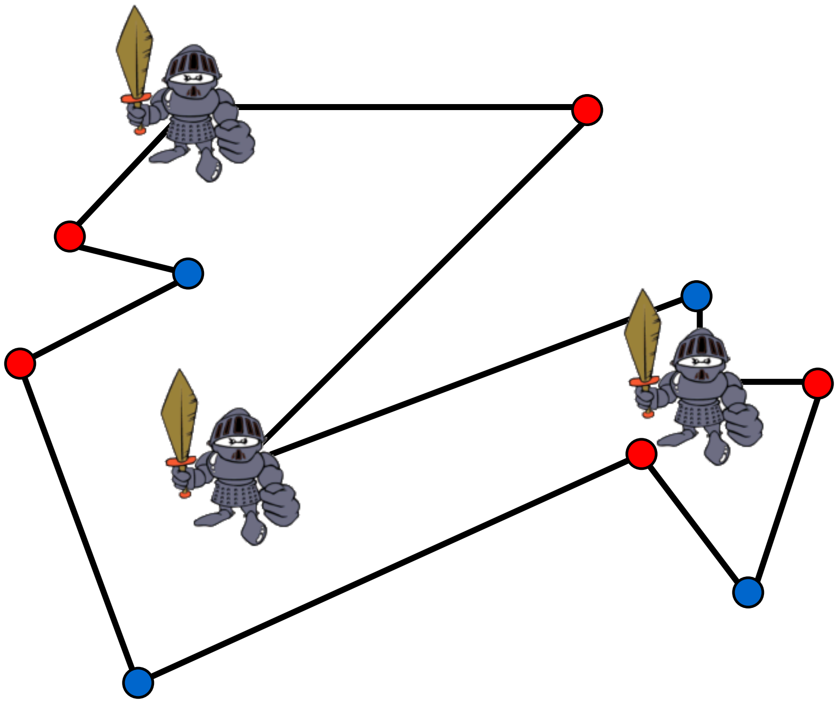
Consideremos *n*-3 diagonais que se não intersectam.



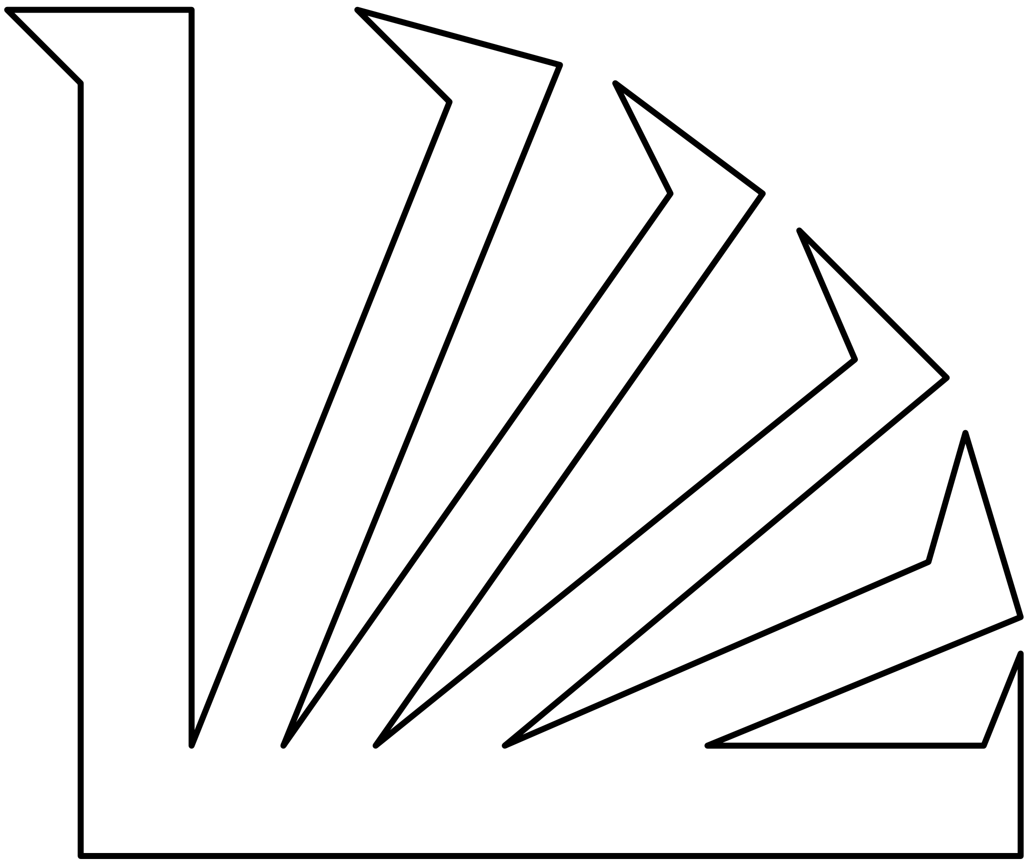
Os vértices do polígono podem ser coloridos apenas com três cores sem que ocorram vértices com a mesma cor unidos por uma aresta.



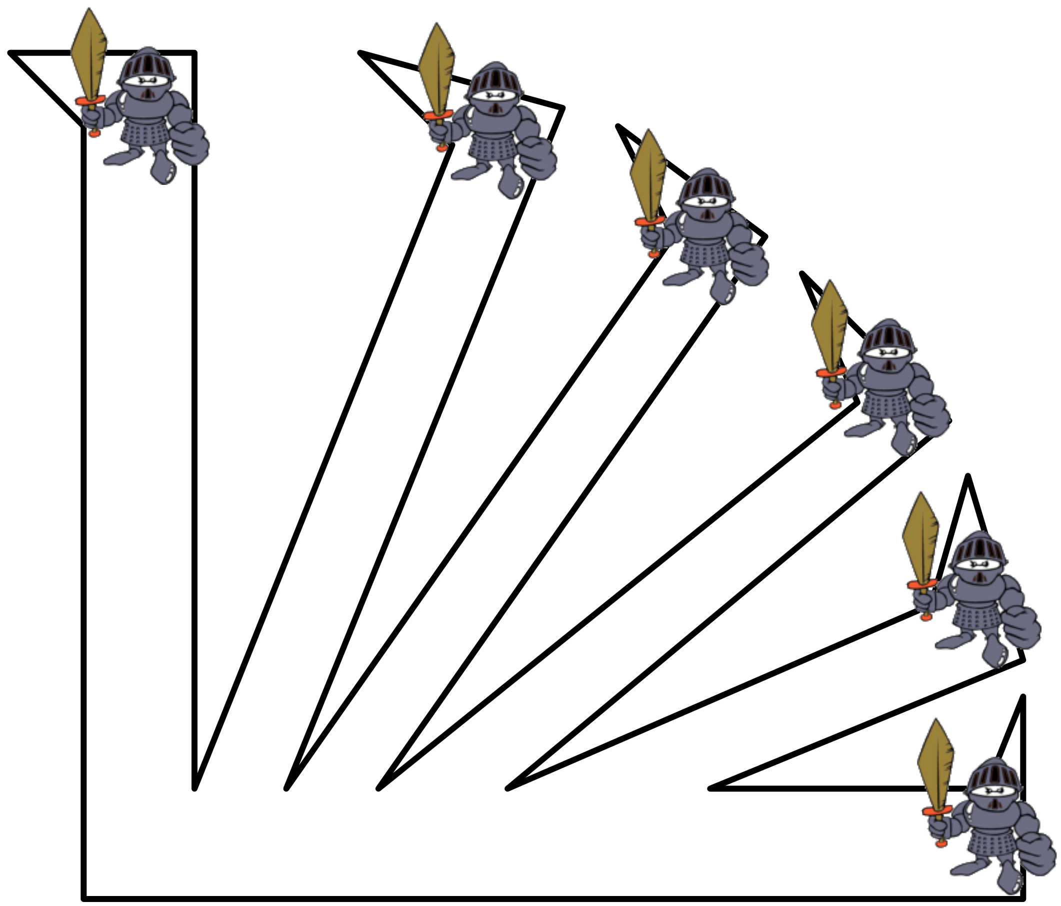
Visto que existem *n* vértices, pelo menos uma das três cores é usada para colorir [*n*/3] vértices e é nesses vértices que devemos posicionar os guardas.



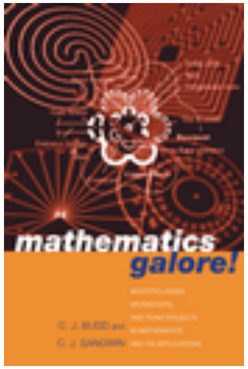
Quantos guardas são necessários para defender o interior dum castelo, supondo que um guarda pode andar ao longo de uma parede?



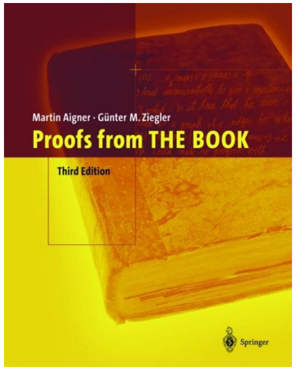
Conjectura [Toussaint (1981)]: [n/4] guardas são suficientes em todas as circunstâncias, sendo n o número de paredes.



Referências



C.J. Budd & C.J. Sangwin
"Mathematics Galore!"
Oxford UP, 2001



M. Aigner & G.M. Ziegler
"Proofs from THE BOOK"
Springer, 2003

http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/castelos/