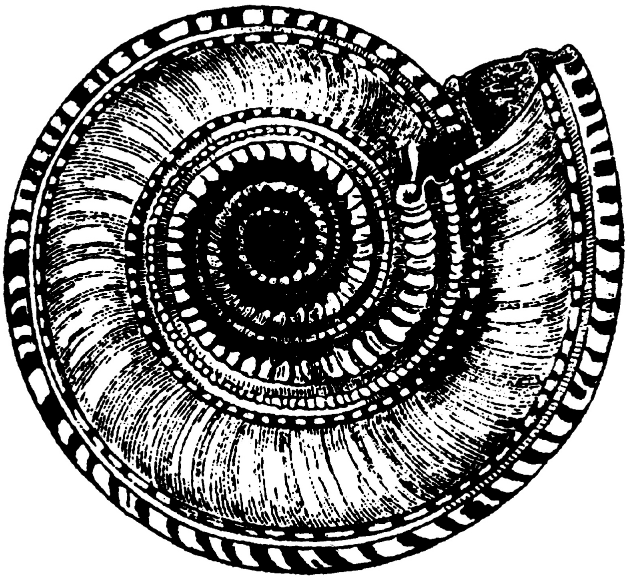

Biomatemática

Adérito Luís Martins Araújo

Notas de apoio às aulas de Matemática do Mestrado Integrado em Ciências Farmacêuticas e de Biomatemática da Licenciatura em Farmácia Biomédica, da Faculdade de Farmácia da Universidade de Coimbra, no ano lectivo de 2012/2013.

· U C ·

FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Conteúdo

Capítulo 1

Funções reais de variável real

1.1 Definição de função

Fenómenos naturais, como o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a acção do calor, a passagem de uma corrente eléctrica num condutor, a germinação de uma semente, o exercício de direitos políticos pelos cidadãos, etc, são regidos, normalmente, por leis que podem ser de dois tipos: leis qualitativas ou leis quantitativas. Estes dois tipos de leis não podem ser rigidamente separados; a utilidade da distinção está em que a lei acentua, por vezes, um ou outro aspecto da realidade. Vejamos alguns tipos de leis.

Primeira lei de Johannes Kepler (1571–1630). Cada planeta descreve, em torno do Sol, uma elipse da qual o Sol ocupa um dos focos.

Lei da gravitação de Isaac Newton (1642–1727). Entre dois corpos desenvolve-se uma força atractiva que é directamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.

Primeira lei da Psicologia Funcional de Édouard Claparède (1873–1940). Toda a necessidade tende a provocar reacções próprias e dar-lhes satisfação.

Lei da queda dos graves de Galileu Galilei (1564–1642). Para todo o corpo em queda livre no vácuo, as alturas de queda são inversamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda.

Destas quatro leis, a primeira e a terceira podem ser consideradas leis qualitativas, enquanto que a segunda e a quarta são consideradas leis quantitativas.

Na maioria das leis, o tipo dominante, é qualitativo ou quantitativo? A história da ciência dá a essa pergunta uma resposta nítida: à medida que a realidade se vai conhecendo melhor, o primado tende a pertencer ao tipo quantitativo. Não é a ciência, no seu avanço, que tende a pôr de parte a qualidade. Isso seria absurdo, uma vez que as qualidades traduzem as relações de interdependência dos seres uns com os outros, e a interdependência é, precisamente, uma das características essenciais da realidade. Mas a ciência não se ocupa apenas a descrever, empreende também a tarefa de explicar e, nesta, há um facto que se impõe com uma força cada vez maior: para se obter as explicações para as variações de qualidade há que aprofundar o estudo das variações de quantidade.

É natural que, de coisa tão importante para o entendimento da realidade como é a lei quantitativa, surja também o conceito próprio para o seu estudo. Em que consiste, afinal, a lei? Na forma de correspondência entre conjuntos. Se, por consequência, queremos estudar leis quantitativas, temos que "criar" um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.

A primeira coisa a fazer, para tornar esse instrumento facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos e a totalidade dos seus elementos.

Definição 1.1 (Variável) *Seja A um conjunto qualquer, finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer um dos seus elementos por um símbolo, por exemplo x. A esse símbolo, representativo de qualquer dos elementos de A, chamamos* variável *e a A o seu* domínio*.*

Voltemos ao exemplo da lei da queda dos graves. Como foi dito, esta consiste na correspondência do conjunto dos tempos para o conjunto dos espaços. Seja t a variável do conjunto dos tempos T e s a variável do subconjunto S do conjunto dos espaços E, correspondência que sabemos unívoca, no sentido $t \mapsto s$ (a cada t corresponde um e um só s). Diremos que a variável s é uma função da variável t e escrevemos, simbolicamente, $s = f(t)$.

Definição 1.2 (Função) *Seja x uma variável representativa de um conjunto D e y uma variável representativa de um conjunto $C_d \subseteq C_c$. Diz-se que y é* função *de x, e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existir uma correspondência unívoca no sentido $x \mapsto y$. Usa-se também a notação*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & C_c \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

A x chama-se variável independente*, a y* variável dependente*, ao conjunto D chama-se* domínio *de f, a C_c* conjunto de chegada *e a*

$$C_d = \{f(x) : x \in D\}$$

chama-se contradomínio*.*

Não se deve confundir f com $f(x)$ pois enquanto f é uma função, $f(x)$ é apenas o valor que a função f assume no ponto x. Por vezes afirma-se: "seja f a função definida por $f(x) = \cdots$" ou até "seja $f(x) = \cdots$ a função ...". São abusos de linguagem que iremos cometer ao longo do curso.

Simbolicamente temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} f : A \longrightarrow B \text{ é função} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x). \end{aligned}$$

Seja f uma função de domínio A e conjunto de chegada B. O gráfico de f é o conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{graf} f \quad &= \quad \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\} \\ &= \quad \{(x, f(x)) : x \in A\}. \end{aligned}$$

Notemos que o gráfico de f é sempre o mesmo, qualquer que seja o conjunto B que contenha o contradomínio de f. A representação geométrica (ou gráfico) de f é qualquer representação geométrica dos pontos de $\operatorname{graf} f$. É fácil, raciocinando geometricamente, ver quando é que uma figura é ou não a representação gráfica de alguma função.

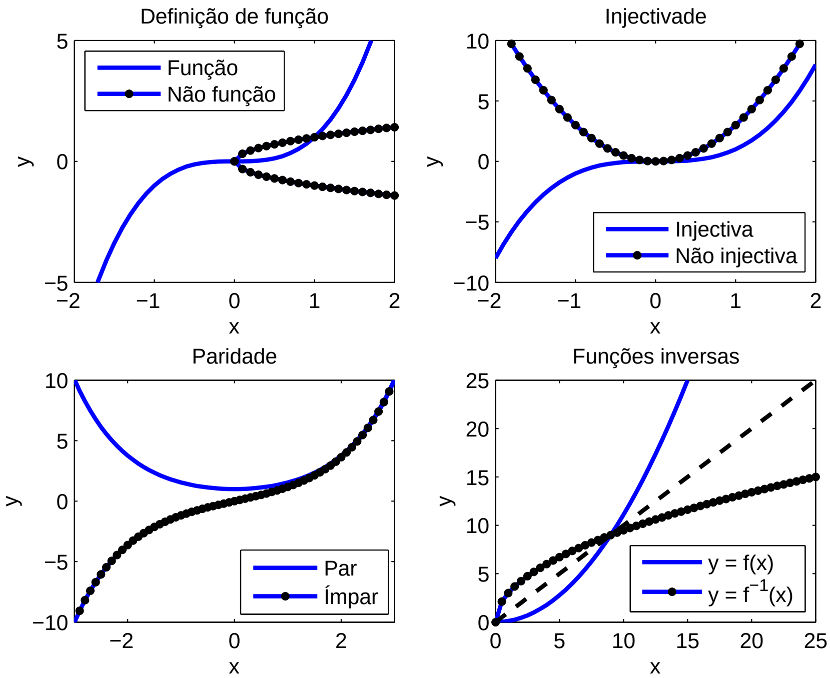

Figura 1.1: Tipos de funções.

1.2 Funções injectivas e sobrejectivas

Como já é sabido, uma função de domínio A é dita injectiva se a pontos diferentes do domínio A corresponderem imagens diferentes no conjunto de chegada. Simbolicamente temos:

$$\begin{aligned} f : A \longrightarrow B \text{ é injectiva} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \end{aligned}$$

Em termos gráficos, a injectividade pode ser vista Figura 1.1.

Uma função de domínio A é dita sobrejectiva se qualquer ponto do conjunto de chegada pertencer ao contradomínio. Simbolicamente temos:

$$f : A \longrightarrow B \text{ é sobrejectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y.$$

Em termos gráficos não é possível concluir qual é o conjunto de chegada (só podemos saber qual o contradomínio) e, como tal, não é possível concluir da sobrejectividade de uma função.

1.3 Monotonia, paridade e periodicidade

Vamos, a partir de agora, considerar apenas funções reais de variável real. Seja f uma função de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$. A função f diz-se crescente (estritamente crescente) se para todo o $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Do mesmo modo, f diz-se decrescente (estritamente decrescente) se para todo o $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Uma função f diz-se constante se $f(x_1) = f(x_2)$, para todo o x_1 e x_2 no seu domínio, e limitada se existir um $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para todo o x pertencente ao seu domínio.

Outra noção importante é a de paridade. Seja f uma função de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ centrado na origem. Diz-se que f é par, se e só se, para todo $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ e ímpar se e só se, para todo o $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Notemos que se f é par, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy. Se f é ímpar, o seu gráfico é simétrico em relação à origem (ver Figura 1.1).

Seja f uma função de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$. Diz-se que f é periódica em D se existir um $T \neq 0$ tal que, para todo o $x \in D$, $f(x+T) = f(x)$. Simbolicamente temos:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é periódica} \Leftrightarrow \exists T \neq 0 : \forall x \in D, f(x+T) = f(x).$$

A T nessas condições chama-se período da função f. Se T é um período positivo de f e é inferior a todos os outros períodos positivos de f, então a T chama-se período fundamental de f. Prova-se facilmente que se uma função f tiver período T então tem período kT, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se tivermos o gráfico de uma função periódica de período T, ele coincide com o gráfico da função que se obtém translaccionando a origem para o ponto $(kT, 0)$.

Seja f uma função definida num intervalo de amplitude T. A extensão periódica de f é a função f_p que satisfaz, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f_p(x + kT) = f(x), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercício 1.1 *Procure exemplos de funções periódicas e das suas aplicações.*

Se uma função tiver período T podemos reduzi-la a uma função de período L através da mudança de escala

$$y = \omega x, \qquad \omega = \frac{L}{T}$$

e escrever f em termos de y: $f(x) = f(y/\omega)$.

Outra mudança de variável interessante consiste em transformar uma função definida num intervalo $[a, b]$ numa função definida num intervalo $[c, d]$. Essa mudança é efectuada por uma função ϕ tal que

$$\begin{array}{rccc} \phi : & [a,b] & \longrightarrow & [c,d] \\ & x & \longmapsto & y = \phi(x). \end{array}$$

A forma mais simples de definir ϕ consiste em considerar a recta que passa pelos pontos (a, c) e (b, d). Essa recta é dada por

$$y = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a).$$

Assim, se quisermos transformar uma função f definida no intervalo $[a, b]$, sendo x a variável que percorre esse intervalo, teremos que efectuar a mudança de variável

$$x = a + \frac{b-a}{d-c}(y-c)$$

e considerar

$$f(x) = f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c)\right).$$

1.4 Função inversa

Definição 1.3 (Função inversa) *Seja f uma função injectiva com domínio D e contradomínio C_d. Uma função g de domínio C_d e contradomínio D diz-se* inversa *de f se*

$$f(g(y)) = y, \qquad \forall y \in C_d$$

e

$$g(f(x)) = x, \qquad \forall x \in D.$$

Notemos que, para que a função inversa de f esteja bem definida, f tem que ser sobrejectiva e injectiva. De facto, se f não fosse injectiva isso queria dizer que existiam $x_1 \neq x_2 \in D$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Mas isso seria equivalente a afirmar que existiria $y \in C_d$ tal que $g(y) = x_1 \neq x_2 = g(y)$, o que contraria o facto de g ser uma função. Logo, para que uma função tenha inversa, ela tem que ser bijectiva.

A função inversa de f representa-se por f^{-1}. Para que f^{-1} exista é necessário que a cada $y \in C_d$ corresponda um e um só elemento $x \in D$ (correspondência biunívoca).

Exercício 1.2 *Prove que se f^{-1} existir é única.*

Analisemos agora qual a relação existente entre os gráficos de f e de f^{-1}. Sabemos que

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Assim, o ponto $P = (a, b)$ está no gráfico de f se e só se $Q = (b, a)$ está no gráfico de f^{-1}. Podemos então dizer que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos um do outro em relação à recta $y = x$ (ver Figura 1.1). Podemos também pensar de outra maneira. Se "trocarmos os papéis" do eixo dos xx com o eixo dos yy, passamos do gráfico de uma função f para o gráfico da sua inversa (caso exista).

Exercício 1.3 *Construa graficamente funções que não possuam inversa.*

Consideremos $f(x) = x^2$, com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}_0^+$. Resolvendo $y = x^2$ em ordem a x obtemos $x = \pm\sqrt{y}$. Esta função não é injectiva e, como tal, não possui inversa. No entanto, se considerarmos f definida em $\mathbb{R}_0^+$ obtemos a função injectiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & y = x^2, \end{array}$$

cuja inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Podemos definir a seguinte regra para o cálculo da inversa: para determinar a inversa de uma função $y = f(x)$, tenta resolver-se a equação em ordem a x; se a solução é única, podemos definir a função inversa. Como teste para a invertibilidade de uma função temos o seguinte: uma função f só é invertível se cada linha horizontal intersectar o gráfico de f no máximo num ponto.

Exercício 1.4 *Mostre que se f é uma função invertível, estritamente monótona em $D \subseteq \mathbb{R}$, então f^{-1} também é estritamente monótona em $C_d = f(D)$ e o sentido da monotonia é o mesmo.*

1.5 Mini-atlas de funções

Vamos, agora, rever algumas classes de funções.

Funções polinomiais. Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ forem números reais, uma função polinomial tem a forma

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \end{array}$$

Podemos tomar para D qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$. Como casos particulares das funções polinomiais temos a função constante ($n = 0$), a função linear ou afim ($n = 1$) e a função quadrática ($n = 2$).

Funções racionais. Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinómios. As funções racionais são funções do tipo

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}. \end{array}$$

Podemos tomar para D qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ onde Q não se anule.

Funções irracionais. Seja $P(x)$ um polinómio. As funções do tipo

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \left(\sqrt[q]{P(x)}\right)^p, \end{array}$$

com $p, q \in \mathbb{N}$, são ditas irracionais. O seu maior domínio será $\mathbb{R}$ se q for ímpar e $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se q for par.

Função exponencial. Se $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ então

$$a^{p/q}, \qquad a \in \mathbb{R}^+,$$

tem uma definição elementar. Se x é um número irracional então a definição de a^x pode ser dada como se segue: se $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ for o termo geral de uma sucessão de números racionais convergente para x, então a^x é o limite (que existe sempre) da sucessão de termo geral a^{x_n}. Temos assim que para todo o $a > 0$ é possível definir a função exponencial de domínio $\mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa a^x.

Note-se que, quando $a > 1$ a função é estritamente crescente e quando $a < 1$ a função é estritamente decrescente (ver Figura 1.2). No caso $a = 1$ a função é, obviamente, constante.

Quando a base da exponencial é o número de Napier, assim chamado em homenagem ao matemático John Napier (1550–1617), isto é, quando $a = e$, sendo

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828459045\ldots,$$

temos a chamada função exponencial natural. O número de Napier é denotado por e em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), que foi o primeiro a estudar aprofundadamente as suas propriedades. A e também se chama, muitas vezes, número de Euler.

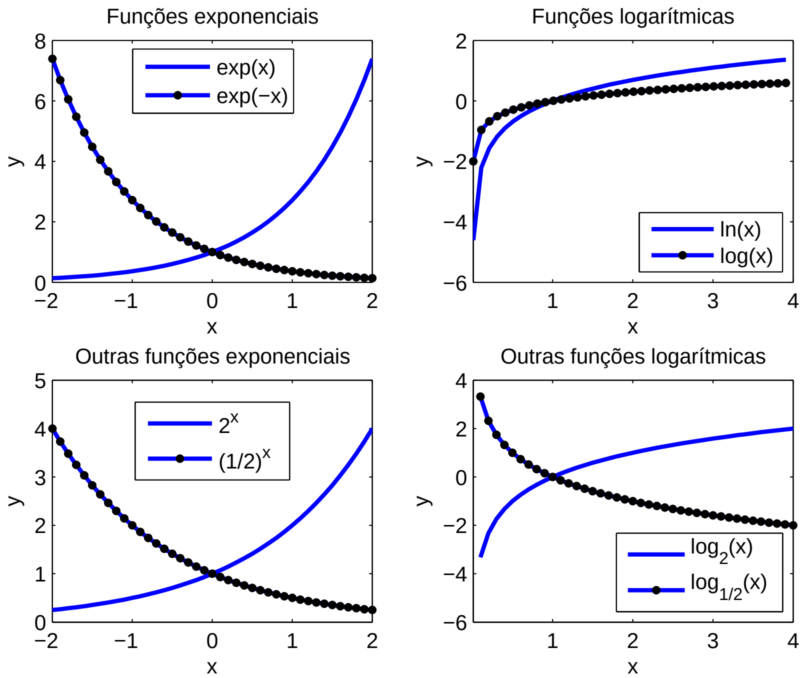

Figura 1.2: Funções exponenciais e logarítmicas.

A função exponencial natural também é denotada por $\exp(\cdot)$. Prova-se que

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Lembremos as seguintes propriedades da função exponencial:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Função logarítmica. Como a função a^x, $a > 0$ e $a \neq 1$, é injectiva podemos definir a sua inversa na forma

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

função a que chamamos logaritmo na base a. Assim, a função logaritmo na base a é definida por

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \log_a x, \end{array}$$

onde

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Como casos particulares temos a função logaritmo na base 10

$$y = \log x \Leftrightarrow 10^y = x$$

e a função logaritmo natural ou neperiano (base e)

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Recordemos as seguintes propriedades da função logaritmo:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^y = y\log_a x.$$

Recordemos, também, a fórmula de mudança de base

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

A Figura 1.2 dá-nos a representação gráfica da função logarítmica quando $a > 1$ e $a < 1$. Notemos que os gráficos são simétricos um do outro em relação ao eixo dos xx.

Funções $f(x)^{g(x)}$. As funções exponencial e logarítmica permitem definir a função $f(x)^{g(x)}$, com f e g duas funções. Por definição

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)},$$

onde e é o número de Euler. Isto significa que $f(x)^{g(x)}$ só está definida se $f(x) > 0$. Nalguns casos particulares que não exijam esta definição, como é o caso de $f(x)^{p/q} = \left(\sqrt[q]{f(x)}\right)^p$, com p e q inteiros positivos, o domínio pode ser alargado.

Funções trigonométricas directas. Estas funções são de importância fundamental em todas as áreas científicas e tecnológicas. Pode provar-se, por exemplo, que, em certas condições, todas as funções periódicas se podem escrever como somas de senos e cossenos.

As fórmulas fundamentais que relacionam a função seno com a função cosseno são:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \qquad \text{e} \qquad \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Outras fórmulas importantes são:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \operatorname{sen} y\cos x, \qquad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y,$$

Exercício 1.5 *Prove que:*

1. (a) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$;
   (b) $\cos 2x = cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$;
   (c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$;
   (d) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$;
2. (a) $\operatorname{sen} x\cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y))$;
   (b) $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$;
   (c) $\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$.

As restantes funções trigonométricas podem ser definidas à custa das funções seno e cosseno da seguinte forma:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Exercício 1.6 *Prove que*

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}.$$

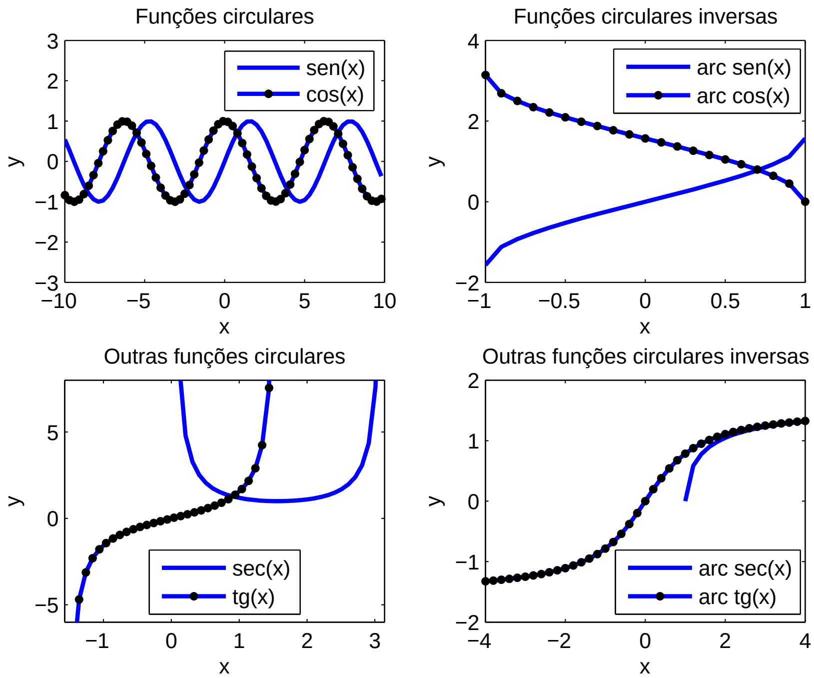

Figura 1.3: Funções trigonométricas.

Funções trigonométricas inversas. Como as funções trigonométricas directas não são injectivas, não podem ser invertidas no seu domínio. Temos, para tal, que considerar uma restrição ao seu domínio por forma a que possam ser consideradas bijectivas.

Função arco seno

Consideremos a função $y = \operatorname{sen} x$. Como a função não é injectiva, há que considerar uma restrição desta função a um intervalo no qual seja e que nele assuma todos os valores. Para que a função seno seja invertível, considera-se a sua restrição ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sendo a sua inversa a função "arco cujo o seno" ou, de forma abreviada, "arco seno", definida por

$$\begin{array}{rrcl} \text{arc sen} : & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & y = \text{arc sen}\, x, \end{array}$$

onde

$$y = \text{arc sen}\, x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Função arco cosseno

Consideremos a função $y = \cos x$. Pelas mesmas razões apresentadas anteriormente, vamos considerar a sua restrição ao intervalo $[0, \pi]$ e definir a função "arco cujo o cosseno" ou, de forma abreviada, "arco cosseno", da forma

$$\begin{array}{rrcl} \text{arc cos} : & [-1,1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & x & \longmapsto & y = \text{arc cos}\, x, \end{array}$$

onde

$$y = \text{arc cos}\, x \Leftrightarrow \cos y = x, \qquad 0 \leq y \leq \pi.$$

Na Figura 1.3 apresentam-se os gráficos das funções arco seno e arco cosseno.

Exercício 1.7 *Defina e trace os gráficos das funções:*

1. $y = \text{arc tg}\, x \Leftrightarrow \text{tg}\, y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$;

2. $y = \text{arc cotg}\, x \Leftrightarrow \text{cotg}\, y = x, \quad 0 < y < \pi$;

3. $y = \text{arc sec}\, x \Leftrightarrow \sec y = x, \quad 0 < y < \pi$;

4. $y = \text{arc cosec}\, x \Leftrightarrow \text{cosec}\, y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Existem fórmulas que relacionam as funções trigonométricas inversas. Algumas das mais importantes são:

$$\text{arc tg}\, x = \text{arc sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{arc cosec}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right);$$

$$\text{arc tg}\, x + \text{arc cotg}\, x + \text{arc sen}\, x + \text{arc cos}\, x = \text{arc cosec}\, x + \text{arc sec}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

Funções hiperbólicas directas. As expressões exponenciais

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ocorrem com muita frequência nas aplicações da matemática às ciências e à engenharia. Nesse sentido, é útil atribuir-lhes uma designação específica. Por razões que não iremos explicitar, convencionou-se chamar função seno hiperbólico a

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

e função cosseno hiperbólico a

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 1.8 *Faça o estudo gráfico das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico e conclua que os seus gráficos são os dados na Figura 1.4.*

A função cosseno hiperbólico é usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, de densidade uniforme, cujas extremidades se encontram fixas à mesma altura. A curva

$$y = a\, \text{ch}\, \frac{x}{a}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

é chamada catenária (da palavra latina *catena* que significa corrente).

Exercício 1.9 *Prove que:*

1. $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ (*chamada* fórmula fundamental da trigonometria hiperbólica)*;*

2. $\text{sh}\,(x+y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, y\, \text{ch}\, x$ *e* $\text{ch}\,(x+y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$.

Tal como para as funções circulares, podemos também definir a função tangente hiperbólica, a função cotangente hiperbólica, a função secante hiperbólica e a função cossecante hiperbólica da seguinte forma:

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}, \qquad \text{coth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}, \qquad \text{sech}\, x = \frac{1}{\text{ch}\, x}, \qquad \text{cosech}\, x = \frac{1}{\text{sh}\, x}.$$

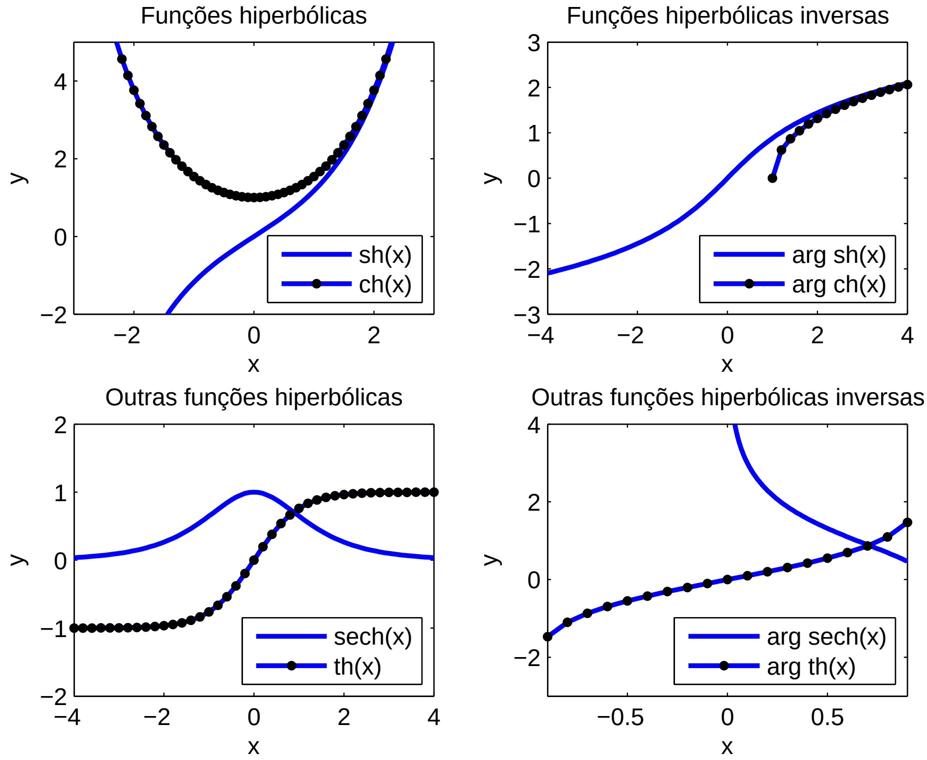

Figura 1.4: Funções hiperbólicas.

Funções hiperbólicas inversas. Podemos também definir as funções hiperbólicas inversas.

Função argumento seno hiperbólico

Como a função seno hiperbólico é injectiva, ela é invertível. Vamos então definir a sua inversa como sendo a função "argumento seno hiperbólico", definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{arg sh} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \text{arg sh}\, x, \end{array}$$

onde

$$y = \text{arg sh}\, x \Leftrightarrow \text{sh}\, y = x.$$

Função argumento cosseno hiperbólico

Como a função cosseno hiperbólico não é injectiva, há que considerar uma restrição desta função a um intervalo no qual seja e que nele assuma todos os valores. Para que a função cosseno hiperbólico seja invertível, considera-se a sua restrição ao intervalo $\mathbb{R}_0^+$, sendo a sua inversa a função "argumento cosseno hiperbólico", definida por

$$\begin{array}{rccl} \text{arg ch} : & [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longmapsto & y = \text{arg ch}\, x, \end{array}$$

onde

$$y = \text{arg ch}\, x \Leftrightarrow \text{ch}\, y = x, \qquad y \in \mathbb{R}_0^+.$$

Na Figura 1.4 apresentam-se os gráficos das funções argumento seno hiperbólico e argumento cosseno hiperbólico.

Exercício 1.10 *Prove que:*

1. $\arg \operatorname{sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

2. $\arg \operatorname{ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1.$

Exercício 1.11 *Defina e trace os gráficos das funções:*

1. $y = \arg \operatorname{th} x \Leftrightarrow \operatorname{th} y = x$;

2. $y = \arg \coth x \Leftrightarrow \coth y = x, \quad y \neq 0$;

3. $y = \arg \operatorname{sech} x \Leftrightarrow \operatorname{sech} y = x, \quad 0 \leq y$;

4. $y = \arg \operatorname{cosech} x \Leftrightarrow \operatorname{cosech} y = x, \quad y \neq 0.$

Existem fórmulas que relacionam as funções hiperbólicas inversas. Algumas das mais importantes são:

$$\arg \operatorname{sh} x = \operatorname{sgn}(x) \arg \operatorname{ch}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \arg \operatorname{th}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),$$

$$\arg \operatorname{ch} x = \arg \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1.$$

Exercício 1.12 *Prove que:*

1. $\arg \operatorname{th} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| < 1$;

2. $\arg \coth x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| > 1$;

3. $\arg \operatorname{sech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$;

4. $\arg \operatorname{cosech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right).$

1.6 Factores de escala

Muitos aspectos da vida dos seres vivos são determinados pelas suas dimensões. É fácil encontrar exemplos que mostram que muitas propriedades biológicas dependem de grandezas geométricas, tais como o comprimento, área e volume.

Comecemos por analisar as relações de grandeza nos sólidos geométricos. Como é sabido, um cubo de aresta a tem como área da sua superfície $A = 6a^2$ e volume $V = a^3$. Numa esfera de raio r, temos que a área da sua superfície é dada por $A = 4\pi r^2$ e o seu volume por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Uma relação que salta imediatamente à vista, e que pode ser generalizada para todos os sólidos regulares, é a seguinte: se l representar a dimensão linear característica de um dado sólido regular (a medida da aresta, no cubo, e do raio, na esfera), temos que a sua superfície é proporcional ao quadrado de l e o seu volume ao seu cubo, isto é,

$$A = k_a l^2, \qquad V = k_v l^3, \qquad k_a, k_v \in \mathbb{R}.$$

Temos assim que a relação entre o volume e a superfície de um dado sólido é proporcional à dimensão linear característica desse sólido, ou seja,

$$\frac{V}{S} = kl, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

A aplicação destas "Leis de Escala" ao estudo de algumas características dos seres vivos revela-se de grande interesse. Se estivermos interessados em comparar propriedades ou funções de diversos organismos, ainda que de forma muito aproximada, podemos tomar como comprimento característico uma dimensão típica desse organismo. Por exemplo, no caso dos humanos, algumas grandezas que poderiam ser usadas como dimensão característica seriam a altura, o comprimento do braço ou da perna. Já no caso de uma célula, poder-se-ia pensar, em analogia com a esfera, no seu raio.

Vamos considerar três exemplos.

Robustez. Em condições normais o peso humano é proporcional ao seu volume, pelo que um aumento da altura numa pessoa (dimensão linear característica) implica um aumento do seu volume de um factor cúbico. Já quanto à força máxima que um ser humano consegue desenvolver, ela é proporcional ao quadrado da sua dimensão característica. A questão que se coloca é a seguinte: entre dois indivíduos com a mesma constituição física e alturas diferentes, quem tem mais robustez física?

Para isso, há necessidade de definir robustez. Por definição, a robustez é dada pela relação entre carga máxima levantada e o próprio peso, isto é,

$$F = \frac{\text{carga máxima que levanta}}{\text{peso próprio}} = \frac{C}{P}.$$

Consideremos dois atletas de constituição semelhante mas de alturas distintas $L_1 > L_2$. Como a constituição é semelhante, podemos assumir que a densidade de ambos é semelhante e, como tal, a sua massa específica ρ também é. Assim sendo, os seus pesos são dados por

$$P_1 = \rho V_1 g = \rho k_v L_1^3 g, \qquad P_2 = \rho V_2 g = \rho k_v L_2^3 g,$$

onde g representa a aceleração da gravidade e k_v a constante de proporcionalidade entre o volume e o comprimento característico.

Por outro lado, a carga máxima c que um animal é capaz de suportar é proporcional à área da secção recta dos seus músculos. Ora, a secção recta de um músculo pode ser aproximada por um círculo e o raio desse círculo é proporcional à dimensão linear característica. Assim sendo,

$$C_1 = k_c L_1^2, \qquad C_2 = k_c L_2^2,$$

onde k_c é a constante de proporcionalidade, considerada igual pois os atletas têm a mesma constituição física.

Podemos agora medir a robustez de ambos os atletas. Temos que

$$F_1 = \frac{k_c L_1^2}{\rho k_v L_1^3 g} = \frac{k}{L_1}, \qquad F_2 = \frac{k_c L_2^2}{\rho k_v L_2^3 g} = \frac{k}{L_2},$$

com

$$k = \frac{k_c}{\rho k_v g},$$

ou ainda

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Concluímos então que a robustez física é inversamente proporcional à altura e, como tal, ela é maior no atleta mais baixo.

Doses de fármacos. A administração de fármacos carece de precauções inerentes à sua própria natureza. A dose a administrar prende-se com a eficácia terapêutica que se pretende. No entanto, a determinação dessa dose tem em conta a massa corporal do indivíduo.

Consideremos uma criança com altura $L_c = 1$ m e um adulto com altura $L_a = 1{,}7$ m. A relação entre a altura da criança e a altura do adulto é

$$\frac{L_c}{L_a} = 0{,}59.$$

Se fosse esse o valor utilizado no cálculo da dose de um determinado fármaco a administrar a uma criança a partir da dose de um adulto cometer-se-ia um erro por excesso de aproximadamente três vezes.

A relação correcta a utilizar deve ser dada pelas massas. Se considerarmos que a massa específica da criança e do adulto são aproximadamente iguais, então a relação entre as suas massas pode ser aproximada pela relação entre os seus volumes que, por sua vez, são proporcionais aos cubos das suas alturas. Assim, o valor obtido para a relação entre os volumes e, consequentemente, para as doses de fármaco a administrar à criança é

$$\frac{V_c}{V_a} = \frac{kL_c^3}{kL_a^3} = \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^3 = \frac{1}{1{,}7^3} = 0{,}2.$$

Limitação das dimensões de uma célula. Suponhamos que uma célula em crescimento aumenta a sua dimensão característica (o seu raio) para o dobro entre dois instantes de tempo distintos. Por outras palavras, suponhamos que uma célula de raio R_1 no instante de tempo t_1 aumenta o seu raio para $R_2 = 2R_1$ no instante de tempo t_2.

As necessidades de oxigénio da célula são proporcionais à sua massa e ao seu volume mas a quantidade de oxigénio que atravessa a membrana celular depende, entre outros factores (natureza da membrana, diferenças de concentração entre o meio intra e extra celular), da área total da membrana. Assim, a relação entre a necessidade de oxigénio da célula entre os dois instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\frac{\text{necessidade de oxigénio no instante } t_2}{\text{necessidade de oxigénio no instante } t_1} = \frac{k_v R_2^3}{k_v R_1^3} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 8,$$

enquanto que a relação entre a quantidade de oxigénio que atravessa a célula entre os dois instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\frac{\text{quantidade de oxigénio no instante } t_2}{\text{quantidade de oxigénio no instante } t_1} = \frac{k_s R_2^2}{k_s R_1^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 4.$$

Assim, a quantidade de oxigénio que é difundido para o interior da célula não acompanha o aumento da necessidade da célula.

Definindo o factor de viabilidade Z de uma célula pela relação

$$Z = \frac{\text{quantidade de oxigénio obtida por minuto}}{\text{necessidade de oxigénio por minuto}}$$

temos que

$$Z = \frac{k_s R^2}{k_v R^3} = \frac{k}{R},$$

sendo R o raio da célula num dado instante e k uma constante de proporcionalidade. Podemos, então, concluir que, à medida que a dimensão característica da célula aumenta, a sua viabilidade diminui.

1.7 Exercícios práticos

Seguem-se alguns exercícios destinados a serem resolvidos nas aulas práticas.

Exercício 1.13 *Determine o domínio de definição das seguintes funções:*

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; *2.* $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$; *3.* $f(x) = \ln(x^2-4)$.

Exercício 1.14 *Determine, se possível, a inversa de cada uma das seguintes funções:*

1. $y = 2x+3$; *2.* $y = 2+\sqrt{x+1}$; *3.* $y = \dfrac{2^x}{3} - 1$;

4. $y = \text{arc tg } 3x$; *5.* $y = \ln \dfrac{x}{2}$.

Exercício 1.15 *Simplifique as seguintes expressões, onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$:*

1. $5^{2-\log_5 x}$; *2.* $3^{2\log_3(x+1)}$; *3.* $6^{3\log_6 2 - 2\log_6 3}$; *4.* $a^{(2-\log_a x)/3}$;

5. $e^{-2\ln x^2}$; *6.* $a^{\log_a 2 + \log_a x}$; *7.* $\log_4 \left(4^x \sqrt[x]{4}\right)$; *8.* $\log \dfrac{10^{(x+1)^2-x}}{\left(\frac{1}{10}\right)^x 100^{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}}$.

Exercício 1.16 *Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:*

1. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$; *2.* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$; *3.* $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{3}{2x-4}$;

4. $\sqrt{3x+1} = 2x$; *5.* $\sqrt{x+1} - 3 = \sqrt{x-2}$; *6.* $e^{x+2} - 4x^2 e^x = 0$;

7. $\log_3 x = \dfrac{1}{2} + \log_9(4x+15)$; *8.* $2^{x^2-5x} = \dfrac{1}{64}$.

Exercício 1.17 *Resolva as seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:*

1. $x^2 - 4 < 0$; *2.* $\dfrac{x-3}{1-x} \geq 0$; *3.* $-x^2+6x-20 < 0$;

4. $\mid x^2-4 \mid \leq 1$; *5.* $\mid x-1 \mid > x$; *6.* $\mid x-1 \mid - \mid 2x+4 \mid > 1$;

7. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-5x} \geq 0$.

Exercício 1.18 *Determine o domínio e a expressão analítica da aplicação $g \circ f$, sendo:*

1. $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

2. $f(x) = \mid x \mid$ *e* $g(x) = \begin{cases} \log(x+1), & \textit{se } x > -1, \\ 0, & \textit{se } x = -1, \\ \frac{1}{x}, & \textit{se } x < -1. \end{cases}$

Exercício 1.19 *Investigue quais das funções são pares e quais são ímpares:*

1. $y = \operatorname{sen} x^3$; 2. $y = e^{\cos x}$; 3. $y = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; 4. $y = \cos(\operatorname{sen}(x))$.

Capítulo 2

Cálculo diferencial

2.1 Noção de limite de uma função

No ensino secundário foi dada uma definição de limite recorrendo aos limites de sucessões. É costume designar essa definição por "definição de limite segundo Heine", em homenagem ao matemático alemão Henrich Eduard Heine (1821–1881). Vamos agora introduzir uma definição alternativa, introduzida por Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), que é mais conveniente para demonstrar muitos resultados teóricos.

Definição 2.1 (Limite) *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto $a \in \mathbb{R}$ (podendo não estar definida em a) e seja L um número real. Diz-se que o* limite *de $f(x)$ quando x tende para a é L e escreve-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se e só se, para todo o $\epsilon > 0$ podemos encontrar (pelo menos) um $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D_f$ (D_f é o domínio de f), se $x \in]a - \delta, a + \delta[$ ($x \neq a$) então $f(x) \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Simbolicamente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

É importante lembrar que primeiro consideramos o intervalo arbitrário $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ no eixo dos yy e então, em segundo lugar, mostramos que existe, em D_f, um intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ do tipo exigido.

Graficamente, temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se e só se, dado um intervalo $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ no eixo dos yy, existe um intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ no eixo dos xx tal que as imagens dos pontos desse intervalo, excepto, possivelmente, a do ponto a, caiem no primeiro intervalo. Por outras palavras, dado $\epsilon > 0$, arbitrário, consideram-se o intervalo $]L - \epsilon, L + \epsilon[$ no eixo dos yy e as rectas horizontais $y = L \pm \epsilon$. Se existir um intervalo aberto $]a - \delta, a + \delta[$ tal que, para todo o x nesse intervalo, com possível excepção do ponto a, o ponto $P = (x, f(x))$ esteja entre as duas rectas horizontais, ou seja, no rectângulo definido pelas rectas $y = L \pm \epsilon$, $x = a \pm \delta$, então temos que $f(x) \in]L - \epsilon, L + \epsilon[$ e, como tal,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Note-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) \neq L &\Leftrightarrow \sim [\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon] \\ &\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in D_f : 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon.\end{aligned}$$

Assim sendo, para provar que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é diferente de L, basta encontrar um $\epsilon > 0$ tal que não existe um $\delta > 0$ que verifique o pretendido. Notemos que, para provar que o limite de $f(x)$ quando x tende para a não existe, é preciso provar que a definição falha para qualquer valor de L.

Vamos, de seguida, apresentar alguns resultados importantes sobre limites. Estes resultados facilitarão a tarefa de calcular limites de funções. No que se segue iremos considerar que as funções estão definidas em intervalos ou união de intervalos.

Teorema 2.1 *Se existir* $\lim_{x\to a} f(x)$*,* $a \in \mathbb{R}$*, esse limite é único.*

A demonstração é feita por redução ao absurdo, isto é, supõem-se que existem $L_1 \neq L_2$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} f(x) = L_2$$

e chega-se à conclusão que tal não pode acontecer.

Exercício 2.1 *Mostre que* $\lim_{x\to a}(\alpha x + \beta) = \alpha a + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolução: Consideremos $\alpha \neq 0$ (o caso $\alpha = 0$ é trivial) e façamos $f(x) = \alpha x + \beta$ e $L = \alpha a + \beta$. Fixando um $\epsilon > 0$ temos

$$|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow |\alpha x + \beta - \alpha a - \beta| < \epsilon \Leftrightarrow |\alpha||x - a| < \epsilon.$$

Então, escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{|\alpha|}$ temos provado o pretendido. □

O resultado seguinte, apresentado sem demonstração, diz que se o limite de uma função for positivo, quando x tende para a, então a função tem que ser positiva num intervalo aberto contendo o ponto a.

Teorema 2.2 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$*, e* $L > 0$ *(*$L < 0$*), existe um* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *(*$f(x) < 0$*) para todo o* $x \in]a - \delta, a + \delta[$*, excepto, possivelmente, em* $x = a$*.*

No próximo exercício são estabelecidas algumas regras práticas importantes para o cálculo de limites.

Exercício 2.2 *Suponhamos que existem os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$*,* $\lim_{x\to a} g(x)$*,* $a \in \mathbb{R}$*. Então, para* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*:*

1. $\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim_{x\to a} (f(x) g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim_{x\to a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x)$*, se* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$;
4. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$*, se* n *for um número inteiro e, no caso de* n *ser par* $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Existem muitos teoremas importantes e úteis sobre limites. Iremos apenas apresentar dois deles sem, no entanto, efectuar a sua demonstração.

Teorema 2.3 (Funções enquadradas) *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo o* x *pertencente a um intervalo aberto contendo o ponto* a, *excepto, possivelmente, em* a, *e se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, *então* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Exercício 2.3 *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \cos x}{x}$.

Resolução: Como

$$\frac{x-1}{x} < \frac{x - \cos x}{x} < \frac{x+1}{x}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

então, pelo teorema anterior, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \cos x}{x} = 1$. □

Teorema 2.4 (Função composta) *Se* f *e* g *são funções tais que, para* $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \qquad e \qquad \lim_{y\to b} f(y) = f(b) \quad (f \text{ contínua em } b),$$

então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Um conceito importante é o de limite lateral. Por definição, diz-se que o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a é L, e denota-se por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

se e só se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

e que o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a é L, e denota-se por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

se e só se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exercício 2.4 *Mostre que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Existem casos em que o limite não existe mas em que é necessário caracterizar o comportamento assimptótico de uma função. Por exemplo, como caracterizar o comportamento de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x cresce indefinidamente? E quando x tende para zero?

Para responder a estas questões, vamos apresentar os conceitos de limite no infinito e limite infinito.

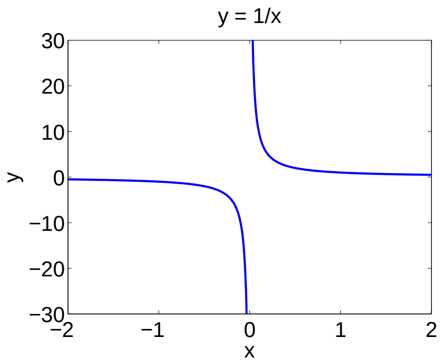

Figura 2.1: Hipérbole $y = 1/x$.

Definição 2.2 (Limites no infinito e limites infinitos)

Limites no infinito. *Seja f uma função definida num intervalo $]c, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in D_f, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Se f estiver definida num intervalo $]-\infty, c[\subseteq \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$, diz-se que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in D_f, x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Limites infinitos. *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, podendo não estar definida em a. Diz-se que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

e que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Vejamos os significados geométricos destas definições. Comecemos por ver o caso dos limites no infinito. Traçamos as rectas $y = L \pm \epsilon$. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se e só se quaisquer que sejam as rectas horizontais traçadas, for possível encontrar um valor de $M > 0$ tal que, para todo o $x > M$ os pontos $(x, (f(x))$ estão na região compreendida entre duas rectas.

Vejamos agora o caso dos limites infinitos. Traçamos a recta $y = M$. Temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se e só se qualquer que seja a recta horizontal traçada, podemos encontrar um intervalo $]a - \delta, a + \delta[$ tal que todos os pontos desse intervalo, com possível excepção do ponto a, são transformados por f em pontos por cima da recta.

Exercício 2.5 *Seja k um número racional positivo e c um número real arbitrário diferente de zero. Mostre que*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{c}{x^k}=0 \qquad e \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^k}=0,$$

desde que x^k seja sempre definido.

Exercício 2.6 *Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=L$, $a\in\mathbb{R}$. Então, para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:*

1. *$\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x))=+\infty$ se $\alpha>0$ e $\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x))=-\infty$ se $\alpha<0$;*
2. *se $L>0$ então $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=+\infty$ e $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=+\infty$;*
3. *se $L<0$ então $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=-\infty$ e $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=-\infty$;*
4. *$\lim_{x\to a}(g(x)/f(x))=0$.*

Temos, finalmente, o seguinte teorema, que apresentamos sem demonstração, para um tipo de limite infinito mas que também é válido para os restantes casos.

Teorema 2.5 (Função composta) *Se f e g são funções tais que, para $a,L\in\mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to a} g(x)=+\infty \quad e \quad \lim_{y\to+\infty} f(x)=L$$

então

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=L.$$

2.2 Funções contínuas

Ao chegarmos à definição de limite, enfatizámos a restrição $x\neq a$ e apresentámos exemplos que evidenciavam o facto de $\lim_{x\to a} f(x)$ poder existir mesmo que a função não fosse definida em $x=a$. Vimos também casos em que f está definida no ponto a e $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mas é diferente de $f(a)$.

Definição 2.3 (Função contínua) *Uma função f, definida num intervalo aberto contendo o ponto a, é* contínua *em a se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Se f não é contínua em a dizemos que é descontínua *em a ou que tem uma descontinuidade em a.*

Exercício 2.7 *Prove que as funções polinomiais e as funções racionais são contínuas em todos os pontos do seu domínio.*

Se uma função f é contínua em todos os pontos do intervalo $]a,b[$ (finito ou não), dizemos que f é contínua em $]a,b[$ e

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b),$$

isto é, se f é contínua em $]a,b[$ e contínua à direita em a e à esquerda em b dizemos que f é contínua em $[a,b]$.

Exercício 2.8 *Se f e g são funções contínuas em a, mostre que também o são a combinação linear $\alpha f + \beta g$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o seu produto fg, o seu quociente f/g, se $g \neq 0$, e a sua raiz $\sqrt[n]{f}$, com a restrição $f(a) > 0$ se n é par.*

Vejamos como resulta a aplicação do Teorema da função composta para o caso de ambas as funções serem contínuas. Como vimos, se f for contínua em a, então

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Se g também for contínua temos que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a)).$$

Vamos agora apresentar dois importantes resultados que apresentaremos sem demonstração. O primeiro é devido ao matemático checo Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848).

Teorema 2.6 (Bolzano) *Toda a função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$, assume, nesse intervalo, todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Por outras palavras, o Teorema de Bolzano diz que toda a função contínua, para passar de um valor para outro, tem que passar por todos os valores intermédios.

Apresentamos, de seguida, um importante corolário deste teorema com aplicações na localização de zeros de funções.

Corolário 2.7 *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$ então a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma raiz no intervalo $[a, b]$.*

Note-se que, se $f(a)f(b) < 0$ e a função for contínua, ela tem, nesse intervalo, um número ímpar de raízes.

Enunciemos agora um teorema devido ao matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

Teorema 2.8 (Weierstrass) *Toda a função contínua num intervalo fechado tem, nesse intervalo, um máximo e um mínimo.*

Note-se a importância de se considerar um intervalo fechado na definição anterior. De facto, se considerarmos a função $f(x) = 2x$ no intervalo $[-1, 2]$, ela tem máximo $M = f(2) = 4$ e mínimo $m = f(-1) = -2$. No entanto, a mesma função no intervalo $]-1, 2[$ não tem máximo nem mínimo.

Existem muitos "teoremas de Weierstrass". Outro, muito conhecido diz o seguinte: "Seja f uma função definida e contínua num intervalo $[a, b]$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe um polinómio p definido em $[a, b]$ tal que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon."$$

Este teorema diz-nos que, por mais pequeno que seja o ε escolhido, existe sempre um polinómio p contido na faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]\}$. Por outras palavras, este resultado permite afirmar que todas as funções contínuas podem ser aproximadas, com a precisão desejada, por um polinómio. O que o teorema não diz é como se calcula esse polinómio.

Vamos terminar esta secção com uma referência às funções descontínuas. Iremos destacar três tipos de descontinuidades que uma função f pode assumir. Dizemos que f possui, em a, uma:

- descontinuidade removível se existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ mas é diferente de $f(a)$. Também se diz que f é prolongável por continuidade em a.
- descontinuidade de primeira espécie se existirem os limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ mas são diferentes, isto é, não existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$.
- descontinuidade de segunda espécie se não existe, pelo menos, um dos limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Seguem-se alguns exemplos de funções descontínuas: a função sinal

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

a função Heaviside

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

a função rectângulo

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2; \end{cases}$$

a função característica ("maior inteiro inferior ou igual a x")

$$\lfloor x \rfloor = n, \qquad n \leq x \leq n+1, \quad n \in \mathbb{Z};$$

a função mantissa ("parte decimal de x")

$$\mathrm{M}(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Algumas relações importantes entre estas funções são, por exemplo,

$$\Pi(x) = \mathrm{H}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{H}\left(x - \frac{1}{2}\right), \qquad \operatorname{sgn}(x) = 2\mathrm{H}(x) - 1.$$

2.3 Função derivada

A propósito do "desenvolvimento em série"

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}\Delta x^2 + \cdots,$$

observa Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) no seu "Théorie des functions analytiques", 1798, pp 18-19: "Esta nova expressão tem a vantagem de mostrar que os termos da série dependem uns dos outros e, sobretudo como, desde que se forme a primeira função derivada de uma função primitiva qualquer, se podem formar todas as funções derivadas que a série contenha. Chamaremos à função $f(x)$ função primitiva em relação às funções $f'(x)$, $f''(x)$, etc, que derivam dela e às quais chamaremos funções derivadas em relação aquela". Foi nesse trabalho que surgiu, pela primeira vez, o termo derivada (de uma função).

Definição 2.4 (Derivada) *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a. O limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

quando existe e é finito chama-se derivada *de f no ponto a e denota-se por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.*

Uma função que possui derivada num ponto a do seu domínio diz-se derivável em a. Se o limite for finito, a função também se diz diferenciável em a. À razão

$$f[x,a] := \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

chama-se razão incremental. Então, podemos escrever

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f[x,a].$$

Geometricamente, a derivada de uma função f num ponto a do seu domínio é o declive da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de abcissa a. Sendo assim, a equação da recta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Diz-se que uma função f é diferenciável num intervalo aberto, finito ou não, se o é para todos os pontos desse intervalo. Uma função f é diferenciável num intervalo fechado $[a,b]$ se é diferenciável em $]a,b[$ e se existirem as derivadas à direita de f em a e à esquerda em b, isto é, se existirem os limites

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Como é sabido, se f for uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a, $f'(a)$ existe se e só se existirem e forem iguais as derivadas à esquerda e à direita de f em a.

Seja $D_{f'}$ o maior intervalo (ou união de intervalos) de $\mathbb{R}$ onde f é diferenciável. Podemos definir a função derivada como sendo

$$\begin{array}{rccc} f': & D_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f'(x), \end{array}$$

onde

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f[x, x+h]$$

ou um limite lateral apropriado.

Na Figura 2.2 podemos ver um exemplo de uma função ($f(x) = |x|$) que não tem derivada no ponto $x = 0$ e uma função ($f(x) = x^2$) diferenciável em todo o $\mathbb{R}$. Note-se que, se o gráfico de f tem um vértice em $(a, f(a))$, então f não é diferenciável em a. Por outras palavras, quando o gráfico de f tem um vértice num ponto $(a, f(a))$, a derivada é descontínua nesse ponto.

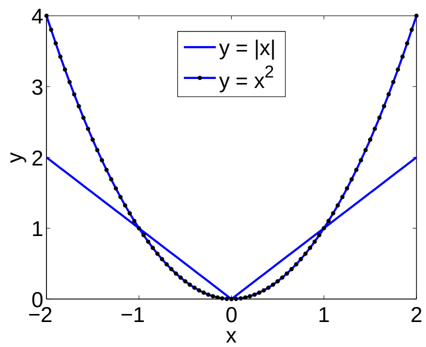

Figura 2.2: Função módulo e função quadrática.

Teorema 2.9 *Se uma função é diferenciável num ponto ela é contínua nesse ponto.*

Demonstração: Seja f uma função real de variável real de domínio D_f, diferenciável, e seja $x \neq a$, com $x, a \in D_f$. Então

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}(x - a).$$

Tomando limites temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} \lim_{x \to a}(x - a) = f(a) + f'(a) \times 0 = f(a).$$

Logo, f é contínua em a. □

Notemos que, pelo teorema anterior, também podemos afirmar que se f não é contínua num ponto do seu domínio então f não é diferenciável nesse ponto. O recíproco do teorema anterior não é válido, isto é, existem funções contínuas que não são diferenciáveis. Em 1857, o matemático alemão Karl Weierstrass apresentou, pela primeira vez, um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ mas sem derivada em qualquer ponto de $\mathbb{R}$.

Vamos agora apresentar alguns resultados úteis para o cálculo da derivada de uma função.

Exercício 2.9 *Sejam f e g duas funções diferenciáveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que:*

1. $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(a) + \beta g'(b)$;
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. *se* $g(x) \neq 0$ *então* $(f(x)/g(x))' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

O resultado seguinte, de grande importância prática, é apresentado sem demonstração.

Teorema 2.10 (Derivada da função composta ou regra da cadeia) *Seja f e g duas funções diferenciáveis. Então a função composta $f \circ g$, caso se possa definir, é diferenciável e a sua derivada é dada por*

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Notemos que, se considerarmos $y = f(u)$ e $u = g(x)$ de modo a que $y = f(g(x))$, o teorema anterior diz-nos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exercício 2.10 *Calcule as derivadas de:* $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$*;* $g(x) = e^{\cos(x)}$*;* $h(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{ch} x)$.

Vamos apresentar agora um resultado que permite calcular a derivada da inversa de uma dada função.

Teorema 2.11 (Derivada da função inversa) *Seja* $f :]a,b[\subseteq X \longrightarrow Y$ *uma função invertível e* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ *a sua inversa. Se* f *é diferenciável no ponto* $x_0 \in]a,b[$ *e* f^{-1} *é contínua em* $y_0 = f(x_0)$*, então* f^{-1} *é diferenciável nesse ponto se e só se* $f'(x_0) \neq 0$. *Nesse caso*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Demonstração: Pela regra da cadeia aplicada à função $f^{-1} \circ f$ temos que

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x).$$

Ora, como $f^{-1}(f(x)) = x$, então

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = 1.$$

Assim sendo

$$1 = \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)$$

e, como tal, supondo que $f'(x) \neq 0$, temos

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

onde $y = f(x)$. $\square$

Exercício 2.11 *Determine:* $(\operatorname{arc\,sen} x)'$; $(\operatorname{arc\,cos} x)'$; $(\operatorname{arg\,sh} x)'$; $(\operatorname{arg\,ch} x)'$.

Há uma maneira fácil de memorizar a fórmula da derivada da função inversa. Seja f definida por $y = f(x)$ e f^{-1} a sua inversa, isto é, a função tal que

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Então

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}.$$

A derivada de uma função, como vimos, conduz a outra função f'. Se f' tem derivada denotamo-la por f'' e designamo-la por **segunda derivada**. De um modo geral, se n é um inteiro positivo então $f^{(n)}$ denota a **derivada de ordem** n de f que se obtém partindo de f e derivando sucessivamente f n vezes. Temos assim a fórmula recursiva

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

ou, noutra notação,

$$\frac{d^n f}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^{(n-1)} f}{dx}(x).$$

Uma fórmula que permite calcular imediatamente a derivada de qualquer ordem do produto de duas funções é chamada fórmula de Leibniz, e foi deduzida por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Sejam f e g duas funções admitindo derivadas até à ordem n num intervalo I. Então a função fg também admite derivada até à ordem n em I e

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg' \\ (fg)'' &= f''g + 2f'g' + fg'' \\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \\ &\vdots \\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)} g^{(n-k)}\end{aligned}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

que, como se sabe, são valores que podem ser obtidos pelo chamado triângulo de Pascal

$$\begin{array}{cccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

assim chamado em homenagem a Blaise Pascal (1623–1662). Note-se a semelhança entre a fórmula de Leibniz e o binómio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

de quem Álvaro de Campos disse ser "tão belo como a Vénus de Milo".

Vejamos de que forma a noção de derivada nos pode ajudar na determinação dos extremos de uma função definida num intervalo.

Definição 2.5 (Extremos) *Seja f uma função de domínio D e seja $c \in D$. O valor de $f(c)$ diz-se* máximo (mínimo) absoluto *de f se $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$, para todo o $x \in D$. O valor de $f(c)$ diz-se* máximo (mínimo) local *ou* relativo *de f se existe um intervalo aberto I contendo c tal que $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$, para todo o $x \in I$. O ponto c nestas condições diz-se um* maximizante (minimizante) absoluto *ou* local *de f.*

Vamos agora ver como é que a derivada nos pode ajudar a determinar estes extremos. Recordemos que, pelo Teorema de Weierstrass, se a função for contínua num intervalo fechado, ela admite, nesse intervalo, um máximo e um mínimo. O próximo teorema é devido a Pierre de Fermat (1601–1665).

Teorema 2.12 (Fermat) *Seja f uma função diferenciável num ponto c de um intervalo aberto I. Então, se f atinge um extremo local nesse ponto podemos concluir que $f'(c) = 0$.*

Note-se que o recíproco deste teorema não é verdadeiro. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ tem derivada nula em $x = 0$ mas $f(0)$ não é um extremo da função.

Definição 2.6 (Ponto crítico) *Seja f uma função definida num intervalo aberto e seja c um ponto desse intervalo. Dizemos que c é um* ponto crítico *de f se s só se $f'(c) = 0$ e um* ponto singular *se e só se f não é diferenciável nesse ponto.*

Note-se que nem todos os pontos críticos são pontos onde a função atinge um máximo ou um mínimo (por exemplo, $f(x) = x^3$). Por outro lado, há pontos onde a função atinge um máximo ou um mínimo que não são pontos críticos (por exemplo, $f(x) = |x|$).

Teorema 2.13 *Seja f uma função definida num intervalo qualquer e seja c um ponto desse intervalo. Se f atinge um máximo ou um mínimo nesse ponto então, obrigatoriamente, uma das três hipóteses terá que se verificar: c é um ponto crítico de f; c é um ponto singular de f; c é um dos extremos do intervalo (se o intervalo for fechado).*

Este resultado permite-nos estabelecer o chamado teste da primeira derivada para a determinação de extremos locais. Seja c um ponto crítico de uma função f definida em $]a, b[$ contendo c. Se f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ excepto, possivelmente, no ponto c, então: se

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x \in]a, c[, \\ f'(x) < 0 & x \in]c, b[, \end{cases}$$

então $f(c)$ é um máximo local; se

$$\begin{cases} f'(x) < 0, & x \in]a, c[, \\ f'(x) > 0 & x \in]c, b[, \end{cases}$$

então $f(c)$ é um mínimo local; se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]a, b[/\{c\}$, então $f(c)$ não é máximo nem mínimo local.

Outro conceito importante no traçado gráfico de uma função e para o qual as derivadas poderão ser úteis é o conceito de concavidade.

Definição 2.7 (Concavidade) *Seja f uma função diferenciável num ponto c. O gráfico de f tem* concavidade *voltada para cima (baixo) no ponto $(c, f(c))$ se existe um intervalo aberto contendo c tal que, nesse intervalo, o gráfico de f está acima (abaixo) da tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.*

Notemos que, quando a concavidade está voltada para cima (baixo) o coeficiente angular da tangente cresce (decresce) com x.

Como é sabido, dada uma função diferenciável, se a sua derivada é positiva (negativa) num dado intervalo, a função é crescente (decrescente) nesse intervalo. Consequentemente, se os valores da segunda derivada num determinado intervalo são positivos (negativos) estão a função derivada é crescente (decrescente) nesse intervalo. Este facto sugere o seguinte teorema que apresentamos sem demonstração.

Teorema 2.14 *Se uma função f é diferenciável num intervalo aberto contendo c então, no ponto $(c, f(c))$ o gráfico é côncavo para cima (baixo) se $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$).*

Pode haver pontos no gráfico de uma função para os quais a concavidade muda de sentido. Tais pontos são chamados pontos de inflexão.

Definição 2.8 (Ponto de inflexão) *O ponto $(c, f(c))$ do gráfico de uma função f é um* ponto de inflexão *se existe um intervalo aberto $]a, b[$ contendo c tal que ocorra uma das seguintes situações:*

$$f''(x) > 0 \text{ se } x \in]a, c[\text{ e } f''(x) < 0 \text{ se } x \in]c, b[;$$

ou

$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in]a, c[\text{ e } f''(x) > 0 \text{ se } x \in]c, b[.$$

Se $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f e se f'' é contínua num intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. Assim, para localizar os pontos de inflexão de $f \in C^2(]a, b[)$ – f é tal que f, f' e f'' são contínuas em $]a, b[$ – começamos por determinar os pontos x tais que $f''(x) = 0$.

A segunda derivada também pode ser útil na classificação dos extremos de uma função.

Teorema 2.15 (Teste da segunda derivada) *Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto contendo c e $f'(c) = 0$. Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em $x = c$. Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = c$.*

Se, no teorema anterior, $f''(c) = 0$, o teste da segunda derivada não funciona. Em tais casos, usa-se o teste da primeira derivada.

Exercício 2.12 *Faça o estudo da função*

$$f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

quando $a = 1$. Esta curva foi estudada por Maria Gaetana Agnesi (1717–1783) e ficou conhecida pelo nome de bruxa de Agnesi *ou* feiticeira de Agnesi*. Esse nome, encontrado apenas em textos em inglês, é resultado de uma tradução errada. O nome dado por Agnesi à curva era versiera (curva). John Colson (1680–1760), famoso matemático de Cambridge que achou o texto de Agnesi tão importante que aprendeu italiano apenas para traduzi-la, "para o benefício da juventude britânica", provavelmente confundiu a palavra "versiera", que significa "curva", com "avversiera", que significa "bruxa".*

Exercício 2.13 *Seja $f(x) = 12 + 2x^2 - x^4$. Determine os seus máximos e mínimos locais. Discuta a concavidade o os pontos de inflexão. Finalmente, esboce o seu gráfico.*

Por vezes é bastante difícil determinar os pontos críticos de uma função. Na verdade, não há garantia que tais pontos existam. O teorema que se segue, devido ao francês Michel Rolle (1652–1719), um dos mais acérrimos opositores do Cálculo Diferencial, dá condições suficientes para a existência de um ponto crítico.

Teorema 2.16 (Rolle) *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe, pelo menos, um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, o Teorema de Weierstrass garante que a função atinge, nesse intervalo, um máximo M e um mínimo m. Se $M = m$, então f é constante e, como tal, $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$. Se $M > m$ então pelo menos um desses valores ocorre no interior do intervalo $]a, b[$. Como f é diferenciável, pelo Teorema de Fermat temos que a derivada se anula nesse ponto, o que prova o pretendido. $\square$

Do Teorema de Rolle resulta, imediatamente, o seguinte corolário.

Corolário 2.17 *Seja f uma função nas condições do Teorema de Rolle. Então:*

1. *entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero da sua derivada;*
2. *não pode haver mais do que um zero de f inferior (superior) ao menor (maior) zero de f';*
3. *entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.*

O próximo teorema pode ser considerado como uma generalização do Teorema de Rolle para o caso em que $f(a) \neq f(b)$.

Teorema 2.18 (Valor médio de Lagrange) *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, existe, pelo menos, um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstração: Consideremos a função $F(x) = f(x) - \lambda x$, onde λ é um valor real tal que $F(a) = F(b)$. Então,

$$F(a) = F(b) \Leftrightarrow f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como F é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, pelo Teorema de Rolle podemos concluir que existe, pelo menos, um c tal que

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad \square$$

Exercício 2.14 *Usando o teorema anterior prove que se f e g forem duas funções diferenciáveis em $]a, b[$ e se $f'(x) = g'(x)$, para todo o $x \in]a, b[$, então $f - g$ é constante em $]a, b[$.*

Nalgumas aplicações a variável dependente y e a variável independente x, em vez de estarem relacionadas por meio de uma função real de variável real, como em $y = f(x)$, estão relacionadas por meio de uma equação como em $x^2 + y^2 = 9$ ou em $x^2 + xy^3 + 5x = 19$ ou ainda em $5x \cos y = 2^{x+y}$. Por vezes estas equações podem ser reduzidas à forma $y = f(x)$ mas, muitas vezes, tal não é possível.

Apesar das dificuldades podemos determinar a derivada de y em ordem a x, nos casos em que ela exista, sem ter que explicitar y como função de x (com a vantagem adicional da derivada obtida, também ela geralmente definida implicitamente, ser válida para todas as funções reais de variável real definidas pela equação inicial). Para tal basta considerar a regra de cadeia.

Consideremos um exemplo. Para determinar y', quando y é definida implicitamente por meio de

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + (y(x))^2 = 9,$$

podemos começar por derivar ambos os membros da igualdade em ordem a x e obter, usando a regra da cadeia,

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Noutra notação temos $2x + 2yy' = 0$. Assim, quando $y(x) \neq 0$, temos que

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

Exercício 2.15 *Determine* y' *sabendo que* $5x\cos y = e^{x+y}$.

A regra da cadeia é, geralmente, útil quando pretendemos relacionar taxas de variação de duas quantidades $x(t)$ e $y(t)$ que dependem de uma terceira quantidade, normalmente o tempo t.

Exercício 2.16 *Uma escada de 3 metros de comprimento está encostada a uma parede vertical. Se o fundo da escada deslizar horizontalmente afastando-se da parede a uma taxa de* 0,3 *metros por segundo, a que velocidade está o topo da escada a deslizar ao longo da parede?*

Resolução: Consideremos $x(t)$ a distância horizontal da parede à base da escada e $y(t)$ a distância vertical do solo ao topo da escada, num dado instante t. Temos que $x'(t) = 0{,}3$ metros por segundo. Queremos determinar $y'(t)$. Como

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = 9,$$

aplicando a regra da cadeia temos que

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0.$$

Logo, se $y(t) \neq 0$, concluímos que

$$y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}x'(t) = -0{,}3\frac{x(t)}{y(t)}. \qquad \square$$

2.4 Indeterminações

Quando se estudam limites encontram-se, frequentemente, expressões da forma

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)},$$

onde tanto f como g têm limite zero quando x tende para c. Em tais casos diz-se que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ("zero sobre zero") em $x = c$, uma vez que nada pode ser dito quanto ao seu limite. Nestes casos, também se diz que estamos perante uma indeterminação $\frac{0}{0}$.

Noutras ocasiões, quando f e g se tornam positiva ou negativamente infinitos, quando x tende para c, dizemos que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ ("infinito sobre infinito") em $x = c$. Um exemplo onde tal acontece é no caso em que se pretende calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Vamos estabelecer a chamada regra de L'Hospital e ilustrar como pode ser usada para estudar diferentes formas indeterminadas. Parece que Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital (1661–1704) aprendeu esta regra com o seu professor Johann Bernoulli (1667–1748).

Teorema 2.19 (Regra de L'Hospital) *Sejam* f *e* g *funções diferenciáveis em todos os pontos de* $]a,b[$, *excepto, possivelmente, em* $c \in]a,b[$. *Suponhamos que* $g'(x) \neq 0$, *para* $x \neq c$, *e* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *tem a forma indeterminada* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *em* $x = c$. *Então, se existir* $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *finito ou infinito, o limite* $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ *também existe e*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Suponhamos que $\frac{f(x)}{g(x)}$ toma a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em $x = c$ e que

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

para algum número real L. Queremos provar que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Para podermos considerar o Teorema de Rolle, f e g terão que ser contínuas. Consideremos, então, as funções contínuas $\overline{f}$ e $\overline{g}$ tais que

$$\overline{f}(x) = f(x), \quad x \neq c, \qquad \text{e} \qquad \overline{f}(c) = \lim_{x \to c} f(x) = 0$$

$$\overline{g}(x) = g(x), \quad x \neq c, \qquad \text{e} \qquad \overline{g}(c) = \lim_{x \to c} g(x) = 0.$$

Notemos que

$$\lim_{x \to c} \overline{f}(x) = \lim_{x \to c} f(x), \qquad \lim_{x \to c} \overline{g}(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

e que, para todo o $x \neq c$, $\overline{f}'(x) = f'(x)$ e $\overline{g}'(x) = g'(x)$. Consideremos agora

$$F(x) = \overline{f}(x) - \lambda \overline{g}(x),$$

onde λ é um valor real tal que $F(x) = F(c)$. Para que tal aconteça temos que ter

$$\lambda = \frac{\overline{f}(x) - \overline{f}(c)}{\overline{g}(x) - \overline{g}(c)} = \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}, \qquad \overline{g}(x) \neq 0.$$

Aplicando o Teorema de Rolle a F (contínua e diferenciável) temos que existe um $\xi \in]x, c[$ tal que $F'(\xi) = 0$. Mas isso implica que

$$\overline{f}'(\xi) - \lambda \overline{g}'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\overline{f}'(\xi)}{\overline{g}'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

donde se conclui que

$$\frac{\overline{f}(\xi)}{\overline{g}(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tomando $x \to c$ temos que $\xi \to c$ e, assim sendo, como existe limite do quociente das derivadas temos que

$$\lim_{x \to c} \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Para os casos em que

$$\lim_{x \to c} \frac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)} = \pm\infty$$

a demonstração é análoga. Para a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ o resultado também é válido mas a demonstração é mais difícil. $\square$

É possível demonstrar que a regra de L'Hospital também é válida para limites laterais e para limites quando $x \to \pm\infty$.

Exercício 2.17 *Prove que:*

1. *a exponencial cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente, isto é,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty, \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+;$$

2. *o logaritmo cresce mais devagar do que qualquer potência do seu argumento, isto é,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0, \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

Consideremos agora outras formas indeterminadas que se podem reduzir ao caso $\frac{0}{0}$.

Indeterminação $0 \times \infty$. Suponhamos que

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = \infty.$$

Então $f(x)g(x)$ é uma forma indeterminada $0 \times \infty$ em $x = c$. Nestes casos faz-se

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

que já é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Indeterminação $\infty - \infty$. Consideremos o seguinte exemplo

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^x - 1} - \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}.$$

Neste caso estamos na presença de uma forma indeterminada $\infty - \infty$ em $x = 0^+$. Mas

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

que já é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Indeterminações 0^0, ∞^0 e 1^∞. Estas indeterminações surgem quando se consideram limites de expressões da forma $f(x)^{g(x)}$. Neste caso faz-se

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$$

e calcula-se

$$\lim_{x\to c} \ln y = \lim_{x\to c} g(x) \ln f(x)$$

que pode ser tratado como nos casos precedentes. Se:

- $\lim_{x\to c} \ln y = L$ então $\lim_{x\to c} y = e^L$;
- $\lim_{x\to c} \ln y = +\infty$ então $\lim_{x\to c} y = +\infty$;
- $\lim_{x\to c} \ln y = -\infty$ então $\lim_{x\to c} y = 0$.

A regra de L'Hospital só se pode aplicar quando necessária. Note-se que, por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = +\infty$$

e se aplicarmos duas vezes a regra de L'Hospital obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1,$$

o que nos permite concluir que, neste caso, a regra não pode ser aplicada.

2.5 Derivadas parciais e vector gradiente

Nesta secção vamos considerar funções reais com mais do que uma variável real real. Consideremos, para isso, um subconjunto não vazio $D \subseteq \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$. Uma função real de n variáveis reais é uma correspondência que a cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ associa um e um só $y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. É usual escrever-se $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. Assim temos

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

A y chama-se variável dependente e a $x_1, \ldots, x_n$ variáveis independentes.

O domínio de f é D e o contradomínio é $\{f(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in D\}$. O gráfico de f é o subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) : (x_1, \ldots, x_n) \in D\}.$$

Em $\mathbb{R}^2$ é usual a notação $z = f(x, y)$ e $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$; em $\mathbb{R}^3$ usa-se a notação $w = f(x, y, z)$ e $S = \{(x, y, z, w) : w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\}$.

A título de exemplo, consideremos

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & z = x^2 + y^2. \end{array}$$

Neste caso temos que o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, o contradomínio é $\mathbb{R}_0^+$ e o gráfico é $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$. Esta superfície é um parabolóide elíptico.

Outro exemplo é dado por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & z = \frac{\log(y-x)}{x^2+y^2}. \end{array}$$

Neste caso temos que o domínio de f é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$. O contradomínio é, no entanto, mais difícil de obter, bem como o seu gráfico.

Este exemplo mostra como pode ser complicado estudar uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ geral e, em particular, obter o seu gráfico.

Definição 2.9 (Curva de nível) *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & z = f(x, y) \end{array}$$

e k um número real pertencente ao contradomínio de f. A curva de nível *de f de valor k é dada por $\{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$.*

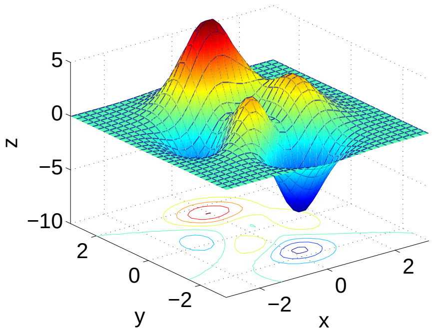

Figura 2.3: Curvas de nível.

Por outras palavras, a curva de nível de f de valor k é a projecção ortogonal, sobre o plano $x \circ y$, da intersecção do plano $z = k$ com o gráfico de f, isto é, com a superfície de equação $z = f(x, y)$.

Para o caso em que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & z = x^2 + y^2 \end{array}$$

a curva de nível de f de valor k é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ que é uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$ no plano $x \circ y$ (se $k = 0$ é um ponto).

Em $\mathbb{R}^3$, em vez de curvas de nível, temos superfícies de nível.

Definição 2.10 (Superfície de nível) *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & w = f(x,y,z) \end{array}$$

e k um número real pertencente ao contradomínio de f. A superfície de nível *de f de valor k é dada por $\{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = k\}$.*

Considere-se, por exemplo,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & w = x^2 + y^2 + z^2. \end{array}$$

Neste caso, o domíno de f é $\mathbb{R}^3$, o contradomínio é $\mathbb{R}_0^+$, a superfície de nível de f de valor k é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$ que é uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$ no plano $x \circ y$ (se $k = 0$ é um ponto) e o gráfico de f é

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = x^2 + y^2 + z^2\}.$$

Como é óbvio, não é possível desenhar este gráfico.

2.5.1 Alguns conceitos topológicos

Para estudar funções reais com n variáveis reais é necessário introduzir alguns conceitos topológicos em $\mathbb{R}^n$. Em primeiro lugar, definimos o espaço $\mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

com as operações usuais de adição e multiplicação por um escalar, isto é, dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e ainda $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Iremos usar as seguintes notações para representar os elementos (ou vectores) de $\mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ usa-se também a notação $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

Vamos apresentar algumas operações muito úteis sobre vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.11 (Produto interno) *Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, o seu* produto interno *é um número real definido por*

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é também usual a notação $< x, y >= \vec{x} \cdot \vec{y}$.

A operação produto interno verifica as seguintes propriedades:

1. $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $< x, y >=< y, x >$;
3. $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$;
4. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >=< x, \alpha y >$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Com a noção de produto interno podemos definir norma euclidiana de um vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ na forma

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Usando as propriedades do produto interno podem provar-se as seguintes propriedades da norma euclidiana:

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Exercício 2.18 *Prove as propriedades do produto interno e da norma que acabámos de apresentar.*

Para $x, y \in \mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) prova-se que

$$< x, y >= \|x\|\|y\| \cos\theta,$$

com $\theta \in [0, \pi]$ o ângulo formado pelos vectores x e y. É também possível generalizar este resultado para $\mathbb{R}^n$.

Dois vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais se $< x, y >= 0$. Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dois vectores não nulos são ortogonais se e só se $\theta = \pi/2$, isto é, se e só se forem perpendiculares.

Ao vector unitário (de norma igual a 1)

$$\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}$$

chamamos versor de x.

O conceito de norma é útil para definir o conceito de distância entre dois vectores de $\mathbb{R}^n$. Assim, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a distância entre eles é o número real

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Em $\mathbb{R}$ temos que $d(x, y) = |x - y|$.

Definição 2.12 (Bola) *Chamamos* bola aberta *de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta \in \mathbb{R}^+$ ao conjunto*

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \delta\}$$

e bola fechada *de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta \in \mathbb{R}^+$ ao conjunto*

$$\bar{B}(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq \delta\}.$$

Exercício 2.19 *Represente graficamente as bolas $B(a, \delta)$ e $\bar{B}(a, \delta)$, quando $a \in \mathbb{R}^n$, com $n = 1, 2, 3$.*

2.5.2 Limites e continuidade

Para efectuar um estudo sério e rigoroso das funções reais de n variáveis reais teremos, tal como no caso unidimensional, que definir as noções de limite e de função contínua antes de falar na noção de diferenciabilidade.

Definição 2.13 (Limite) *Sejam*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x), \end{array}$$

a um ponto de $\mathbb{R}^n$ tal que, para todo o $\delta > 0$, $(B(a, \delta) \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset$ e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que L é o limite *de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se e só se, para todo o $\epsilon > 0$ podemos encontrar (pelo menos) um $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in D$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. Simbolicamente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Em $\mathbb{R}$ temos que $\|x-a\| = |x-a|$ e as definições de limite são coincidentes. Também neste caso se pode provar que se existir limite esse limite é único.

A definição de limite refere a distância entre x e a mas não o modo como x se aproxima de a. Portanto, se existir o limite L, ele é independente da trajectória descrita por x na sua aproximação a a.

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a = (a_1, a_2) \in D'$, onde D' é o derivado de D, isto é, o conjuntos dos pontos de acumulação de D que é definido como sendo o conjunto de todos os pontos a tais que, para todo o $\delta > 0$, $(B(a,\delta) \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset$. Quando consideramos que (x, y) se aproxima de (a_1, a_2) ao longo de uma determinada trajectória, isto é, quando $(x, y) \in \mathcal{C}$, sendo $\mathcal{C}$ uma curva que vai de (x, y) a (a_1, a_2), estamos a considerar o limite trajectorial

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2)\\(x,y)\in\mathcal{C}}} f(x,y).$$

Claro que se existir

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$$

todos os limites trajectoriais (no ponto (a_1, a_2)) devem existir e ser iguais. Daí que se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2)\\(x,y)\in\mathcal{C}_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2)\\(x,y)\in\mathcal{C}_2}} f(x,y)$$

podemos concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$$

não existe.

Apesar de não irmos aprofundar a noção de limite para funções de várias variáveis, convém referir que o seu estudo é muito mais complexo do que o caso em que se considera apenas uma única variável. Para o facilitar existem propriedades e teoremas em muito semelhantes aos do caso unidimensional.

Definição 2.14 (Função contínua) *Sejam*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x), \end{array}$$

e a um ponto de D. Se $a \in D'$ diz-se que f é contínua *em a se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se $a \notin D'$ (a diz-se um ponto isolado*), por definição, f é contínua em a. O* domínio de continuidade *de f é o subconjunto de D constituído pelos pontos onde f é contínua.*

Para aprofundar melhor os conceitos de limite e função contínua em $\mathbb{R}^n$ é conveniente consultar a bibliografia. De referir, no entanto, que esse estudo não irá ser relevante para o que se irá apresentar seguidamente.

2.5.3 Derivação parcial e vector gradiente

Consideremos

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

e suponhamos que fixamos a variável y no valor y_0. Podemos definir a função

$$\begin{array}{rccc} g: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = f(x,y_0). \end{array}$$

Se g for diferenciável em x_0, à derivada $g'(x_0)$ damos o nome de derivada parcial de f em ordem a x, no ponto (x_0,y_0) e escrevemos

$$g'(x_0) = f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

De igual modo definimos a derivada parcial de f em ordem a y, no ponto (x_0,y_0) e escrevemos

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}.$$

Fazendo variar (x_0,y_0) temos a seguinte definição.

Definição 2.15 (Derivada parcial) *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y). \end{array}$$

As funções reais de duas variáveis reais

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \quad e \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h},$$

caso façam sentido, designam-se por derivada parcial *de f em ordem a x e em ordem a y, respectivamente, e notam-se por*

$$f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv D_x f \equiv D_1 f \quad e \quad f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv D_y f \equiv D_2 f.$$

Para calcular $f_x(x,y)$ (respectivamente $f_y(x,y)$), usa-se a seguinte regra prática: considera-se y (respectivamente x) como constante e deriva-se a expressão em ordem a x (respectivamente y).

As derivadas parciais de uma função de duas variáveis reais x e y em ordem a x e a y são também funções das mesmas variáveis. Então, tem sentido considerar

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy}.$$

A estas funções chamamos derivadas parciais de segunda ordem.

Exercício 2.20 *Determine as derivadas parciais de segunda ordem de:*

1. $f(x,y) = x^2 + y\cos(xy)$;
2. $f(x,y) = y \operatorname{sen} x + x \operatorname{tg} y$.

As derivadas parciais de ordem m, com m superior a dois, definem-se de maneira óbvia. Por exemplo,

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right).$$

O próximo teorema, apresentado sem demonstração, é muito importante e é conhecido por Teorema de Schwarz ou Teorema de Clairout.

Teorema 2.20 (Schwarz) *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

uma função cujas derivadas parciais f_x, f_y e f_{xy} existem numa bola aberta contida em D e centrada em $(x_0,y_0) \in D$ e são contínuas em (x_0,y_0). Então existe $f_{yx}(x_0,y_0)$ e

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0).$$

Consideremos agora

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\ldots,x_n), \end{array}$$

com $n \geq 2$. A noção de (função) derivada parcial generaliza-se facilmente para este caso. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{h},$$

para $i = 1,\ldots,n$, é a derivada parcial de f em ordem a x_i. Tal como para $n = 2$ temos as notações

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f_{x_i} \equiv D_{x_i} f \equiv D_i f.$$

As derivadas parciais de ordem m, $m \geq 2$, definem-se, neste caso, de modo análogo ao anterior.

Apresentemos agora a noção de função diferenciável.

Definição 2.16 (Função diferenciável) *Uma função*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x,y) & \longmapsto & z = f(x,y) \end{array}$$

diz-se diferenciável *em $(x_0,y_0) \in D$ se existir uma bola aberta B centrada em (x_0,y_0) e contida em D tal que, se $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in B$, com $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$, o acréscimo*

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

na variável z se puder escrever na forma

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \xi(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \eta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

com

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \xi(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \eta(\Delta x,\Delta y) = 0.$$

Esta definição é muito técnica e não vai ser usada por nós na prática. Para isso, iremos recorrer ao seguinte teorema que apresentamos sem demonstração.

Teorema 2.21 *Seja $z = f(x, y)$, com f definida numa bola aberta B de centro em (x_0, y_0). Se as derivadas parciais f_x e f_y de f existirem em B e forem contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável nesse ponto.*

Notemos que o recíproco deste teorema pode não ser verdadeiro.

Neste curso vamos apenas considerar funções diferenciáveis. Para funções reais de n variáveis reais é usual a seguinte notação: dados $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ e $S \subseteq D$, diz-se que f é de classe C^k em S se f admite derivadas parciais contínuas até à ordem k em todos os pontos de S.

Definição 2.17 (Gradiente) *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

e $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$. O vector gradiente de f em x_0 é o vector

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.21 *Determine o vector gradiente de $f(x, y, z) = x \cos y + z^2 y$ no ponto $(1, \pi, 0)$.*

Resolução: É muito fácil de ver que

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos y \\ -x \operatorname{sen} y + z^2 \\ 2zy \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(1, \pi, 0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Vamos terminar esta secção com algumas aplicações do vector gradiente.

Consideremos, a título de exemplo, o mapa meteorológico dado na Figura 2.4 onde estão indicadas algumas curvas de nível relativas à função temperatura $T(x, y)$, também chamadas curvas isotérmicas. A derivada parcial T_x num ponto como Coimbra, por exemplo, dá-nos a taxa de variação da temperatura em relação à distância quando viajamos para Leste. Por outro lado, a derivada parcial T_y nesse ponto dá-nos a taxa de variação da temperatura em relação à distância quando viajamos para Norte. E se desejarmos conhecer a taxa de variação da temperatura quando viajamos noutra direcção qualquer?

Suponhamos que queremos determinar a taxa de variação de $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0), na direcção do vector u, suposto unitário (versor), isto é, $\|u\| = 1$. Essa taxa de variação é dada pela chamada derivada direccional. Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x \in D$, a derivada direccional de f na direcção do vector unitário u é dada por

$$D_u f(x) =< \nabla f(x), u > .$$

Figura 2.4: Linhas isotérmicas.

Exercício 2.22 *Determine a derivada direccional de* $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ *no ponto* $(2, -1)$ *na direcção de* $u = (2, 5)$.

Resolução: Temos que

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

e, como tal,

$$\nabla f(2, -1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Assim, de acordo com a definição e uma vez que u não é um vector unitário,

$$D_u f(2, -1) = \frac{< \nabla f(x), u >}{\|u\|} = \frac{-4 \times 2 + 8 \times 5}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{32}{\sqrt{29}}. \quad \square$$

Podemos também querer saber em que direcção uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ varia mais rapidamente e qual a sua taxa de variação.

Teorema 2.22 *Seja* f *uma função diferenciável. O valor máximo da derivada direccional* $D_u f(x)$ *é* $\|\nabla f(x)\|$ *e ocorre quando* u *tem a mesma direcção e sentido do vector gradiente* $\nabla f(x)$.

Demonstração: Seja θ o ângulo que $\nabla f(x)$ faz com o vector unitário u. Temos que

$$D_u f(x) =< \nabla f(x), u >= \|\nabla f(x)\| \|u\| \cos\theta = \|\nabla f(x)\| \cos\theta.$$

Ora, o valor máximo ocorre quando $\cos\theta = 1$, isto é, quando $\theta = 0$. Assim sendo, o máximo ocorre quando u tem a mesma direcção e sentido que $\nabla f(x)$ e tem o valor $\|\nabla f(x)\|$. $\square$

2.5.4 Regra da cadeia

Tal como para funções reais de variável real, a regra da cadeia para funções com várias variáveis reais dá-nos uma regra prática para diferenciar uma função composta.

Teorema 2.23 (Regra da cadeia) *Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é diferenciável como função de t e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

O próximo exercício evidencia uma aplicação útil da regra da cadeia.

Exercício 2.23 *A pressão P (em quilopascal), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvin) de uma mole de gás ideal estão relacionados pela fórmula*

$$PV = 8{,}31T.$$

Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é de 300 K e aumenta a uma taxa de $0{,}1$ K/s e o volume é de 100 L e aumenta a uma taxa de $0{,}2$ L/s.

Resolução: Temos que,

$$P(T(t), V(t)) = 8{,}31\frac{T(t)}{V(t)},$$

sendo t a variável independente “tempo”. Então, de acordo com a regra da cadeia, a variação da pressão ao longo do tempo é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt}(T,V) &= \frac{\partial P}{\partial T}(T,V)\frac{dT}{dt}(T,V) + \frac{\partial P}{\partial V}(T,V)\frac{dV}{dt}(T,V)\\ &= 8{,}31\frac{1}{V}\frac{dT}{dt}(T,V) - 8{,}31\frac{T}{V^2}\frac{dV}{dt}(T,V).\end{aligned}$$

De acordo com os dados do problema temos que

$$\frac{dP}{dt}(300,100) = 8{,}31\frac{1}{100}0{,}1 - 8{,}31\frac{300}{100^2}0{,}2 = -0{,}04155. \quad \square$$

Consideremos agora o caso em que $z = f(x, y)$ e $x = g(t, s)$, $y = h(t, s)$. Então, de forma idêntica ao efectuado no teorema anterior, temos que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Exercício 2.24 *Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ e $z = r^2s\,\mathrm{sen}\,t$, determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial s}$, quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$.*

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\ &= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2\,\mathrm{sen}\,t).\end{aligned}$$

Quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$ temos $x = 2$, $y = 2$ e $z = 0$. Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 64 \times 2 + 16 \times 4 + 0 \times 0 = 192. \quad \square$$

Exercício 2.25 *Se $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ e f é diferenciável, mostre que g satisfaz a equação*

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Resolução: Seja $x = s^2 - t^2$ e $y = t^2 - s^2$. Então $g(s,t) = f(x,y)$. Pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t).\end{aligned}$$

Então

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. \quad \square$$

Vamos agora apresentar a regra da cadeia para funções reais de n variáveis reais. Seja y uma função diferenciável de n variáveis reais $x_1, \ldots, x_n$, onda cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, \ldots, t_m$. Então y é uma função diferenciável de $t_1, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

2.6 Diferenciais e suas aplicações

Vamos terminar este capítulo com a introdução da noção de diferencial e referir algumas das suas aplicações. Comecemos por considerar uma função f real de variável real

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Em muitas aplicações a variável independente x está sujeita a pequenas variações Δx chamadas acréscimos de x. Para calcular o acréscimo Δy correspondente à variável dependente y fazemos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Se f é diferenciável temos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Assim, quando $\Delta x \approx 0$, o acréscimo Δy pode ser aproximado por $f'(x)\Delta x$, isto é, $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Uma noção útil é a noção de diferencial. O diferencial dx da variável independente x é dado pelo seu acréscimo, isto é, $dx = \Delta x$; o diferencial dy da variável dependente y é dado por $dy = f'(x)dx$.

Exercício 2.26 *O raio de uma esfera mede 21 cm, valor obtido com um erro máximo de* 0,05 *cm. Qual o erro máximo cometido no cálculo do volume da esfera quando é usado esse valor para o seu raio?*

Resolução: Se o raio da esfera é r, o seu volume é

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente ao valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pelo diferencial

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Quando $r = 21$ cm e $dr \leq 0{,}05$ cm, temos que

$$dV \leq 4\pi(21)^2 0{,}05\text{cm}^3 \approx 277\text{cm}^3.$$

Assim o erro (absoluto) cometido no cálculo do volume é majorado por 277cm^3.

Também se pode determinar o majorante para o erro relativo

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}.$$

Assim, o erro relativo cometido na aproximação do volume é cerca de 3 vezes o erro relativo cometido na aproximação do raio. Como o erro relativo do raio é

$$\frac{dr}{r} \leq \frac{0{,}05}{21} \approx 0{,}0024,$$

isto é 0,24%, temos que o erro relativo cometido na aproximação do volume inferior a 0,007, ou seja, a 0,7%. □

Vamos considerar a generalização de diferencial, apresentado no caso unidimensional, para o caso em que temos $n \geq 2$ variáveis. Para $n = 2$ temos a seguinte definição (para o caso geral a definição é semelhante).

Definição 2.18 (Diferencial) *Seja $z = f(x, y)$, com f uma função diferenciável em (x_0, y_0) e Δx e Δy os* acréscimos *das variáveis independentes x e y em (x_0, y_0). Temos que: os* diferenciais *dx e dy das variáveis independentes em (x_0, y_0) são $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$; o* diferencial *ou* diferencial total *dz da variável dependente z em (x_0, y_0) e dado por*

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Uma vez que a função f é diferenciável (ver Definição 2.16), o acréscimo

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

é dado por

$$\Delta z = dz + \xi(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \eta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

com $\xi, \eta \longrightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow 0$. Assim sendo, quando Δx e Δy são pequenos, o acréscimo Δz da variável dependente pode ser aproximado pelo diferencial, isto é,

$$\Delta z \approx dz.$$

As noções de diferencial e diferenciabilidade podem ser generalizadas para funções

$$\begin{array}{rccc} f: & D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & y=f(x)=f(x_1,\ldots,x_n). \end{array}$$

Vamos apenas apresentar a generalização da noção de diferencial. Assim, se Δx_i for o acréscimo de x_i, $i=1,\ldots,n$, temos que o acréscimo em y é dado por

$$\Delta y = f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n) - f(x_1,\ldots,x_n) = f(x+\Delta x) - f(x),$$

com $\Delta x = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$. No que diz respeito ao diferencial dy temos que

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)dx_i,$$

com $dx_i = \Delta x_i$, $i=1,\ldots,n$. Com a notação $dx=(dx_1,\ldots,dx_n)$ temos que

$$dy = < \nabla f(x), dx > .$$

Exercício 2.27 *A resistência de um fio é directamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado do seu diâmetro. Se o comprimento for medido com um erro de* 1% *e o diâmetro com um erro de* 3%*, qual a percentagem máxima para o erro no cálculo da resistência?*

Resolução: Temos que

$$R = k\frac{L}{D^2}$$

sendo k a constante de proporcionalidade, R a resistência, L o comprimento e D o diâmetro. Assim sendo,

$$dR = k\frac{1}{D^2}dL - 2k\frac{L}{D^3}dD.$$

Como queremos percentagem de erro, estamos a considerar erros relativos (adimensionais). Assim

$$\left|\frac{dR}{R}\right| \leq \left|k\frac{1}{D^2}\frac{dL}{R}\right| + \left|2k\frac{L}{D^3}\frac{dD}{R}\right|.$$

Atendendo à definição de R temos

$$\left|\frac{dR}{R}\right| \leq \left|\frac{dL}{L}\right| + 2\left|\frac{dD}{D}\right|.$$

Assim, de acordo com os dados do problema,

$$\left|\frac{dR}{R}\right| \leq 0{,}01 + 2\times 0{,}03 = 0{,}07,$$

ou seja, o erro para o cálculo da resistência é inferior a 7%. $\square$

Exercício 2.28 *O período T de oscilação de um pêndulo obtém-se usando a fórmula*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

onde ℓ é o comprimento do pêndulo e g a aceleração da gravidade. Determine o erro que se comete ao calcular T em função de pequenos erros $\Delta\ell$ e Δg resultantes das medições de ℓ e g, respectivamente.

2.7 Exercícios práticos

Seguem-se alguns exercícios destinados a serem resolvidos nas aulas práticas.

Exercício 2.29 *Determine as derivadas das funções seguintes:*

1. $y = \dfrac{5+6x}{1-x^6}$; 2. $y = \sqrt[6]{(x^2+1)^5}$; 3. $y = \cos(1+\operatorname{tg} x)$;

4. $y = 6\operatorname{sen}(x+1) + 3\cos(7x)$; 5. $y = a^x + x^{\ln x}$; 6. $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$;

7. $y = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$.

Exercício 2.30 *Determine as derivadas das funções seguintes:*

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ x + x^3, & \text{se } x < 0; \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} -2x-1, & \text{se } x \leq -1, \\ x^2\,, & \text{se } -1 < x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x < 4, \\ 12-2x, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$

Exercício 2.31 *Mostre que as funções seguintes são contínuas, mas não deriváveis em alguns pontos:*

1. $f(x) = 1 + |\operatorname{sen} x|, \quad x \in [0, 2\pi]$; 2. $g(x) = \begin{cases} x + \ln(2-x), & \text{se } x < 1, \\ e^{1-x}, & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Exercício 2.32 *Determine os valores máximo e mínimo das funções abaixo definidas, no intervalo indicado.*

1. $f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [0,1]$; 2. $f(x) = |x|, \quad x \in [-1,1]$;

3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in [0,2]$.

Exercício 2.33 *Averigúe se as funções a seguir indicadas têm algum extremo relativo para $x = 2$:*

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2, \\ 4, & \text{se } x = 2, \\ x+5, & \text{se } x > 2; \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2, \\ 1, & \text{se } x = 2, \\ -x^2+8, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

Exercício 2.34 *A variação da temperatura (em graus Fahrenheit) de um dado alimento num frigorífico pode ser bem modelada pela seguinte função:*

$$T(t) = 10\frac{4t^2 + 16t + 75}{t^2 + 4t + 10}, \ t \geq 0,$$

onde t representa o tempo decorrido em horas.

1. *Qual é a temperatura inicial do alimento?*

2. *Qual a temperatura limite a que poderá chegar o alimento se se deixar indefinidamente no frigorífico?*

3. *Determine a taxa de alteração de T para $t = 10$ horas.*

Exercício 2.35 *A eficácia de determinado analgésico t horas após ter sido ministrado (tomado) pode ser significativamente bem modelada pela seguinte função*

$$E(t) = \frac{1}{27}\left(9t + 3t^2 - t^3\right), \ 0 \leq t \leq 5.$$

Determine a taxa de alteração de E relativamente a t nos seguintes casos: passado 1 hora; passado 4 horas.

Exercício 2.36 *A concentração $[S]$ de uma certa substância durante uma reacção enzimática é dada por*

$$[S] = [S_0]e^{-\frac{k}{2,3}t}$$

onde t é o tempo decorrido em segundos, k é uma constante e $[S_0]$ é a concentração da substância no início da reacção.

1. *Arbitrando valores para $k > 0$ e $[S_0]$ trace um gráfico de $[S]$ em função de t.*

2. *Mostre que usando uma mudança de variáveis conveniente se obtém um modelo linear simples (expresso por uma função cujo esboço do gráfico é uma recta).*

Exercício 2.37 *Pensa-se que uma quantidade que está a ser objecto de estudo cresce exponencialmente com o tempo. Várias medições deram os seguintes resultados:*

Tempo (em minutos)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Quantidade	*2*	*15*	*111*	*844*	*6328*	*47461*

.

Será de facto um crescimento exponencial? (Sugestão: procurar uma função definida por uma expressão da forma $ce^{\alpha t}$ onde c e α são constantes a determinar.)

Exercício 2.38 *Para temperaturas T (em °C) no intervalo $[-50, 150]$ a pressão P de uma botija de gás varia com a temperatura segundo uma lei do tipo $P(T) = MT + b$, onde M e b são constantes. Suponha que um aumento de 40 graus na temperatura causa um aumento na pressão na ordem dos 50 milibares.*

1. *Qual a taxa de variação da pressão em relação à temperatura?*

2. *Que mudança de temperatura provocaria uma queda de pressão da ordem de 9 milibares?*

Exercício 2.39 *Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é dada por $I = V/(R + r)$. Se a força resultante é dada por $P = I^2 R$, mostre que a força máxima ocorre se $R = r$.*

Exercício 2.40 *A área da pupila de um olho doente, R, varia com a luminosidade x de uma fonte de luz, de acordo com a igualdade*

$$R(x) = \frac{40 + 24\sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}.$$

1. *Sabendo que a sensibilidade do olho, S, é dada pela taxa de variação da área da pupila, escreva S em função de x.*
2. *Determine o valor da luminosidade para o qual é máxima a área da pupila.*
3. *O que acontece aos valores de R e S para níveis muito elevados de luminosidade?*

Exercício 2.41 *Um fabricante de frascos tem um custo de produção diário*

$$c(x) = 180 - 10x + \frac{1}{4}x^2,$$

em que x representa o número de frascos produzidos. Quantos frascos deverá fabricar por dia, por forma a minimizar o custo?

Exercício 2.42 *Para $f(x) = |x|$, mostre que $f(-1) = f(1)$, mas $f'(c) \neq 0$ para todo o c no intervalo $]-1, 1[$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?*

Exercício 2.43 *Use os Teoremas de Bolzano e de Rolle para provar que:*

1. *$f(x) = x^3 + 3x + 2$ tem um zero real;*
2. *$f(x) = x^3 - 3x + 1$ tem três zeros reais.*

Exercício 2.44 *Prove que se $a > 0$, a equação cúbica $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real, qualquer que seja o valor de b.*

Exercício 2.45 *Determine o domínio de definição, o domínio de continuidade e a segunda derivada da função:*

$$f(x) = \begin{cases} -23 + 4\log_{e^2}|x + 6|, & \text{se } x > -5, \\ 23\ \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4} + 5\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{235}{2} - 26x, & \text{se } x \leq -5. \end{cases}$$

Exercício 2.46 *Represente graficamente as seguintes funções:*

$$1.\ y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2};\quad 2.\ y = 3x^3 - 9x + 1;\quad 3.\ y = \frac{2x}{x^2 - 1};\quad 4.\ y = \sqrt{3x^2 - 2}.$$

Exercício 2.47 *Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Indique o domínio de f e mostre que f é ímpar. Será injectiva? Esboce o gráfico da restrição de f a $]-\infty, 0[$ e, usando o facto de f ser ímpar, complete o gráfico de f.*

Exercício 2.48 *Determine:*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$; 6. $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$;

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$ 12. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\operatorname{sen} x)^{1/x}$.

Exercício 2.49 *Verificando que não pode usar a regra de L'Hospital, calcule os seguintes limites:*

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\cos x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

Exercício 2.50 *Calcule as derivadas parciais de* $1^{\underline{a}}$ *ordem das funções seguintes:*

1. $f(x,y) = e^{2xy^3}$;
2. $f(x,y) = \ln(e^x + x^y)$;
3. $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + \cos(x-3y)$;
4. $f(x,y) = (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{tg} y}$;
5. $f(x,y) = \cos(y\sqrt{x^2+1})$;
6. $f(x,y) = (\ln y)^{x+\operatorname{sen} y}$;
7. $f(x,y) = y^x \operatorname{tg}(x+e^y)$;
8. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(xy)$;
9. $f(x,y) = x \operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})$;
10. $f(x,y) = y^2 \ln(x\ln y)$;
11. $f(x,y) = y^{e^x} \sec(\pi + \ln y)$.

Exercício 2.51 *Calcule as derivadas parciais de* $2^{\underline{a}}$ *ordem das funções seguintes:*

1. $f(x,y) = \ln(x+y) + \ln(x-y)$;
2. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$;
3. $f(x,y) = x^2 e^{yx} + y\ln x$.

Exercício 2.52 *Sendo* $w = \cos(x-y) + \ln(x+y)$, *prove que*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Exercício 2.53 *A lei dos gases para uma massa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que*

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

Exercício 2.54 *Suponhamos que a altura de um terreno no ponto de coordenadas (x, y) é bem modelada pela função*

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}(2 - e^{-(x^2+y^2)}).$$

1. *Determine a taxa de variação da altura no sentido Norte-Sul.*
2. *Em que direcção e sentido, no ponto $(1, 1)$, a altura do terreno varia mais rapidamente?*

Exercício 2.55 *Suponha que a temperatura num ponto (x, y, z) é dada por*

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$

onde T é medida em graus Celsius e x, y, z em metros.

1. *Em que direcção e sentido, no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente?*
2. *Qual a taxa máxima de aumento?*

Exercício 2.56 *Numa colmeia, cada célula é um prisma regular hexagonal, aberto num extremo com uma ângulo triédrico no outra extremo. Acredita-se que as abelhas constroem seus favos de modo a minimizar a área da superfície para um dado volume fixo, usando desde modo a menor quantidade de cera possível. O exame dos favos tem mostrado que a medida do ângulo de ápice θ é impressionantemente consistente. Pode provar-se que a área da superfície é dada por*

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg}\theta + (3s^2\sqrt{3}/2)\operatorname{cosec}\theta,$$

onde s, é o comprimento dos lados do hexágono e h a sua altura.

1. *Calcule $\dfrac{dS}{d\theta}$.*
2. *Determine o ângulo que as abelhas preferem.*
3. *Determine a área superfície mínima escolhida.*

Exercício 2.57 *Use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{dz}{dt}$, para:*

1. $z = x^2 y + x y^2, \quad x = 2 + t^4, \quad y = 1 - t^3$;
2. $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}$.

Exercício 2.58 *Use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ nos seguintes casos:*

1. $z = x^2 + x y + y^2, \quad x = s + t, \quad y = s t$;
2. $z = x/y, \quad x = se^t, \quad y = 1 + s e^{-t}$.

Exercício 2.59 *A temperatura num ponto* (x, y) *é dada por* $T(x, y)$*, medida em graus Celcius. Um insecto rasteja de modo a que a sua posição depois de t segundos é dada por*

$$x = \sqrt{1+t}, \qquad y = 2 + t/3,$$

onde x *e* y *são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz* $T_x(2, 3) = 4$ *e* $T_y(2, 3) = 3$*. Quão rápido a temperatura aumenta no deslocamento do insecto após* 3 *segundos.*

Exercício 2.60 *A produção de trigo,* W*, num determinado ano, depende da temperatura média* T *e da quantidade anual de chuva* R*. Cientistas estimam que a temperatura média anual cresce à taxa de* 0,15*/ano, e a quantidade anual de chuva decresce à taxa de* 0,1 *cm/ano. Também estimam que, no corrente nível de produção,* $\partial W/\partial T = -2$ *e* $\partial W/\partial R = 8$.

1. *Qual o significado do sinal dessas derivadas parciais?*
2. *Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo ao longo do tempo.*

Exercício 2.61 *Determine o diferencial da função definida por:*

1. $z = x^2\, y^3$;
2. $z = \ln(2x - 3y)$.

Exercício 2.62 *O comprimento e a largura de um rectângulo foram medidos como* 30 *cm e* 24 *cm, respectivamente, com um erro máximo de* 0,1 *cm. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do rectângulo.*

Exercício 2.63 *Qual é o acréscimo, aproximado, sofrido pelo volume de um cilindro, quando o raio da base,* $r = 30$ *cm, é aumentado de* 5 *cm e a altura,* $h = 1{,}2$ *m, é reduzida de* 5 *cm?*

Exercício 2.64 *A resistência total* R *de três resistências* R_1*,* R_2 *e* R_3 *ligadas em paralelo é dada por*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Se $R_1 = 25\ \Omega$*,* $R_2 = 40\ \Omega$ *e* $R_3 = 50\ \Omega$ *foram medidas com um erro máximo de* 0,5%*, aproxime o erro máximo no cálculo de* R*.*

Exercício 2.65 *Biólogos marinhos determinaram que quando um tubarão detecta a presença de sangue na água ele nada na direcção em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) num determinado ponto* (x, y) *da superfície é de aproximadamente*

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}.$$

Um tubarão encontra-se no ponto de coordenadas $(1, 0)$*.*

1. *Em que direcção nada o peixe?*
2. *Qual o erro que se comete na determinação do valor da concentração, supondo que o ponto onde se encontra o tubarão foi medido com um erro de* 0,1 *em cada coordenada?*

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1 Primitivas

3.1.1 Primitivas imediatas

No capítulo anterior certos problemas foram enunciados na forma: "dada uma função f, determinar a sua derivada f'". Consideremos agora o problema inverso, isto é: "dada a derivada f', determinar a função primitiva f". Por outras palavras, neste capítulo queremos considerar a questão: "dada uma função f, determinar uma função F tal que $F' = f$".

Definição 3.1 (Primitiva) *Uma função F diz-se* primitiva *(ou* anti-derivada*) de f no intervalo I se*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Ao processo de determinação da primitiva F de uma função f chama-se primitivação.

Notemos que, se uma função f admitir primitiva, essa primitiva não é determinada de forma única. De facto, se considerarmos $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, podemos ter, como primitiva, $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 10$, $F_3(x) = x^2 + 11{,}4$, etc. Neste caso, as primitivas de f em $\mathbb{R}$ são da forma $F(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado demonstra que duas primitivas de uma mesma função diferem apenas por uma constante.

Teorema 3.1 *Sejam F_1 e F_2 duas primitivas de f num intervalo I. Então, a sua diferença é uma função constante em I, isto é,*

$$F_1(x) = F_2(x) + c, \qquad \forall x \in I,$$

com c uma constante real.

Demonstração: Sejam a e b dois pontos distintos ($a < b$) de I e $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, para todo o $x \in I$. Como F_1 e F_2 são ambas primitivas de f em I temos que

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I,$$

o que implica, como G é diferenciável em I,

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

e, como tal, $G(x) = c$, com c uma constante real. De facto, pelo Teorema de Lagrange, como G é diferenciável em I,

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} = 0$$

ou seja, $G(b) = G(a)$, com a e b quaisquer dois pontos distintos de I. Provámos assim que $G(x) = c$, para todo o $x \in I$, ou seja $F_1(x) = F_2(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Definição 3.2 (Integral indefinido) *Chama-se* integral indefinido *(ou* primitiva*) de f em I, e denota-se por*

$$\int f(x)\, dx,$$

a toda a expressão da forma $F(x) + c$, onde F é uma primitiva de f em I e $c \in \mathbb{R}$. Podemos então dizer que o integral indefinido de uma função é o conjunto de todas as suas primitivas.

De acordo com esta definição, ao processo de primitivação também se chama integração. A notação usada para o integral indefinido foi proposta por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) que a começou a usar porque a integração, como iremos ver mais tarde, está intimamente relacionada com somas (o "s" de soma degenerou em "$\int$"). A partícula "dx", para já, não tem significado especial e serve apenas para indicar a variável independente em relação à qual se está a primitivar.

Geometricamente podemos considerar o integral indefinido como uma família de curvas. Essas curvas são tais que passar de uma para a outra se processa por translação do eixo dos xx.

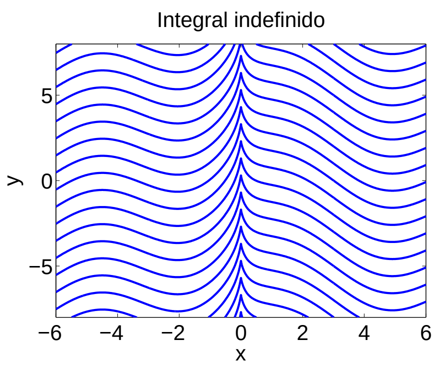

Figura 3.1: Integral indefinido.

Consideremos alguns exemplos.

1. $\displaystyle\int 1\, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

4. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

   De facto, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ e $(\ln(-x))' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$, $x < 0$.

6. Generalizando a regra dada no exemplo anterior, podemos escrever

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

   ou, noutra notação,

$$\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

7. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

   De facto,

$$\left(\frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2}\right)' = \operatorname{arc\,sen} x(\operatorname{arc\,sen} x)' = \cdots = \operatorname{arc\,sen} x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Uma questão que se coloca é a seguinte: será que toda a função f possui primitiva? Pode demonstrar-se que toda a função contínua num intervalo I possui, nesse intervalo, uma primitiva. No entanto, existem funções que não possuem primitiva. Essas funções são, naturalmente, funções descontínuas.

Exercício 3.1 *Dê um exemplo de uma função descontínua que não possua primitiva e um exemplo de uma função descontínua que possua primitiva.*

Vamos agora considerar algumas propriedades das primitivas. As primeiras propriedades resultam, imediatamente, da definição e a sua demonstração é deixada como exercício:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}; \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Outra propriedade é

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

que estabelece que a primitiva é um operador linear. De facto, sejam F e G duas primitivas de f e g, respectivamente. Então

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Podemos, então, concluir que

$$\begin{aligned} \int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx &= \alpha F(x) + \beta G(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \alpha(F(x) + c_1) + \beta(G(x) + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ &= \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Como motivação para a introdução de outras regras de primitivação/integração, consideremos o seguinte exercício.

Exercício 3.2 *Mostre que:*

1. $\displaystyle\int 8x^3 - 6x^{1/2} + x^{-5}\, dx = 2x^4 - 4x^{3/2} - 1/4x^{-4} + c,\ c \in \mathbb{R};$

2. $\displaystyle\int \cos(3x)\, dx = 1/3 \operatorname{sen}(3x) + c,\ c \in \mathbb{R}.$

Duas regras de integração muito importantes podem ser obtidas pela generalização do raciocínio efectuado na resolução do exercício anterior. A primeira é a regra de integração da potência, cuja demonstração é deixada como exercício:

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \neq -1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A segunda é a regra de integração da função composta e diz que, se F é uma primitiva de f e g é uma função diferenciável, então

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

De facto, pelo teorema da derivada da função composta,

$$(F(g(x)))' = g'(x)F'(g(x)) = g'(x)f(g(x)),$$

o que prova o pretendido.

Exercício 3.3 *Mostre que:*

1. $\displaystyle\int f' f^m\, dx = \frac{f^{m+1}}{m+1} + c,\ m \neq -1,\ c \in \mathbb{R};$

2. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x\, dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$

3.1.2 Primitivação por partes

O próximo teorema dá-nos a chamada regra de primitivação por partes, que é obtida a partir da regra de derivação do produto de duas funções.

Teorema 3.2 (Primitivação por partes) *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo I tais que f admite uma primitiva F em I e g é derivável em I. Então*

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx.$$

Demonstração: Temos que

$$(F(x)g(x))' = F'(x)g(x) + F(x)g'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x) \qquad x \in I.$$

Assim sendo,

$$f(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x), \qquad x \in I,$$

o que nos permite concluir que

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx,$$

provando assim o pretendido. □

Em linguagem corrente, o teorema anterior pode ser enunciado da seguinte forma: "a primitiva do produto de duas funções é igual à primitiva da primeira vezes a segunda menos a primitiva da que já está primitivada vezes a derivada da segunda".

Exercício 3.4 *Calcule as seguintes primitivas usando a regra de primitivação por partes:*

1. $\int x \ln x \, dx$;

2. $\int \text{arc sen}\, x \, dx$.

Resolução:

1. $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

2. Temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\int \text{arc sen}\, x \, dx &= \int 1 \, \text{arc sen}\, x \, dx \\
&= x \, \text{arc sen}\, x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \, \text{arc sen}\, x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \, \text{arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}$$

Aquando da aplicação da regra de primitivação por partes, coloca-se a questão de saber qual a função que deve ser primitivada e qual a que deve ser derivada. Temos a seguinte regra de ouro: "deve começar por se primitivar o factor que menos se simplifica por derivação". Um quadro que pode ser útil é o seguinte:

	Derivar		Primitivar	
$\int$	função polinomial	$\times$	função trigonométrica	dx
$\int$	função polinomial	$\times$	função exponencial	dx
$\int$	função trigonométrica inversa	$\times$	função polinomial	dx
$\int$	função logarítmica	$\times$	função polinomial	dx

Por vezes é necessário aplicar a regra de primitivação por partes duas (ou mais) vezes. Por exemplo, suponhamos que se pretende determinar

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x - \int e^x (-\,\text{sen}\, x) \, dx \\
&= e^x \cos x + e^x \,\text{sen}\, x - \int e^x \cos x \, dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Quando se aplica duas (ou mais) vezes a regra de integração por partes deve manter-se até ao final a escolha feita inicialmente sobre qual a função a primitivar e qual a função a derivar.

3.1.3 Regras práticas para primitivar funções trigonométricas e hiperbólicas

Quando se pretende primitivar potências ímpares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ ou $\operatorname{ch} x$, destaca-se uma unidade à potência ímpar e o factor resultante passa-se para a co-função através das fórmulas fundamentais:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

No caso de se pretender primitivar potências pares de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ ou $\operatorname{ch} x$, passa--se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1).$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x\, dx &= \int \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\, dx \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para as potências pares e ímpares de $\operatorname{tg} x$ $(\operatorname{th} x)$ ou $\operatorname{cotg} x$ $(\operatorname{coth} x)$, destaca-se $\operatorname{tg}^2 x$ $(\operatorname{th}^2 x)$ ou $\operatorname{cotg}^2 x$ $(\operatorname{coth}^2 x)$ e aplica-se uma das fórmulas:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \qquad (\operatorname{th}^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x),$$

$$\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1, \qquad (\operatorname{coth}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x).$$

Nas potências pares de $\sec x$ $(\operatorname{sech} x)$ ou $\operatorname{cosec} x$ $(\operatorname{cosech} x)$, destaca-se $\sec^2 x$ $(\operatorname{sech}^2 x)$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ $(\operatorname{cosech}^2 x)$ e ao factor resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \qquad (\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x, \qquad (\operatorname{cosech}^2 x = \operatorname{coth}^2 x - 1).$$

Para as potências ímpares de $\sec x$ $(\operatorname{sech} x)$ ou $\operatorname{cosec} x$ $(\operatorname{cosech} x)$, destaca-se $\sec^2 x$ $(\operatorname{sech}^2 x)$ ou $\operatorname{cosec}^2 x$ $(\operatorname{cosech}^2 x)$ e primitiva-se por partes começando por esse factor.

Consideremos, agora, o caso de produtos de potências de funções trigonométricas ou hiperbólicas.

Quando se pretende primitivar o produto de uma potência ímpar de $\operatorname{sen} x$ $(\operatorname{sh} x)$ por qualquer potência de $\cos x$ $(\operatorname{ch} x)$, destaca-se $\operatorname{sen} x$ $(\operatorname{sh} x)$ e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad (\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1).$$

No caso da função a primitivar ser o produto de uma potência ímpar de $\cos x$ $(\operatorname{ch} x)$ por qualquer potência de $\operatorname{sen} x$ $(\operatorname{sh} x)$, destaca-se $\cos x$ $(\operatorname{ch} x)$ e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x, \qquad (\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x).$$

Quando o produto é entre uma potência par de $\operatorname{sen} x$ $(\operatorname{sh} x)$ e uma potência par de $\cos x$ $(\operatorname{ch} x)$, aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x, & (\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x),\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, & (\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x),\\
\operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \left(\operatorname{sh}^2 x \right.&\left.= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)\right),\\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), & \left(\operatorname{ch}^2 x \right.&\left.= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)\right).
\end{aligned}$$

Para terminar esta secção, consideremos o caso de produtos em que aparecem factores do tipo $\operatorname{sen} mx$ ou $\cos nx$ $(\operatorname{sh} mx$ ou $\operatorname{ch} nx)$. Neste caso aplicam-se as fórmulas:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \qquad \left(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y))\right),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \qquad \left(\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y))\right),$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)), \qquad \left(\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y))\right).$$

3.1.4 Primitivação de funções racionais

Consideremos a fracção $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x)$ e $g(x)$ são dois polinómios. Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, efectua-se a divisão de $f(x)$ por $g(x)$. Obtém-se então

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

sendo $\dfrac{R(x)}{g(x)}$ uma fracção própria. Para primitivar a fracção própia procede-se de acordo com os seguintes passos.

1. Decomposição do denominador da fracção própria em factores. Os factores obtidos são da forma $(x-a)^n$, correspondendo a raízes reais a de multiplicidade n, ou da forma $\left((x-p)^2 + q^2\right)^m$, correspondendo às raízes imaginárias $p \pm qi$ de multiplicidade m.

2. Decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples. Cada factor do tipo $(x-a)^n$ dá origem a

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-a},$$

com A_i, $i = 1, \ldots, n$, constantes a determinar. Cada factor do tipo $\left((x-p)^2+q^2\right)^m$ dá origem a

$$\frac{P_1x+Q_1}{\left((x-p)^2+q^2\right)^m} + \frac{P_2x+Q_2}{\left((x-p)^2+q^2\right)^{m-1}} + \cdots + \frac{P_mx+Q_m}{(x-p)^2+q^2},$$

com P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, m$, constantes a determinar.

3. Determinação das constantes. As constantes A_i, $i = 1, \ldots, n$, e P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, m$, podem ser determinadas conjuntamente pelo método do coeficientes indeterminados.

   Há, no entanto, uma forma alternativa de calcular essas constantes, que descrevemos de seguida. Comecemos por considerar o cálculo dos coeficientes A_i, $i = 1, \ldots, n$. Seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)(x-a)^n$. Se $n = 1$, temos que (regra do tapa)

$$A_1 = \left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}.$$

   Se $n > 1$, efectua-se a divisão (regra das h's)

$$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h}$$

   dispondo os polinómios por ordem crescente dos seus monómios, obtendo-se

$$\left[\frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a+h} = A_1 + A_2h + \cdots + A_nh^{n-1} + \frac{R_n(a+h)}{\psi(a+h)}.$$

   Consideremos, agora, o cálculo dos coeficientes P_j, Q_j, $j = 1, \ldots, m$. Seja $\psi(x)$ tal que $g(x) = \psi(x)\left((x-p)^2+q^2\right)^m$. Se $m = 1$, temos que

$$\left[P_1x + Q_1 = \frac{R(x)}{\psi(x)}\right]_{x=p+qi}.$$

   Se $m > 1$, as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (as constantes P_1 e Q_1 podem ser obtidas como no caso $m = 1$).

   Caso apareçam elementos simples da forma

$$\frac{1}{\left((x-p)^2+c\right)^m},$$

   estes podem ser primitivados usando a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \frac{1}{\left((x-p)^2+c\right)^m}\,dx = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2m-2} \times \frac{x-p}{\left((x-p)^2+c\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{1}{\left((x-p)^2+c\right)^{m-1}}\,dx\right).$$

4. Determinar a primitiva. A primitiva da função racional é a soma das primitivas de cada um dos elementos simples

Exercício 3.5 *Calcule a primitiva*

$$\int \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}\,dx.$$

Resolução: Comecemos por dividir os polinómios. Temos que

$$\frac{x^5+x^3+x}{x^4+1} = x + \frac{x^3}{x^4+1}.$$

Logo

$$\int \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}\,dx = \int x + \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exercício 3.6 *Calcule a primitiva*

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx.$$

Resolução: Como já estamos na presença de uma fracção própria, vamos começar por factorizar o denominador.

1. Factorizar o denominador.

$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3).$$

2. Obter os elementos simples.

$$\frac{3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}.$$

3. Determinação das constantes.

   Vamos determinar A e B pelo método dos coeficientes indeterminados. Assim,

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+B)}{(x+1)(x+3)}.$$

   Logo

$$\begin{cases} A+B &= 3 \\ 3A+B &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 3-B \\ 9-3B+B &= 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= -1/2 \\ B &= 7/2 \end{cases}.$$

   Concluímos então que

$$\frac{3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{7/2}{x+3}.$$

   Os valores de A e de B também poderiam ter sido obtidos pela regra do tapa

$$A = \left[\frac{3x+2}{x+3}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{2}, \qquad B = \left[\frac{3x+2}{x+1}\right]_{x=-3} = \frac{7}{2}.$$

4. Determinar a primitiva.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{x^2+4x+3}\,dx &= \int \frac{-1/2}{x+1}\,dx + \int \frac{7/2}{x+3}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{2}\ln|x+3| + c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)^7}{(x+1)}\right| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Exercício 3.7 *Calcule a primitiva*

$$\int \frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4x+3)}\,dx.$$

Resolução: Como já estamos na presença de uma fracção própria, vamos começar por factorizar o denominador.

1. Factorizar o denominador.

$$(x+1)^2(x^2+4x+3) = (x+1)^3(x+3).$$

2. Obter os elementos simples.

$$\frac{x+2}{(x+1)^3(x+3)} = \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{B}{x+3}.$$

3. Determinação das constantes.

   Para obter as constantes vamos proceder da seguinte forma. Os coeficientes A_1 e B determinam-se pela regra do tapa

$$A_1 = \left[\frac{x+2}{x+3}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}, \qquad B = \left[\frac{x+2}{(x+1)^3}\right]_{x=-3} = \frac{1}{8}.$$

   Os coeficientes A_2 e A_3 determinam-se pelo método dos coeficientes indeterminados, obtendo-se (verifique) $A_2 = \frac{1}{4}$ e $A_3 = -\frac{1}{8}$. Concluímos então que

$$\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4x+3)} = \frac{1/2}{(x+1)^3} + \frac{1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/8}{x+1} + \frac{1/8}{x+3}.$$

   Uma forma alternativa de obter os A_i, $i = 1, 2, 3$, é usando a regra dos h's.

4. Determinar a primitiva.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+4x+3)}\,dx &= \frac{-1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/4}{x+1} - \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{8}\ln|x+3| + c \\
&= \frac{-1/4}{(x+1)^2} - \frac{1/4}{x+1} + \ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right|^{1/8} + c, \ c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}
$$

3.1.5 Primitivação por substituição

Seja f uma função primitivável no intervalo I e seja

$$x = \phi(t)$$

uma função bijectiva e diferenciável de I_1 em I (uma função bijectiva e diferenciável chama-se mudança de variável)

$$I_1 \xrightarrow{\phi} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto x = \phi(t) \longmapsto f(x)$$

Se F é uma primitiva de f temos

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Logo

$$F(\phi(t)) + c = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Provámos, estão, o seguinte resultado que nos indica como poderemos primitivar por substituição de variável.

Teorema 3.3 (Primitivação por substituição) *Seja f uma função primitivável no intervalo I e ϕ uma mudança de variável de I_1 em I. Então*

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt\right)_{t=\phi^{-1}(x)}. \tag{3.1}$$

Exercício 3.8 *Calcule*

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Resolução: Seja

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Temos que $D_f = [-1, 1]$. Consideremos

$$\phi(t) = \operatorname{sen} t, \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Como é fácil de provar, ϕ é bijectiva e diferenciável no seu domínio e, como tal, pode ser usada como mudança de variável. Consideremos, então,

$$x = \operatorname{sen} t \Rightarrow t = \operatorname{arc\,sen} x.$$

Como $\phi'(t) = \cos t$, temos que

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \left(\int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\, dt\right)_{t=\operatorname{arc\ sen} x} \\
&= \left(\int \cos^2 t\, dt\right)_{t=\operatorname{arc\ sen} x} \\
&\vdots \\
&= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right)_{t=\operatorname{arc\ sen} x} + c \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\ sen} x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\ sen} x) + c \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arc\ sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}$$

Torna-se útil, neste contexto, relembrar a noção de diferencial considerada no final do capítulo anterior. Como foi visto, se $x = \phi(t)$, o diferencial de x pode ser dado por $dx = \phi'(t)\ dt$. Assim, a fórmula (3.1) pode ser interpretada como resultante das substituições $x = \phi(t)$ e $dx = \phi'(t)\ dt$.

Exercício 3.9 *Calcule*

$$\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx.$$

Resolução: Temos que o m.m.c.$(2,3) = 6$. Logo, a mudança de variável a considerar é

$$x = t^6.$$

Neste caso,

$$dx = 6t^5 dt.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx &= \left(\int \frac{1}{t^3 + t^2} 6t^5 dt\right)_{t=x^{1/6}} \\
&= 6\left(\int \frac{t^3}{t+1}\, dx\right)_{t=x^{1/6}} \\
&\vdots \\
&= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln|x^{1/6} + 1| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad \square
\end{aligned}$$

Na internet é possível encontrar várias páginas que permitem calcular primitivas. Uma das mais famosas é

http://integrals.wolfram.com/

3.2 Integral definido

3.2.1 Noção de área de uma figura plana

O que é a área de uma figura plana? Informalmente podemos dizer que é "algo que se pode medir e que nos permite ter uma ideia da maior ou menor dimensão da figura". À área associamos um número que nos dá a "medida da área". Por simplificação, a medida da área será designada, muitas vezes, apenas "área".

Como unidade de referência da área tomaremos a medida da área de um quadrado de lado igual à unidade, que dizemos ter "área um". Para saber quanto vale a área de uma figura só temos que ver quantas unidades de área (ou partes dela) cabem na figura.

Consideremos uma função f, não negativa e contínua num intervalo real $[a, b]$.

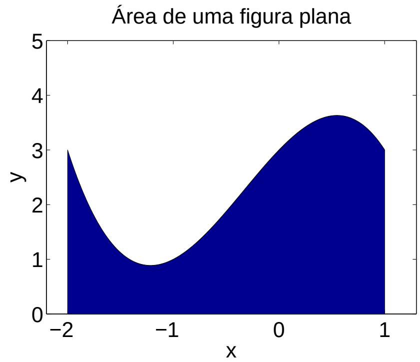

Figura 3.2: Área de uma figura plana.

Suponhamos que pretendemos calcular a área A do domínio plano definido pela curva $y = f(x)$, as rectas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos xx. Para isso, comecemos por dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos iguais por meio de um número finito de pontos x_0, x_1, ..., x_n tais que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3.2}$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Obtemos assim uma partição do intervalo $[a, b]$. Chamamos amplitude da partição à maior das amplitudes dos intervalos definidos pela partição, isto é, ao valor

$$\Delta x = \max_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Como f é contínua em cada subintervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, pelo Teorema de Weierstrass, f assume um máximo M_i num ponto $\overline{y}_i$ desse intervalo e um mínimo m_i num ponto $\underline{y}_i$ desse intervalo. Consideremos as somas

$$s(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{y}_i)\Delta x_i \quad \text{e} \quad S(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{y}_i)\Delta x_i,$$

onde cada parcela é a área de um rectângulo. Note-se que $s(\Delta x)$ é a área definida por um polígono contido em A e $S(\Delta x)$ a área definida por um polígono que contém A. Então

$$s(\Delta x) \leq A \leq S(\Delta x).$$

Como f é uma função contínua, aumentando o número de pontos da partição ou, de forma equivalente, diminuindo Δx, o valor $m_i = f(\underline{y}_i)$ tende para $M_i = f(\overline{y}_i)$. Por definição de limite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(\overline{y}_i) - f(\underline{y}_i)| < \epsilon,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, e então

$$S(\Delta x) - s(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} (f(\overline{y}_i) - f(\underline{y}_i))\Delta x_i < \epsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon(b-a).$$

Podemos então dizer que a área A pode ser aproximada por $s(\Delta x)$ ou $S(\Delta x)$ com a precisão que se quiser. Assim,

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} S(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} s(\Delta x).$$

3.2.2 Definição de integral definido

Seja f uma função limitada, não necessariamente contínua, definida no intervalo $[a, b]$. Consideremos a partição (3.2), com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cuja amplitude é Δx. Ao somatório

$$R_f(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i,$$

com $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, chamamos soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$ relativa à partição (3.2), em homenagem ao matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Note-se que, para cada partição existem muitas somas de Riemann possíveis, bastando para isso variar a escolha dos $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definição 3.3 (Integral definido) *Seja f uma função limitada definida num intervalo fechado $[a, b]$. O* integral definido *de f entre a e b é definido como sendo o limite das suas somas de Riemann quando a amplitude das partições, arbitrariamente escolhidas, tende para zero, isto é,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} R_f(\Delta x). \tag{3.3}$$

Na definição anterior, a a e b chamamos limites de integração e a f chamamos função integranda. Quando o limite existe, f diz-se integrável (ou integrável à Riemann) ou que

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe. A afirmação (3.3) significa que, para todo o $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que, se Δx é a amplitude de uma partição de $[a, b]$ com $\Delta x < \delta$, então

$$|R_f(\Delta x) - I| < \epsilon,$$

com

$$R_f(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x_i \quad \text{e} \quad I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

para qualquer escolha dos números y_i nos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da partição considerada. O limite I é chamado limite de uma soma de Riemann.

Exercício 3.10 *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \textit{ é racional}, \\ 0, & \textit{se } x \textit{ é irracional}, \end{cases}$$

chamada função de Dirichlet, *em homenagem ao matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). Será que f é integrável em $[0, 1]$?*

Resolução: Consideremos uma partição uniforme de $[0,1]$ de amplitude Δx, isto é

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1,$$

com $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$. Para esta partição vamos determinar as somas de Riemann

$$S_r(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x,$$

escolhendo $y_i \in \mathbb{Q}$ (o que é sempre possível pois em qualquer intervalo real existe sempre um racional), bem como as somas de Riemann

$$S_i(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x,$$

com $y_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (o que também é sempre possível). Assim

$$S_r(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x = 1$$

e

$$S_i(\Delta x) = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x = 0,$$

o que permite concluir que a função de Dirichlet não é integrável à Riemann. $\square$

A definição de integral foi dada para um função definida num intervalo real $[a, b]$. Isto pressupõe que $a < b$ e que a e b são números reais (finitos). Excluímos, assim, os casos $[a, b]$, com $a > b$, $[a, a] = \{a\}$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ e $]-\infty, +\infty[$. Vejamos agora como generalizar a definição para os dois primeiros casos.

Definição 3.4 *Seja f uma função limitada definida num intervalo $[a, b]$. Se $a = b$ temos que*

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Se $a > b$ temos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

Um resultado útil é o seguinte, que apresentamos sem demonstração.

Teorema 3.4 *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Seja $c \in [a, b]$. Então podemos dizer que f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Como vimos no Exercício 3.10, nem todas as funções limitadas são integráveis. No entanto, pode demonstrar-se o próximo teorema para funções contínuas. De notar que uma função contínua, definida num intervalo fechado, é limitada mas o seu recíproco não é verdadeiro.

Teorema 3.5 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$. Então f é integrável em $[a,b]$ e o seu integral é único.*

A analogia do integral com a noção de área apenas vale para funções contínuas e não negativas.

Corolário 3.6 *Seja f uma função contínua e não negativa no intervalo $[a,b]$ e consideremos a figura limitada pelo gráfico de f, pelas rectas verticais $x=a$ e $x=b$ e pelo eixo dos xx. A área da figura existe sempre e pode ser obtida por*

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

E no caso de f ser uma função negativa? Será que podemos definir "área orientada" (ou "área com sinal") à custa de um integral? Notemos que se f for uma função contínua definida em $[a,b]$ tal que $f(x)\leq 0$, para todo o $x\in[a,b]$, então

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercício 3.11 *Em cada uma das alíneas seguintes, determine o valor do integral definido, identificando-o com uma área que indicará:*

1. $\displaystyle\int_{-3}^{2}(2x+6)\,dx$; *2.* $\displaystyle\int_{-1}^{2}(7-3x)\,dx$;

3. $\displaystyle\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$; *4.* $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$.

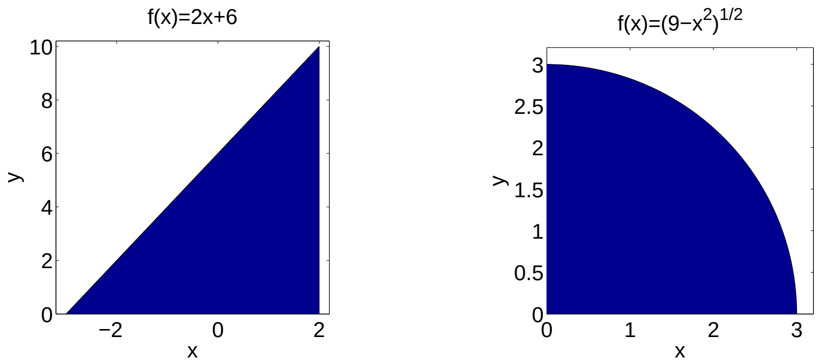

Figura 3.3: Áreas de figuras planas (Exercício 3.11, alíneas 1 e 3).

Resolução: Vamos apenas resolver 1 e 3. Considere-se a Figura 3.3.

1. Temos que o integral corresponde à área do triângulo. Assim,

$$\int_{-3}^{2} 2x+6\,dx=\frac{5\times 10}{2}=25.$$

2. Temos que o integral corresponde a um quarto da área do círculo. Assim,

$$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{1}{4}(3^2\pi)=\frac{9}{4}\pi. \quad \square$$

A resposta à pergunta sobre a existência de integral definido para funções limitadas descontínuas nem sempre é positiva, como vimos no Exercício 3.10. Para garantir a existência e unicidade do integral definido para uma função descontínua é necessário impor, essencialmente, que a função não tenha demasiadas descontinuidades.

Teorema 3.7 *Seja f uma função limitada com um número finito de descontinuidades no intervalo $[a, b]$. Se as descontinuidades forem todas de primeira espécie (incluindo as removíveis), existe e é único o integral definido*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

A demonstração do teorema anterior, que não iremos apresentar, permite concluir uma regra de cálculo para o integral de uma função descontínua nas condições do teorema: se f for descontínua num dos extremos do domínio, proceder como se fosse contínua; se f for descontínua no interior do intervalo, digamos em $c \in]a, b[$, considere as funções

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x < c, \\ \lim\limits_{x \to c^-} f(x), & x = c, \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & c < x \leq b, \\ \lim\limits_{x \to c^+} f(x), & x = c, \end{cases}$$

e tomar

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c g(x)\, dx + \int_c^b h(x)\, dx.$$

3.2.3 Propriedades do integral definido

Vamos agora considerar algumas propriedades do integral definido. As demonstrações dessas propriedades resultam imediatamente da definição.

Consideremos duas funções f e g integráveis no intervalo $[a, b]$. Resulta imediatamente, da analogia do integral com uma área, que

$$\int_a^b k\, dx = k(b - a), \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Outra propriedade é a seguinte, cuja demonstração é deixada como exercício,

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora mostrar que o integral de uma função não negativa é não negativo, isto é, se $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

De facto, pela definição de integral definido,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{f(y_i)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0.$$

Como consequência imediata desta última propriedade, sai a seguinte, cuja demonstração é deixada como exercício: se $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Atendendo às propriedades anteriores e ao facto de

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

qualquer que seja o x, resolva o próximo exercício.

Exercício 3.12 *Seja f uma função integrável no intervalo $[a,b]$. Mostre que:*

1. *se m e M são, respectivamente, um minorante e um majorante da função f no intervalo $[a,b]$, então*
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a);$$
2. *o módulo do integral é menor ou igual que o integral do módulo, isto é,*
$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

A próxima propriedade estabelece que o integral de uma função contínua, não negativa em todo o intervalo e positiva em, pelo menos, um ponto desse intervalo, é um número positivo. Em linguagem mais rigorosa, se f é uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a,b]$, e $f(c) > 0$, para algum $c \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Para provar este facto, suponhamos que $c \in]a,b[$ (o caso em que $c = a$ ou $c = b$ demonstra-se de forma idêntica). Como $f(c) > 0$ e f é contínua, existe um intervalo $I = [c-\epsilon, c+\epsilon] \subset [a,b]$, com ϵ um real positivo, tal que $f(x) > M$ para algum $M > 0$, para todo o $x \in I$. Assim

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c-\epsilon}^{c+\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)\, dx > 2\epsilon M > 0.$$

Note-se a importância da exigência da continuidade de f. Se f fosse descontínua poderia não ocorrer o pretendido. Considere-se, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \setminus \{0{,}5\}, \\ 1, & x = 0{,}5. \end{cases}$$

Neste caso tem-se que $f(x) \geq 0$, $f(0{,}5) > 0$ e

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

A propriedade seguinte é consequência imediata da anterior e a sua demonstração é deixada como exercício: se f e g são duas funções contínuas em $[a,b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, e $f \neq g$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx > \int_a^b g(x)\, dx. \tag{3.5}$$

3.2.4 Valor médio de uma função

Calcular a média $\bar{y}$ de um número finito de números reais $y_1, ..., y_n$ é uma tarefa muito fácil:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}.$$

Mas como poderemos calcular o valor médio $\bar{f}$ de uma função $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$? Recorrendo à noção de de integral como limite das somas de Riemann, podemos definir

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

O seguinte teorema mostra que se f for uma função contínua, existe um ponto $c \in]a, b[$ no qual o valor da função f é exactamente igual ao valor médio da função.

Teorema 3.8 (Primeiro teorema do valor médio) *Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, existe um $c \in]a, b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

Demostração: Se f é uma função constante, por (3.4), o resultado é trivial. Suponhamos então que f não é constante. Como f é contínua num intervalo fechado, existem

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Então, como f não é constante, tem-se que

$$m < f(x) < M,$$

para algum $x \in [a, b]$. Por (3.5) temos que

$$\int_a^b m\, dx < \int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b M\, dx \Leftrightarrow m(b-a) < \int_a^b f(x)\, dx < M(b-a)$$

e, como tal,

$$m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx < M.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(c),$$

o que prova o pretendido. $\square$

Geometricamente, o resultado anterior pode ter a seguinte interpretação para o caso em que f é uma função contínua e positiva no intervalo $[a, b]$: existe um rectângulo de base $b-a$ e altura $f(c)$ entre m e M com a mesma área de f.

O próximo teorema constitui uma generalização do teorema anterior.

Teorema 3.9 (Segundo teorema do valor médio) *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e g uma função integrável que não muda de sinal em $[a, b]$. Então, existe um $c \in]a, b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Demostração: Se f é uma função constante temos que $f(x) = k$, para todo o $x \in [a, b]$. Então

$$\int_a^b kg(x)\,dx = k\int_a^b g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx,$$

com $c \in]a, b[$. Suponhamos agora que f não é uma função constante e $g \not\equiv 0$ (o caso $g \equiv 0$ é trivial). Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $g(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a, b]$. Então, tal como na demonstração do teorema anterior, podemos dizer que existem constantes m e M tais que

$$mg(x) < f(x)g(x) < Mg(x),$$

para algum $x \in [a, b]$. Concluímos então

$$\int_a^b mg(x)\,dx < \int_a^b f(x)g(x)\,dx < M\int_a^b g(x)\,dx$$

o que, atendendo a

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0,$$

equivale a dizer

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} < M.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(c) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Está assim concluída a demonstração. □

3.2.5 O teorema fundamental do cálculo

Vamos, de seguida, apresentar o famoso Teorema Fundamental do Cálculo que evidencia a relação entre a primitivação e a integração. Este teorema foi estabelecido, independentemente, por Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1642–1727).

A fim de perceber melhor a sua demonstração, consideremos f uma função contínua em $[a, b]$ e uma nova função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

com $x \in [a, b]$. Note-se que F depende apenas de x, o limite superior do intervalo de integração; não depende da variável de integração t. Por exemplo, se considerarmos $f(t) = t$ e $a = 0$, temos que

$$F(x) = \int_0^x t\,dt$$

representa a área do triângulo rectângulo isósceles com catetos de medida x, isto é

$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

Fixando um valor para x, temos que a área é um valor fixo $F(x)$; variando o valor de x, o valor da área também varia, o que evidencia o facto de F ser uma função de x. Este exemplo também permite concluir que $F'(x) = x$, ou seja, a função F definida à custa do integral de f é uma primitiva de f. O Teorema Fundamental do Cálculo permite generalizar este resultado para qualquer função contínua.

Teorema 3.10 (Fundamental do cálculo) *Seja f uma função contínua definida no intervalo real $[a, b]$.*

1. *Se*
$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$
para todo o $x \in [a, b]$, então F é uma primitiva de f em $[a, b]$.

2. *Se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, então*
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Demostração:

1. Queremos demonstrar que $F'(x) = f(x)$, ou seja que
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$
Vamos considerar apenas o caso $h \to 0^+$ (o caso $h \to 0^-$ é semelhante). Temos que
$$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c_h)h, \quad c_h \in]x, x+h[,$$
onde a última igualdade resulta da aplicação do Primeiro Teorema do Valor Médio. Mas então
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{hf(c_h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(c_h) = f(x), \quad c_h \in]x, x+h[,$$
o que prova o pretendido.

2. Pelo que foi demonstrado no ponto anterior
$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$
é uma primitiva de f. Assim sendo
$$F(x) = F_1(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$
também é uma primitiva de f. Mas então
$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - c.$$
Tomando $x = a$ vem que
$$0 = F(a) - c \Rightarrow c = F(a)$$
e, como tal,
$$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a).$$
Tomando $x = b$ vem
$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a),$$
o que prova o pretendido. $\square$

Do teorema anterior resulta, imediatamente, o seguinte corolário.

Corolário 3.11 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então, para $c \in [a, b]$,*

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Usam-se, frequentemente, as seguintes notações

$$F(b) - F(a) = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b.$$

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo diz que se f for uma função contínua em $[a, b]$ e F uma sua primitiva, isto é, $F' \equiv f$, então

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3.6}$$

Ora, como a derivada $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ a variação total de y entre a e b, atendendo a (3.6) podemos dizer que o integral de uma taxa de variação é igual à variação total.

Esta conclusão, muitas vezes referida como o teorema da variação total, tem aplicação em muitas áreas da ciência e da engenharia. Por exemplo, se $C(t)$ representar a concentração do produto de uma reacção química no instante t, então a taxa de reacção é a derivada $C'(t)$. Logo, a variação da concentração entre os instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} C'(t)\,dt = C(t_2) - C(t_1).$$

Outro exemplo, se $V(t)$ for o volume de água num reservatório no instante t, a sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Então, a variação de água no reservatório entre os instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1).$$

Consideremos agora o problema de calcular a distância percorrida por uma partícula que se move ao longo de uma linha recta com uma velocidade $v(t)$. Se representarmos por $s(t)$ a posição da partícula, temos que $v(t) = s'(t)$ e, tal como vimos anteriormente, o deslocamento da partícula entre os instantes t_1 e t_2 é dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1).$$

Mas o deslocamento é diferente da distância percorrida. Para calcular a distância percorrida temos que ter em atenção o caso em que $v(t) \geq 0$, isto é, quando a partícula se move para a direita, mas também o caso em que $v(t) \leq 0$, isto é, quando a partícula se move para a esquerda. Estes dois casos podem ser tratados em simultâneo se considerarmos o integral de $|v(t)|$. De facto, como se pode concluir facilmente, a distância total percorrida pela partícula entre os instantes t_1 e t_2 é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt.$$

Exercício 3.13 *Uma partícula move-se ao longo de uma recta de tal forma que a sua velocidade no instante t é dada por*

$$v(t) = t^2 - t - 6,$$

medida em metros por segundo. Determine o deslocamento e a distância percorrida pela partícula durante o período de tempo $1 \leq t \leq 4$.

Resolução: Pelo que foi visto, o deslocamento é dado

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\, dt = \int_1^4 t^2 - t - 6\, dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2},$$

isto é, a partícula, no intervalo de tempo dado, moveu-se 4,5 metros para a esquerda.

Para calcular a distância percorrida, notemos que

$$v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2),$$

o que implica $v(t) \leq 0$ em $[1,3]$ e $v(t) \geq 0$ em $[3,4]$. Assim, a distância total percorrida pela partícula é

$$\int_1^4 |v(t)|\, dt = \int_1^3 (-v(t))\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 = \frac{61}{6},$$

ou seja, cerca de 10,17 metros. □

3.2.6 Integração por partes e por substituição

O Teorema Fundamental do Cálculo permite obter algumas regras de integração de grande interesse.

Integração por partes. Sabemos que, pela regra de primitivação por partes,

$$\int f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\, dx,$$

em que F é uma primitiva de f. Então,

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = \left.\int f(x)g(x)\, dx\right|_a^b = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx.$$

Temos então que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx,$$

com F uma primitiva de f.

Exercício 3.14 *Determine*
$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1(-\cos x) \, dx \\
&= -\pi \cos \pi + 0 + \operatorname{sen} x|_0^{\pi} \\
&= \pi + \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 \\
&= \pi. \quad \square
\end{aligned}$$

Integração por substituição. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\phi : I \longrightarrow [a,b]$ uma mudança de variável, isto é, uma função bijectiva e diferenciável em I ($\phi \in C^1(I)$). Sabemos que, pela regra de primitivação por substituição,
$$\int f(x) \, dx = \left(\int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt \right)_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Logo
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) \, dx &= \left. \left(\int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt \right)_{t=\phi^{-1}(x)} \right|_{x=a}^{x=b} \\
&= \left. \int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt \right|_{t=\phi^{-1}(a)}^{t=\phi^{-1}(b)} \\
&= \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t) \, dt.
\end{aligned}$$

Temos então que
$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t) \, dt.$$

Exercício 3.15 *Determine*
$$\int_0^{a/b} \sqrt{a^2 - b^2x^2} \, dx, \qquad a, b > 0.$$

Resolução: Vamos efectuar a mudança de variável
$$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t = \phi(t).$$

Como $\phi'(t) = \dfrac{a}{b} \cos t$ é uma função contínua e $\phi^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} \left(\dfrac{bx}{a} \right)$, o que implica $\phi^{-1}(0) = 0$ e $\phi^{-1}(a/b) = \pi/2$, temos que ϕ é uma mudança de variável de $[0, a/b]$ em $[0, \pi/2]$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{a/b} \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - \frac{b^2a^2}{b^2}\operatorname{sen}^2 t}\,\Big(\frac{a}{b}\cos t\Big)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} a\cos t \frac{a}{b}\cos t\, dt \\
&= \frac{a^2}{b}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\
&= \frac{a^2}{b}\left(\frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{a^2}{b}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{sen}\pi}{4} - 0 + 0\Big) \\
&= \frac{a^2\pi}{4b}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Exercício 3.16 *Determine*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx.$$

Resolução: Vamos efectuar a mudança de variável

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arc\ tg} t = \phi(t).$$

Temos que (prove):

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\phi'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad \text{(função contínua)}$$

e

$$\phi^{-1}(-\pi/2) = \operatorname{tg}(-\pi/4) = -1; \qquad \phi^{-1}(\pi/2) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1+t^2}{2t+t^2-1}\,\frac{2}{1+t^2}\, dt \\
&= \cdots \\
&= \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{1/\sqrt{2}}{((t+1)/\sqrt{2})^2 - 1}\, dt \\
&= \cdots \\
&= -\sqrt{2}\operatorname{arg\ th}(\sqrt{2}). \quad \square
\end{aligned}
$$

3.3 Integrais impróprios

Na definição de integral definido considerámos funções limitadas f definidas num intervalo finito $[a, b]$. Vamos agora generalizar o conceito para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso em que f é ilimitada. Em ambos os casos o integral é dito impróprio.

Vamos começar por considerar o caso em que o intervalo de integração é infinito. Para isso, consideremos a região que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo dos xx e à direita da recta $x = 1$ (ver Figura 3.4). Poder-se-ia pensar que, como a região é infinita, a sua área também deve ser infinita. Comecemos por considerer o intervalo finito $[1, b]$. Assim, a área à esquerda da recta $x = b$ é dada por

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Atendendo a este resultado temos que $A(b) < 1$, qualquer que seja o b. Além disso,

$$\lim_{b\to+\infty} A(b) = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

A área da região em causa aproxima-se de 1 quando $b \to +\infty$. Assim, dizemos que a medida da área da região infinita é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

Temos a seguinte definição.

Definição 3.5 (Integrais impróprios de 1ª espécie: intervalos infinitos) *Sejam a e b dois números reais arbitrários.*

1. *Se* $\int_a^t f(x)\, dx$ *existe para cada* $t \geq a$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a, +\infty[$ *a*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

2. *Se* $\int_t^b f(x)\, dx$ *existe para cada* $t \leq b$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $]-\infty, b]$ *a*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\, dx.$$

Os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad e \quad \int_{-\infty}^b f(x)\, dx$$

dizem-se convergentes *se os limites correspondentes existirem e forem finitos; caso contrário dizem-se* divergentes.

3. *Se* $\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ *e* $\int_{-\infty}^c f(x)\, dx$ *forem integrais impróprios, qualquer que seja* $c \in \mathbb{R}$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $\mathbb{R}$ *a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Se ambos os integrais impróprios do segundo membro forem convergentes, o integral imprórpio *do primeiro membro diz-se* convergente*; caso contrário, diz-se* divergente.

Qualquer um dos integrais impróprios definidos na definição anterior pode ser interpretado como uma área desde que f seja uma função não negativa.

Notemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx.$$

Ao limite do segundo membro da desigualdade anterior chama-se valor principal do integral impróprio e escreve-se

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx.$$

Exercício 3.17 *Diga se são convergentes ou divergentes os seguintes integrais impróprios:*

1. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx;$

2. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx.$

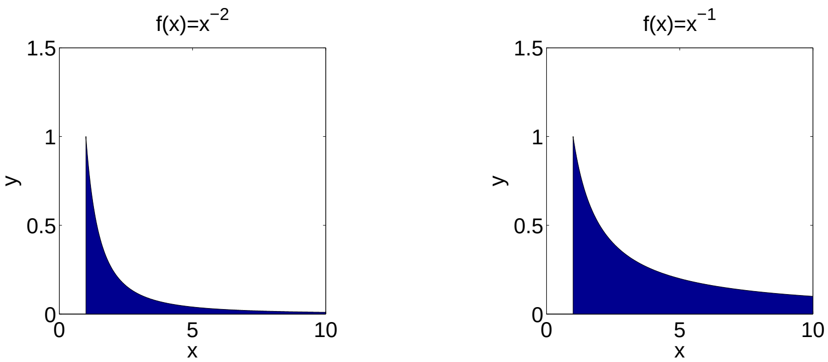

Figura 3.4: Integrais impróprios.

Resolução:

1. Já vimos que o integral é convergente e que

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

2. Embora o gráfico seja semelhante ao da função dada no ponto anterior (ver Figura 3.4), neste caso temos

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \ln|x|\big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}(\ln t - \ln 1) = +\infty.$$

Logo, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente. $\square$

Exercício 3.18 *Mostre que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$$

diverge mas o seu valor principal é igual a zero.

Resolução: Temos que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x = +\infty$$

e, como tal $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$ diverge. No entanto,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} x\, dx = \lim_{c\to+\infty} 0 = 0. \quad \square$$

Exercício 3.19 *Mostre que*

$$\int_1^{+\infty} x^{-p}\, dx$$

é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exercício 3.20 *Mostre que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

converge.

Vejamos agora o caso em que a função integranda é ilimitada.

Definição 3.6 (Integrais impróprios de 2ª espécie: funções ilimitadas)

1. *Se* $\displaystyle\int_a^t f(x)\, dx$ *existe para cada* $t \in [a, b[$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x)$ *for infinito, chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a, b]$ *a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\, dx.$$

2. *Se* $\displaystyle\int_t^b f(x)\, dx$ *existe para cada* $t \in]a, b]$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)$ *for infinito, chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a, b]$ *a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\, dx.$$

O integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

diz-se convergente *se o limite correspondente existir e for finito; caso contrário diz-se* divergente*.*

3. *Se* $\displaystyle\int_a^t f(x)\, dx$ *existe para cada* $t \in [a, c[$, $\displaystyle\int_t^b f(x)\, dx$ *existe para cada* $t \in]c, b]$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to c^\pm} f(x)$ *for infinito, com* $c \in]a, b[$, *chama-se* integral impróprio *de* f *em* $[a, b]$ *a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Se ambos os integrais impróprios do segundo membro forem convergentes, o integral imprórpio *do primeiro membro diz-se* convergente*; caso contrário, diz-se* divergente*.*

Exercício 3.21 *Estude a convergência de*

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Resolução: A função integranda tem uma assímptota em $x = 1$. Então

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Como

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\big|_0^t = \lim_{t\to 1^-} \ln|t-1| = -\infty,$$

o integral é divergente. □

Se, no exercício anterior, não tivéssemos notado que a função integranda tinha uma assímptota em $x = 1$, poderíamos ter obtido

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|\big|_0^3 = \ln 2.$$

Este resultado estaria errado!

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exacto do integral impróprio mas, ainda assim, é importante averiguar da sua convergência. Em tais casos o seguinte teorema pode ser útil.

Teorema 3.12 (Teste de comparação) *Sejam f e g duas funções contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo o $x \geq a$.*

1. *Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente.*
2. *Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.*

Apesar do teorema anterior ter sido enunciado apenas para integrais impróprios de 1ª espécie, onde o intervalo de integração é infinito, ele também é válido para integrais impróprios de 2ª espécie, onde a função integranda é ilimitada.

A demonstração do teorema anterior é omitida. No entanto, o resultado é mais ou menos intuitivo se fizermos a analogia do integral com a área (as funções são não negativas).

Exercício 3.22 *Averigúe da convergência de*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx.$$

Resolução: Como

$$\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

é divergente, o integral em causa também é divergente. □

O seguinte teste de comparação não exige que a função integranda seja não negativa.

Teorema 3.13 (Teste do módulo) *Se o integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *é convergente, então o mesmo acontece ao integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Tal como no teorema anterior, apesar deste teorema ter sido enunciado apenas para integrais impróprios de 1ª espécie, onde o intervalo de integração é infinito, ele também é válido para integrais impróprios de 2ª espécie, onde a função integranda é ilimitada.

3.4 Aplicações do cálculo integral

3.4.1 Cálculo de áreas

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in [a,b]$. A área sob o gráfico de f entre a e b é dada

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se g é outra função não negativa e contínua em $[a,b]$ e se $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, então a área A limitada pelo grafico de f, o gráfico de g e as rectas $x = a$ e $x = b$, pode ser obtida subtraindo-se da área sob o gráfico de f a área sob o gráfico de g, isto é,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Notemos que não é necessário impor que f e g sejam não negativas. De facto, se tal não acontecer temos que, se f e g forem tais que $f(x) \geq g(x) > -L$, com $L > 0$, a área A limitada pelo gráfico de f, pelo gráfico de g e as rectas $x = a$ e $x = b$, é igual à área limitada pelo gráfico de $f + L$, pelo gráfico de $g + L$ e as rectas $x = a$ e $x = b$. Como $f(x) + L \geq g(x) + L > 0$, temos que

$$A = \int_a^b f(x) + L\,dx - \int_a^b g(x) + L\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Por vezes é necessário determinar a área A de uma região delimitada pelas rectas $y = c$, $y = d$ e pelos gráficos de duas funções $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com f e g contínuas e tais que $f(y) \geq g(y)$, para todo o $y \in [c,d]$. Neste caso temos que

$$A = \int_a^b f(y) - g(y)\,dy.$$

3.4.2 Volumes de sólidos de revolução

Consideremos um sólido S que está definido entre os planos $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano que passa por $x \in [a, b]$ e é perpendicular ao eixo dos xx é $A(x)$, onde A é uma função contínua, pode demonstrar-se que a medida do volume do sólido S (que iremos designar apenas por "volume") é dada por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{3.7}$$

Nesta secção estamos interessados em calcular o volume de um sólido de revolução, isto é, de um sólido obtido pela rotação de uma região do plano em torno de uma recta desse mesmo plano. A recta em torno da qual se efectua a revolução é chamada recta de revolução.

Consideremos alguns exemplos. O cilindro (Figura 3.5) é obtido à custa da rotação de um rectângulo. Notemos que, se considerarmos um rectângulo de largura r e altura h, cuja área é dada por $A = rh$, o volume do cilindro de revolução gerado por esse rectângulo tem um raio da base r, altura h e o seu volume é dado por $V = \pi r^2 h$.

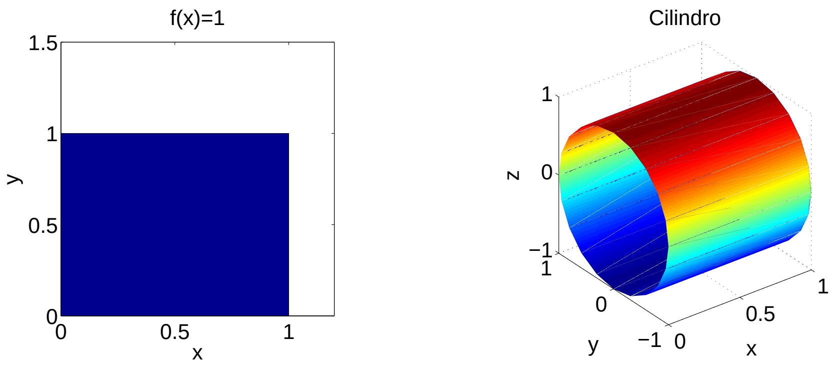

Figura 3.5: Cilindro.

Outro exemplo é o cone (Figura 3.6) gerado pela rotação de um triângulo. O volume do cone gerado pela rotação do triângulo de base r e altura h, cuja área é $A = \frac{1}{2}rh$, é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

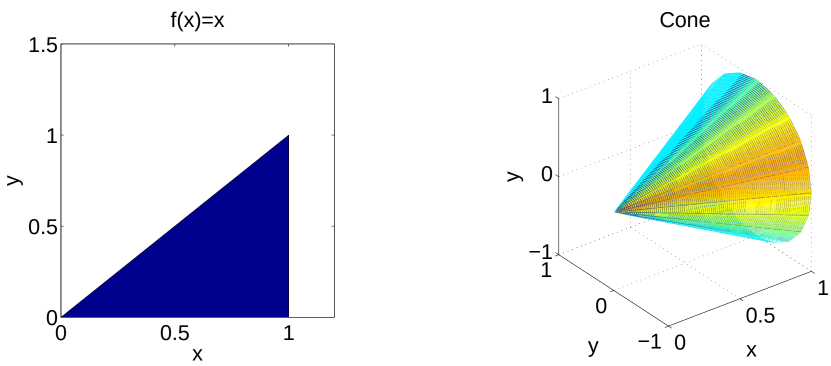

Figura 3.6: Cone.

Exercício 3.23 *Mostre que as fórmulas dos volumes do cilindro e do cone podem ser obtidas a partir de (3.7).*

Exercício 3.24 *Mostre que o volume da esfera gerada pela rotação do semicírculo de raio r, cuja área é $\frac{1}{2}\pi r^2$, é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.*

Notemos que ao rodarmos uma curva (em vez de uma superfície plana) obtemos uma superfície de revolução (em vez de um sólido de revolução).

Como determinar o volume de um sólido de revolução conhecendo a curva que o delimita? Para responder a esta questão consideremos a região limitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

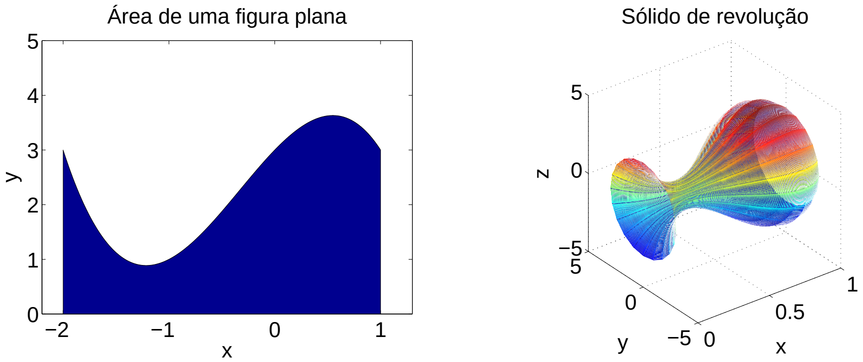

Figura 3.7: Sólido de revolução.

Notemos que, se $y = f(a)$ (função constante), o volume do sólido de revolução (cilindro) é

$$\pi(f(a))^2(b-a),$$

isto é, a área da base circular vezes a altura. E se f não for constante? Neste caso, consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Consideremos os rectângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(y_i)$. O volume do sólido de revolução gerado pela rotação desses rectângulos em torno do eixo dos xx é dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(y_i))^2 \Delta x_i,$$

que pode ser visto como uma soma de Riemann para a função πf^2. Como f é contínua, a função πf^2 é contínua pelo que o seu integral existe sempre. Podemos então estabelecer o seguinte método de cálculo do volume de sólidos de revolução, que apresentamos sob a forma de teorema.

Teorema 3.14 (Método das fatias) *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. O volume V do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da figura limitada pelo gráfico de f, pelo eixo dos xx e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ existe sempre e é dado por*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Note-se que não é necessário impor que f seja positiva. De facto, se f for nula em algum intervalo o valor do volume (como seria de esperar) é zero nesse intervalo; se f for negativa, o volume é o mesmo que o respeitante a $-f$, como acontece na realidade.

Exercício 3.25 *Calcule a medida do volume dos sólidos de revolução gerados pela rotação das regiões delimitadas pelas seguintes curvas em torno do eixo dos xx:*

1. $f(x) = x^2, \qquad x \in [0,1] \quad$ *(Figura 3.8);*
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad x \in [1, +\infty[\quad$ *(Figura 3.9).*

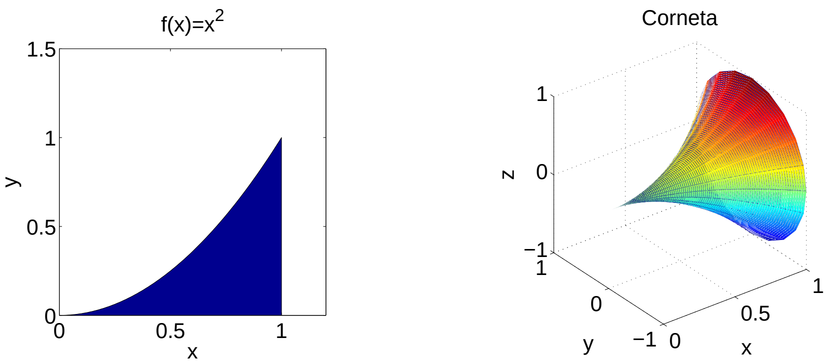

Figura 3.8: Corneta.

Resolução:

1. Para $f(x) = x^2$ temos
$$V = \pi \int_0^1 x^4 \, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

2. Para $f(x) = \frac{1}{x}$ temos
$$V = \pi \int_1^{+\infty} x^{-2} \, dx = \lim_{t \to +\infty} \pi(-x)^{-1}\big|_1^t = \pi \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = \pi.$$

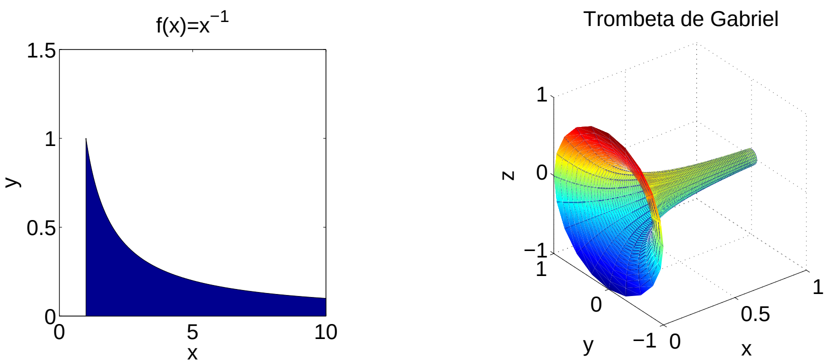

Figura 3.9: Trombeta de Gabriel.

Notemos que o volume é finito enquanto que a "área"
$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$$
é infinita. $\square$

Vamos agora calcular o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da figura limitada pelas rectas $x = a$, $x = b$ e pelos gráficos de duas funções contínuas f e g, definidas em $[a, b]$, que, para efeitos de compreensão geométrica, podemos considera-las não negativas. Suponhamos que $f(x) \geq g(x)$, para todo o $x \in [a, b]$. Podemos dizer, tal como no cálculo de áreas, que o volume pretendido é dado por

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx - \pi \int_a^b g^2(x)\, dx = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)\, dx.$$

Tal como para o cálculo de áreas, é possível obter, por mudança de variável, fórmulas semelhantes às aqui obtidas quando se consideram sólidos de revolução obtidos pela rotação de figuras planas em torno do eixo dos yy. Consideremos duas funções contínuas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, com $y \in [c, d]$, tais que $f(y) \geq g(y)$, para todo o $y \in [c, d]$. Assim, o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da figura plana limitada pelos gráficos de f e g e pelas rectas $y = c$ e $y = d$ é dado por

$$V = \pi \int_c^d f^2(y) - g^2(y)\, dy.$$

3.4.3 Comprimentos de curvas planas

Seja f uma função continuamente diferenciável no intervalo $[a, b]$. Vamos procurar um meio de calcular o comprimento da curva definida pelo gráfico de f e cujos extremos são os pontos A e B de coordenadas, respectivamente, $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Seja P_i o ponto de coordenadas $(x_i, f(x_i))$, com $i = 0, \ldots, n$, sendo $P_0 = A$ e $P_n = B$. Estes pontos definem uma linha poligonal que começa em A e acaba em B. O comprimento da curva definida pelo gráfico de f entre a e b pode ser aproximado pelo comprimento da linha poligonal

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i),$$

onde

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (f(x_{i-1}) - f(x_i))^2}.$$

Atendendo a que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$ temos, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, que existe $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$f'(y_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i},$$

uma vez que f é diferenciável. Assim,

$$d(P_{i-1}, P_i) = \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(y_i))^2}$$

e, como tal,

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(y_i))^2}\, \Delta x_i.$$

Note-se que L_p é uma soma de Riemann para a função contínua e, como tal, integrável,

$$g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Podemos então afirmar que se f for uma função continuamente diferenciável no intervalo $[a, b]$, o comprimento do gráfico de f desde o ponto A de coordenadas $(a, f(a))$ até ao ponto B de coordenadas $(b, f(b))$ é dado por

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

No caso em que a função f não tem derivada contínua em $[a, b]$ mas tem derivada contínua num número finito de intervalos, podemos aplicar o raciocínio exposto em cada um dos intervalos e, no fim, adicionar as parcelas obtidas.

Exercício 3.26 *Determine o comprimento das seguintes curvas:*

1. $f(x) = x$, $x \in [a, b]$;
2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, a]$, $a \in [0, 1]$.

Resolução:

1. Para $f(x) = x$ temos,

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + 1}\, dx = \sqrt{2}(b - a).$$

2. Para $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ temos que $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ e, como tal,

$$L_a^b = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen} a.$$

Mas, fazendo $\operatorname{arc\,sen} a = \theta$, concluímos que, na circunferência de raio 1, o ângulo θ (em radianos) coincide com o comprimento do arco com abertura θ. □

3.5 Fórmula do trapézio

Nesta secção vamos obter e analisar uma fórmula de quadratura numérica que permite determinar, de forma aproximada, o integral definido

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{3.8}$$

de uma função real de variável real f num dado intervalo real $[a, b]$.

Em muitas situações, o cálculo de (3.8) não pode ser efectuado através do cálculo de uma primitiva de f, como é o caso de, por exemplo,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

Neste caso a função integranda não possui uma primitiva que se possa obter como soma finita de funções elementares. Pode ainda acontecer que o valor de f seja conhecido apenas em alguns pontos do intervalo $[a,b]$. Podemos então efectuar o cálculo aproximado do integral. Um dos processos para efectuar tal cálculo aproximado designa-se por fórmula (ou regra) do trapézio.

Seja f uma função conhecida em $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, com $x_k = x_0 + kh$ e $h = (b-a)/n$. Assim sendo, temos que

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

As fórmulas mais usuais permitem obter aproximações a $I(f)$ aproximando, em cada intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, a função f por uma função mais simples, normalmente um polinómio.

Vamos considerar o caso em que pretendemos aproximar, em cada intervalo I_k, $k = 1, \ldots, n$, a função f, definida nesse intervalo, pela recta que passa pelos pontos

$$(x_{k-1}, f(x_{k-1})) \quad \text{e} \quad (x_k, f(x_k)),$$

isto é,

$$f(x) \approx f(x_{k-1})\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x_{k-1})\frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}) \right) dx \\
&= \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) + f(x_k)) = \frac{h}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].
\end{aligned}$$

Obtivemos, assim, a chamada fórmula do trapézio (composta)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)].$$

A fórmula do trapézio (simples) é a que se obtém quando se considera $n = 1$, isto é,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \tag{3.9}$$

Exercício 3.27 *Seja*

$$I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}\,dx.$$

Calcule, usando a fórmula do trapézio, o valor aproximado de I com $n = 5$.

Resolução: Seja $f(x) = xe^{2x}$ e $n = 5$. Assim sendo, necessitamos de 6 pontos igualmente distanciados no intervalo $[-2,-1]$ para obter uma aproximação ao valor de I usando a fórmula do trapézio. Temos então que,

$$I \approx 0{,}1[f(-2) + 2f(-1{,}8) + 2f(-1{,}6) + 2f(-1{,}4) + 2f(-1{,}2) + f(-1)] = -0{,}0788762.$$

Podemos escrever $I \approx -0{,}079$. $\square$

3.6 Exercícios práticos

Seguem-se alguns exercícios destinados a serem resolvidos nas aulas práticas.

Exercício 3.28 *Sejam F e G primitivas de f e g, respectivamente. É verdade que:*

1. *$F+G$ é uma primitiva de $f+g$?*
2. *FG é uma primitiva de fg?*
3. *F/G é uma primitiva de f/g?*

Exercício 3.29 *Seja F uma primitiva de f. Prove que:*

1. *se F é uma função par, então f é uma função ímpar;*
2. *se F é uma função ímpar, então f é uma função par.*

Exercício 3.30 *Calcule as primitivas das funções indicadas:*

1. $\operatorname{sen} x + \dfrac{3}{1+x^2}$;
2. $(a+bx^3)^2$;
3. $\dfrac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$;
4. $\dfrac{\ln x}{x}$;
5. $\dfrac{e^{\operatorname{arc\ tg} x} + x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}$;
6. $\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$;
7. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$;
8. 4^{2-3x};
9. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$;
10. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos^3 3x}$;
11. $e^{\operatorname{tg} x}\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
12. $e^{4x+x^2+3}(x+2)$;
13. $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$;
14. $\dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$;
15. $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}$;
16. $\dfrac{1}{9+4x^2}$;
17. $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$;
18. $\dfrac{x^3}{x^8+5}$;
19. $\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$;
20. $a^x\cos(a^x)$;
21. $\operatorname{sen}(\cos x)\operatorname{sen} x$;
22. $x\sec^2(3-2x^2)$;
23. $\dfrac{x}{\cos^2 x^2}$;
24. $\operatorname{cosec}^2\left(\sqrt{3}x+5\right)$;
25. $x\operatorname{cosec}^2(3x^2)$;
26. $\dfrac{1}{3\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)}$;
27. $\sqrt{2}x\sec(5x^2+7)$;
28. $a^{2x}\operatorname{cosec}(a^{2x})$;
29. $\dfrac{2x^3}{\operatorname{sen}^2(3x^4)}+\sec^2(5x)$;
30. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{a}}$.

Exercício 3.31 *Calcule, utilizando o método de primitivação por partes, as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:*

1. $e^{3x}(2x+3)$; 2. $(\ln x)(2x+3)$; 3. $x^2 \ln x$; 4. $e^x \operatorname{sen} x$;

5. $e^{ax} \operatorname{sen} bx$; 6. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}$; 7. $x \cos x$; 8. $x \sec^2 x$;

9. $(1-x)e^{1+2x}$; 10. $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$; 11. $\ln (x+1)^2$; 12. $\ln \left(a^2+x^2\right)$;

13. $\dfrac{\ln(\ln x)}{x}$; 14. $\operatorname{sen}\,(\ln x)$; 15. $\cos(\ln x)$; 16. $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$;

17. $\sec^3 x$; 18. $x \operatorname{sen} x \cos x$.

Exercício 3.32 *Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:*

1. $\operatorname{sen}^3 x$; 2. $\operatorname{sen}^4 x$; 3. $\operatorname{tg}^3 x$; 4. $\sec^4 x$;

5. $\operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$; 6. $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x$; 7. $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$.

Exercício 3.33 *Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:*

1. $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$; 2. $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$; 3. $\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)}$; 4. $\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$;

5. $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$; 6. $\dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}$; 7. $\dfrac{x^2+2x-5}{(x^2+1)(x+1)^2}$.

Exercício 3.34 *Calcule, utilizando o método de substituição, as primitivas de:*

1. $x^2\sqrt{4-x^2}$; 2. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; 3. $\dfrac{e^x\,(e^x-1)^2}{e^x+1}$;

4. $\dfrac{x^{1/2}}{1+x^{1/2}}$; 5. $\dfrac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}}$; 6. $\dfrac{1}{3+2\cos x}$.

Exercício 3.35 *Determine uma função F tal que*

$$F''(x) = 2x^{-1}, \quad F'(1) = 3 \quad e \quad F(1) = 0.$$

Exercício 3.36 *Para cada uma das funções definidas em $\mathbb{R}$ pelas expressões*

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad e \quad \frac{x}{1+x^4}$$

obtenha, se possível,

1. *a primitiva que se anula em $x = 0$;*

2. *a primitiva que tende para 1 quando x tende para $+\infty$.*

Se para algum caso for impossível obter uma primitiva que verifique a condição requerida, explique a razão dessa impossibilidade.

Exercício 3.37 *Mostre que, se f é integrável em $[-a,a]$, então*

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, *se f é par;*

2. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, *se f é ímpar.*

Faça uma interpretação geométrica destes resultados.

Exercício 3.38 *Aplicando o exercício anterior, mostre que são nulos os seguintes integrais:*

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\sqrt{x^4+1}\,dx$; 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\operatorname{sen}^2 x\,dx$.

Exercício 3.39 *Calcule os seguintes integrais definidos:*

1. $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{1-4x^3}{x-x^4}\,dx$; 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$; 3. $\displaystyle\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$;

4. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\operatorname{arc\,tg} x^2\,dx$; 5. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$; 6. $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln\left(\ln x^2\right)}{x}\,dx$;

7. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(3x+\left|x^2-4x-5\right|\right)\,dx$; 8. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx$; 9. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{(x-3)(x+1)}\,dx$;

10. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$; 11. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\,dx$; 12. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$;

13. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\operatorname{sen} 2x\,dx$; 14. $\displaystyle\int_{0}^{8} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,dx$; 15. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx$;

16. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2x^2-x+1}{3(x+1)(x^2+1)}\,dx$; 17. $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

Exercício 3.40 *Calcule*

1. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\cos x|\,dx$; 2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,|x|\,dx$.

Exercício 3.41 *Calcule*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

usando a mudança de variável $x=\operatorname{tg} t$.

Exercício 3.42 *Mostre que se $f(x)=\operatorname{sen} x$, então*

$$-2\pi \le \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \le 2\pi.$$

Exercício 3.43 *Prove as seguintes desigualdades:*

1. $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\, dx \le \frac{1}{10}$; 2. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{x\,\ln x}{(1+x^2)^2}\, dx \le \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^4}$.

Exercício 3.44 *Determine uma função f contínua e uma constante α de modo que, para todo o x real, se tenha:*

1. $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\, dt = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$; 2. $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\, dt = \cos(2x) + 1$.

Exercício 3.45 *Determine uma função contínua f de modo que*

$$3\int_0^x f(t)\, dt = x\, f(x)$$

e $f(1) = 2$.

Exercício 3.46 *Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, calcule as derivadas das funções a seguir definidas:*

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\, dt,\ x > 0$; 2. $\displaystyle\int_2^x \frac{\cos y}{y}\, dy,\ x > 0$; 3. $\displaystyle\int_1^{\ln x} \operatorname{sen}(y + e^y)\, dy,\ x > 0$.

Exercício 3.47 *Quais dos seguintes símbolos representam integrais impróprios, quais representam integrais definidos e quais não representam nem uma coisa nem outra?*

1. $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$; 2. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$; 3. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{x}\, dx$; 4. $\displaystyle\int_{-2}^2 \operatorname{sen} x\, dx$;

5. $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$; 6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{u^2-u}\, du$; 7. $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{x^2-4}\, dx$.

Exercício 3.48 *Averigúe a natureza dos seguintes integrais e indique os seus valores no caso de serem convergentes:*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$; 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\, dx$; 3. $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$; 4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$;

5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{4/5}}\, dx$; 6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\, dx$; 7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; 8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$;

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^x\, dx$; 10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$; 11. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1-x}\, dx$; 12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$;

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$; 14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Exercício 3.49 *Estude a convergência de cada um dos seguintes integrais:*

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$; (*Sugestão:* $e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ *para* x *"grande".*)

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x + e^x}\,dx$; (*Sugestão:* $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+e^x}\right| \leq \dfrac{1}{e^x}$.)

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$. (*Sugestão:* $\dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$.)

Exercício 3.50 *Determine a medida da área da região limitada por:*

1. *a parábola* $y = \dfrac{x^2}{2}$ *e as rectas* $x = 1$, $x = 3$ *e* $y = 0$;
2. *a parábola* $x = 2 - y - y^2$ *e o eixo das ordenadas;*
3. *a curva* $y = \operatorname{sh} x$ *e as rectas* $x = 6$ *e* $y = -2$;
4. *as curvas* $y = \operatorname{sen} x$ *e* $y = \cos x$ *entre dois pontos consecutivos das suas intersecções;*
5. *a parábola* $x = 4 - y^2$ *e o eixo dos yy;*
6. *a curva* $y = \ln x$, *o eixo dos yy e as rectas* $y = 0$ *e* $y = 2$;
7. *a elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercício 3.51 *Calcule a medida do volume do sólido de revolução gerado por:*

1. *o semi-círculo* $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, *em torno do eixo dos xx;*
2. *a região* $y \leq x^2 \wedge 0 \leq x \leq 2 \wedge y \geq 0$, *em torno do eixo dos xx;*
3. *a região limitada pela curva* $y = x^3$, *as rectas* $y = 1$ *e* $y = 0$ *e o eixo dos yy, em torno do eixo dos yy;*
4. *a região limitada pela curva* $y = x^3$, *a recta* $x = 1$ *e o eixo dos xx, em torno do eixo dos yy;*
5. *a rotação em torno do eixo dos xx da região dada pela condição* $(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x - y - 1 \geq 0 \wedge y \geq 0$.

Exercício 3.52 *Calcule o comprimento da curva:*

1. $x^2 + y^2 = r^2$;
2. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ *entre as rectas* $x = 0$ *e* $x = 4$.

Exercício 3.53 *Um fluido escorre para dentro de um tanque à velocidade de* $2t + 3$ *litros por minuto, onde t é o tempo medido em horas depois do meio-dia. Se o tanque estiver vazio ao meio-dia e tiver a capacidade de* 1000 *litros, a que horas estará cheio?*

Exercício 3.54 *A densidade de massa de um fio é* $f(x) = x^2 e^{-x}$ *quilogramas por centímetro. O fio tem* 2 *metros de comprimento. Calcule a sua massa sabendo que ela é dada por*

$$M = \int_0^{200} f(x)\,dx.$$

Exercício 3.55 *Quando um gás se expande num cilindro de raio r, a pressão num dado momento é função do volume: $P = P(V)$. A força exercida pelo gás no pistão (ver figura) é dada pelo produto da pressão pela área: $F = \pi r^2 P$.*

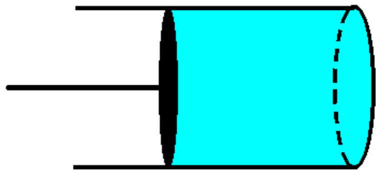

Figura 3.10: Pistão.

1. *Mostre que o trabalho produzido pelo gás quando o volume expande de V_1 para V_2 é dado por $W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$.*
2. *Numa máquina a vapor a pressão P e o volume V de vapor satisfazem a equação $PV^{1,4} = k$, onde k é uma constante. (Isto é verdade para uma expansão adiabática, que é uma expansão onde não ocorre transferência de calor entre o cilindro e o seu exterior). Use a alínea anterior para calcular o trabalho realizado pelo motor num ciclo quando o vapor começa a uma pressão de 72 Kgf/cm^2 e um volume de 100 cm^3 e expande até um volume de 800 cm^3.*

Exercício 3.56 *Uma partícula de massa m movendo-se num fluido está sujeita a uma resistência de viscosidade R, que é função da velocidade v. A relação entre a resistência R, a velocidade v e o tempo t é dada pela equação*

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\, du.$$

Suponhamos que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para um fluido particular, onde R é dado em newtons e v em metros/segundo. Se $m = 10$ kg e $v(0) = 10$ m/seg calcule o tempo necessário para a partícula reduzir a sua velocidade para $v = 5$ m/seg.

Exercício 3.57 *No método da diluição do contraste, usado para medir a capacidade cardíaca, introduz-se uma substância (contraste) na corrente sanguínea e uma sonda na aorta para medir a concentração de contraste que sai do coração em intervalos de tempo regulares, durante o intervalo $[0, T]$, até que o contraste esteja terminado. A capacidade cardíaca do coração (volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo), será dada por*

$$\frac{A}{\int_0^T c(t)\, dt},$$

onde A é a quantidade de contraste (mg) introduzido e $c(t)$ a concentração de contraste (mg/L) no instante t. Calcule a capacidade cardíaca quando $A = 8$ mg e $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$ mg/L, com $0 \leq t \leq 12$.

Exercício 3.58 *Uma substância radioactiva decai exponencialmente. Assim, a massa no tempo t é*

$$m(t) = m(0)e^{kt},$$

onde $m(0)$ é a massa inicial e k uma constante negativa. A "vida média" de um átomo na substância é dada por

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\, dt.$$

Para o isótopo radioactivo de carbono ${}^{14}C$, usado na datação, o valor de k é $-0{,}000124$. Calcule a vida média de um átomo de ${}^{14}C$.

Exercício 3.59 *A "velocidade média" das moléculas de um gás ideal é dada por*

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\, dv,$$

onde M é o peso molecular do gás, R a constante do gás, T a temperatura do gás e v a velocidade molecular. Mostre que

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Exercício 3.60 *Considere as seguintes regras numéricas de integração ($h = (b-a)/n$):*

Ponto médio:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h \left[f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + \cdots + f(\frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}) + f(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}) \right];$$

Trapézio:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right].$$

Considerando $n = 10$, calcule o valor aproximado dos seguintes integrais, comparando o resultado com a solução exacta:

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\, dx$; *2.* $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\, dx$; *3.* $\displaystyle\int_0^2 x^3\, dx$.

Exercício 3.61 *A quantidade de massa que é libertada por um reactor num dado período de tempo é dada por*

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Qc\, dt$$

onde t_1 e t_2 são os momentos inicial e terminal, respectivamente. Usando a fórmula do trapézio determine M para $Q = 5$ m^3/min e os dados da tabela:

t (min)	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*
c (mg/m^3)	10,00	35,00	54,73	52,16	37,07

.

Exercício 3.62 *A função*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

é usada com muita frequência em disciplinas tão diversas como a teoria das probabilidades, distribuição de calor, difusão de matérias, etc. Usando uma das regras de integração com $n = 10$, calcule uma aproximação para o valor do referido integral.

Exercício 3.63 *Determine o comprimento aproximado do arco do gráfico da função*

$$f(x) = x^3 - x,$$

entre os pontos (-1,0) e (2,6), usando a fórmula do trapézio composta, com 4 subintervalos.

Exercício 3.64 *A intensidade de luz com comprimento de onda λ viajando através de uma grelha de difração com n aberturas a um ângulo θ é dada por*

$$I(\theta) = (n/k)^2 \operatorname{sen}^2 k,$$

onde

$$k = (\pi n d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$$

e d é a distância entre cada abertura. Um laser de hélio-néon com comprimento de onda $\lambda = 632{,}8 \times 10^{-9}$ m emite uma banda estreita de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, através de uma grelha com 10.000 aberturas separadas por 10^{-4} m. Obtenha um valor aproximado para a intensidade de luz total que sai da grelha

$$\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta.$$

Exercício 3.65 *A fim de planificar uma sala para raios infravermelhos, estamos interessados em calcular a energia emitida por um corpo negro (isto é, um objecto capaz de irradiar em todo o espectro à temperatura ambiente) no espectro (infravermelho) compreendido entre os comprimentos de onda 3 μm e 14 μm. A solução deste problema obtém-se calculando o integral*

$$E(T) = 2{,}39 \times 10^{-11} \int_{3\times10^{-4}}^{14\times10^{-4}} \frac{dx}{x^5 \left(e^{1{,}432/(Tx)-1}\right)},$$

que é a equação de Planck para a energia $E(T)$, onde x é o comprimento de onda (em cm) e T a temperatura (em Kelvin) do corpo negro. Recorra à fórmula do trapézio para determinar a função $E(T)$, com $T = 213$ K.

Capítulo 4

Equações diferenciais

4.1 Modelos

4.1.1 Crescimento de uma população

Consideremos uma população cuja taxa de crescimento é proporcional ao seu tamanho. Então, se P representar o número de indivíduos da população e k a constante de proporcionalidade, a taxa de crescimento é dada por

$$P'(t) = kP(t)$$

ou, noutra notação e omitindo a dependência de t na função P,

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{4.1}$$

Notemos que, uma vez que se trata de uma população, $P(t) > 0$, para todo o instante t.

Para saber qual o comportamento da população à medida que o tempo aumenta, consideremos dois casos.

Caso $k > 0$:

Neste caso, $P'(t) > 0$, para todo o t, o que significa que a população está sempre a aumentar, a partir de um valor inicial $P(0) = P_0$. Além disso, à medida que a população $P(t)$ aumenta, a sua taxa de crescimento também aumenta.

Caso $k < 0$:

Neste caso, $P'(t) < 0$, para todo o t, o que significa que a população está sempre a decrescer, a partir de um valor inicial $P(0) = P_0$. Além disso, à medida que a população $P(t)$ aumenta, a sua taxa de crescimento diminui.

Uma questão que se coloca é a de saber como determinar a solução da equação (4.1). Se considerarmos

$$P(t) = Ce^{kt}, \tag{4.2}$$

temos que

$$P'(t) = Cke^{kt} = kP(t).$$

Logo (4.2) é uma solução da equação. A constante C pode ser determinada pela condição inicial $P(0) = P_0$. Assim, considerando $t = 0$ em (4.2), sai que $C = P_0$.

O modelo de crescimento exponencial é também chamado modelo de Malthus. Apresentado em 1798 por Thomas Robert Malthus (1766–1834), (4.1) foi o primeiro modelo do crescimento de uma população humana, onde a constante de proporcionalidade é dada pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

O modelo de Malthus descreve o crescimento de uma população em condições ideais mas não nos podemos esquecer que, por exemplo, o ambiente tem recursos limitados o que faz com que a população não possa crescer indefinidamente. Muitas populações começam por crescer exponencialmente mas o nível da população começa a estabilizar quando ela se aproxima da sua capacidade de suporte S (ou a diminuir em relação a S, se ela exceder o valor de S).

Vamos considerar uma população P cuja taxa de variação verifica as seguintes propriedades: é proporcional a P, para valores de P pequenos e é negativa, para valores de P superiores à capacidade de suporte S. Consideremos, por exemplo, um modelo cuja taxa de variação seja proporcional tanto a P como a $1 - \frac{P}{S}$, isto é,

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{S}\right). \tag{4.3}$$

Para este modelo temos que, se $P \ll S$ então $\frac{P}{S} \approx 0$ e

$$\frac{dP}{dt} \approx kP.$$

Por outro lado, se $P > S$ então $1 - \frac{P}{S} < 0$ e, como tal,

$$\frac{dP}{dt} < 0.$$

A equação (4.3) é conhecida por equação logística. Esta equação foi proposta por Pierre François Verhulst (1804–1849), em 1840, como um modelo para o crescimento da população mundial.

Notemos que as constantes $P = 0$ e $P = S$ são soluções da equação logística (4.3). Estas soluções são chamadas soluções de equilíbrio. Mais ainda, se $P(0) = P_0 \in]0, S[$ então $\frac{dP}{dt} > 0$ e a população aumenta. Por outro lado, se $P(0) = P_0 > S$ então $\frac{dP}{dt} < 0$ e a população diminui.

4.1.2 Movimento de uma mola

Segundo a Lei de Hooke, estabelecida por Robert Hooke (1635–1703), a força elástica de uma mola de comprimento $x(t)$, dependente do tempo, suspensa na vertical e sujeita a uma carga de massa m, é dada por

$$F = -kx,$$

com $k > 0$ a chamada constante da mola. Por outro lado, pela Segunda Lei de Isaac Newton (1643–1727),

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

e, como tal, o comprimento da mola pode ser obtido pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Pode demonstrar-se que toda a solução desta equação se pode escrever como combinação linear de senos e cossenos.

4.1.3 Caso geral

Uma equação diferencial é uma equação que contém uma função como incógnita e uma ou mais das suas derivadas. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. Por exemplo,

$$y' = xy \qquad (y = y(x))$$

é uma equação diferencial de primeira ordem.

Uma função f é solução da equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e as suas derivadas são substituídas na equação. No exemplo anterior, $y = f(x)$ é solução da equação se $f'(x) = xf(x)$.

Resolver uma equação diferencial significa encontrar todas as suas soluções (pode não ser fácil...). Por exemplo, se $y' = x^3$ temos que a solução é dada, imediatamente, pela primitiva $y = x^4/4 + c$, $c \in \mathbb{R}$. No entanto, se $y' = xy$, a solução já é mais difícil de obter. Notemos que, tal como na primitivação, uma equação diferencial tem sempre mais do que uma solução.

Em muitos problemas físicos queremos apenas encontrar uma solução particular da equação que satisfaça uma condição do tipo $y(x_0) = y_0$. O problema de achar a solução de uma equação diferencial que satisfaça uma condição inicial $y(x_0) = y_0$ é chamado problema de condição inicial.

Exercício 4.1 *Mostre que $y(t) = t^2(e^t - e)$ é solução do problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{2}{t}y + t^2e^t \\ y(1) &= 0 \end{cases}, \text{ com } t \in [1,2].$$

Exercício 4.2 *Mostre que $y(t) = e^{-\operatorname{sen} t}$ é a solução do problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= -y\cos t \\ y(0) &= 1 \end{cases}, \text{ com } t \in [0,1].$$

Nas próximas secções vamos estudar equações diferenciais que podem ser resolvidas explicitamente.

4.2 Equações separáveis

Uma equação separável (ou de variáveis separáveis) é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser escrita na forma

$$y'(x) = g(x)f(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

De forma equivalente, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever a equação na forma alternativa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \qquad \text{com } h(y) = \frac{1}{f(y)}.$$

Logo

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Leftrightarrow \int h(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx \Leftrightarrow \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx.$$

Obtemos assim y (implicitamente) como função de x.

Poderíamos ter chegado ao mesmo resultado se tivéssemos usado formas diferenciais. Nesse caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \Leftrightarrow h(y)\ dy = g(x)\ dx \Leftrightarrow \int h(y)\ dy = \int g(x)\ dx.$$

Também poderíamos ter usado a técnica da primitivação por substituição. Assim

$$\int h(y)\ dy = \int h(y(x))\frac{dy}{dx}\ dx = \int h(y(x))\frac{g(x)}{h(y(x))}\ dx = \int g(x)\ dx.$$

Exercício 4.3 *Determine a solução do problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{6x^2}{2y+\cos y} \\ y(1) &= \pi \end{cases}.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y} \Leftrightarrow (2y+\cos y)dy = 6x^2dx \Leftrightarrow \int 2y+\cos y\ dy = \int 6x^2\ dx.$$

Integrando nos dois membros obtemos

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial podemos determinar a constante c na forma

$$\pi^2 + \operatorname{sen}\pi = 2 + c \Rightarrow c = \pi^2 - 2. \quad \square$$

Um exemplo de um problema que pode ser resolvido pela técnica da separação de variáveis é o chamado problema das misturas. Consideremos um tanque com capacidade fixa, preenchido com uma solução completamente misturada de uma substância. Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai do tanque a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denotar a quantidade de substância no tanque no tempo t então

$$y'(t) = \text{ taxa de entrada } - \text{ taxa de saída.}$$

A título de exemplo, considere-se um tanque com 20 Kg de sal dissolvido em 5000 L de água. Suponhamos que fazemos entrar no tanque água salgada com 0,03 Kg de sal por litro a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Que quantidade de sal permanece no tanque ao fim de meia hora?

Se representarmos por $y(t)$ a quantidade de sal no instante t, com t o tempo em minutos, pelos dados do problema temos que $y(0) = 20$ Kg e queremos determinar $y(30)$. Temos que a variação de sal no tanque é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \text{ taxa de entrada (de sal) } - \text{ taxa de saída (de sal).}$$

Mas,

$$\text{taxa de entrada (de sal) } = (0{,}03 \text{ Kg/L}) \times (25 \text{ L/min}) = 0{,}75 \text{ Kg/min}$$

e

$$\text{taxa de saída (de sal) } = \left(\frac{y(t)}{5000}\text{ Kg/L}\right) \times (25 \text{ L/min}) = \frac{y(t)}{200}\text{ Kg/min.}$$

Logo
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y}{200} = \frac{150-y}{200}.$$
Para resolver esta equação temos, sucessivamente,
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = \frac{150-y}{200} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{150-y}\, dy = \int \frac{1}{200}\, dt \\
&\Rightarrow \quad -\ln|150-y| = \frac{1}{200}t + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad |150-y| = e^{-c}e^{-(1/200)t}, \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad 150-y = Ae^{-(1/200)t}, \quad A = \pm e^{-c},\ c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad y(t) = 150 - Ae^{-(1/200)t}, \quad A \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$
Para obter A notemos que, como $y(0) = 20$ então $A = 130$. Assim, temos que
$$y(t) = 150 - 130e^{-(1/200)t} \Rightarrow y(30) = 150 - 130e^{-(3/20)} \approx 38{,}1080 \text{ Kg}.$$

4.3 Crescimento e decaimento exponencial

Vimos que um modelo para o crescimento exponencial pode ser dado por
$$\frac{dy}{dt} = ky, \qquad k \in \mathbb{R} \text{ (constante)}, \tag{4.4}$$
onde $y(t)$ é o valor de uma quantidade y no tempo t. Neste modelo supõe-se que a taxa de variação de y em relação a t é proporcional a y. A esta lei chama-se lei de crescimento natural ($k > 0$) ou lei de decaimento natural ($k < 0$).

Como a equação diferencial (4.4) é separável temos
$$\int \frac{dy}{y} = \int k\, dt \Rightarrow \ln|y| = kt + c \Rightarrow |y| = e^{kt+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
Então
$$y(t) = Ae^{kt}, \qquad A = \pm e^{c}.$$
Notemos ainda que, se conhecermos uma condição inicial $y(0) = y_0$, o valor de A pode ser dado por $A = y_0$. Provámos então que a solução do problema de condição inicial
$$\begin{cases} y'(t) &= ky \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$
é
$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Vejamos, agora, qual o significado da constante de proporcionalidade k. Temos que
$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow k = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.$$
Assim, k representa a taxa de crescimento (decaimento) relativa, isto é, a taxa de crescimento (decaimento) dividida pelo tamanho da população. Podemos então dizer que, no modelo exponencial a taxa de crescimento (decaimento) relativa é constante. Por exemplo, se
$$\frac{dy}{dt} = 0{,}02y$$
dizemos que a taxa de crescimento relativa é de 2%.

Exercício 4.4 *Em 1626 os índios Lenape venderam a ilha de Manhattan ao Director Geral da Companhia Holandesa das Índias Ocidentais e Colonização, o holandês Peter Minuit, por 60 florins em quinquilharia, o equivalente a 24 dólares (cerca de 19 euros). Se, nessa altura, os índios tivessem colocado o dinheiro a render a uma taxa de 6% ao ano, quanto dinheiro teriam agora?*

Um exemplo de grande importância prática é o do decaimento radioactivo. Como se sabe, as substâncias radioactivas decaem pela emissão expontânea de radiação. Sabe-se experimentalmente que, se $m(t)$ é a massa da substância que fica da massa inicial m_0 ao fim de um tempo t, então a taxa de decaimento relativa $-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$ é constante. Temos então que

$$\frac{dm}{dt} = km, \qquad k < 0,$$

o que implica

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

A taxa de decaimento é calculada em função da meia-vida da substância, isto é, do tempo necessário para a massa inicial decair para metade do seu valor.

Exercício 4.5 *A meia-vida do rádio-226 é $^{226}_{88}Ra$ é 1590 anos. Sabendo que uma amostra de rádio-226 tem massa 100 mg, encontre a massa de $^{226}_{88}Ra$ que permanece ao fim de t anos.*

Resolução: Temos que resolver o problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} & = & km \\ m(0) & = & 100 \end{cases}.$$

Como vimos, $m(t) = 100e^{kt}$. Falta-nos apenas determinar o valor da taxa de decaimento relativa k. Pelos dados do problema, $m(1590) = 50$ mg e, como tal,

$$100e^{1590k} = 50 \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{1590}.$$

Então

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2/1590)t} = 100 \times 2^{-t/1590} \text{ mg.} \quad \square$$

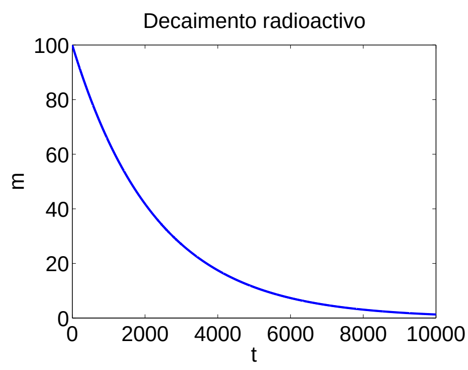

Figura 4.1: Solução do Exercício 4.5.

4.4 Equação logística

Como vimos, o modelo de crescimento exponencial de uma população só é válido nos instantes iniciais. Assim, se $y(t)$ for o tamanho da população no instante t temos que

$$\frac{dy}{dt} \approx ky, \qquad y \text{ (pequeno)}.$$

Isto que dizer que a taxa de crescimento relativa da população é praticamente constante quando a população é pequena.

No modelo que agora pretendemos estudar, a taxa de crescimento relativa diminui quando a população aumenta e torna-se negativa quando o número de indivíduos da população ultrapassa a capacidade de suporte S. A expressão mais simples para uma taxa de crescimento relativa nessas circunstâncias é

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{S}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right).$$

Obtemos assim a chamada equação logística

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) \tag{4.5}$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{dy}{dt} = k_1 y\left(S - y\right), \qquad k_1 = \frac{k}{S}.$$

Notemos que este modelo verifica o pretendido. De facto, se $y \ll S$ então $\frac{y}{S} \approx 0$ e, como tal, $\frac{dy}{dt} \approx ky$. Por outro lado, se $y \to S$ então $\frac{y}{S} \to 0$ e assim $\frac{dy}{dt} \to 0$. Além disso, se $y \in]0, S[$ então $ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) > 0$ e assim $\frac{dy}{dt} > 0$, ou seja, a população aumenta. Se $y > S$ então $ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) < 0$ e assim $\frac{dy}{dt} < 0$, ou seja, a população diminui.

Vamos agora ver como obter a solução analítica da equação logística (4.5). Como é uma equação de variáveis separáveis temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right) \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{S}\right)} = \int k\ dt \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{S}{y\left(S - y\right)}\ dy = \int k\ dt \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y} + \frac{1}{S - y}\ dy = kt \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|S - y| = kt + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad \ln|S - y| - \ln|y| = -kt - c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{S - y}{y}\right| = -kt - c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad \left|\frac{S - y}{y}\right| = e^{-kt-c}, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad \frac{S - y}{y} = Ae^{-kt}, \qquad A = \pm e^{-c},\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Então
$$\frac{S}{y} - 1 = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{S}{y} = Ae^{-kt} + 1 \Rightarrow y = \frac{S}{Ae^{-kt}+1}.$$
O valor de A pode ser obtido a partir da condição inicial. Se considerarmos $y(0) = y_0$ temos que, de (4.6),
$$\frac{S - y_0}{y_0} = A.$$
Assim, a solução do problema de condição inicial logístico
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} &= ky\left(1 - \dfrac{y}{S}\right) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$
é
$$y(t) = \frac{S}{Ae^{-kt}+1}, \qquad A = \frac{S - y_0}{y_0}. \tag{4.7}$$

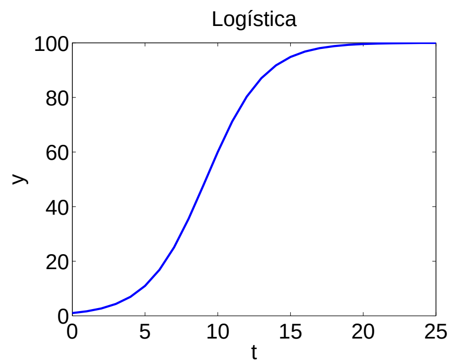

Figura 4.2: Equação logística (4.7) com $S = 100$, $k = 0{,}5$ e $y_0 = 1$.

4.5 Equações lineares

Uma equação diferencial linear de primeira ordem é aquela que pode ser escrita na forma
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$
onde P e Q são funções contínuas num dado intervalo.

Um exemplo é dado pela equação
$$xy' + y = 2x \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = 2.$$
Esta equação não é separável. Notemos, no entanto, que
$$xy' + y = (xy)'.$$
Assim,
$$(xy)' = 2x \Leftrightarrow \int (xy)'\,dx = \int 2x\,dx \Leftrightarrow xy = x^2 + c \Leftrightarrow y(x) = x + \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Se tivessemos partido de

$$y' + \frac{1}{x}y = 2$$

teríamos que multiplicar ambos os membros por x por forma a obter

$$xy' + y = 2x$$

e depois resolver o problema. Nesse caso, diríamos que $I(x) = x$ era um factor integrante da equação.

Consideremos, de novo, a equação

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Vamos calcular o factor integrante da equação, isto é, a função $I(x)$ tal que

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'. \tag{4.8}$$

Se conseguirmos encontrar $I(x)$ nestas condições então

$$\begin{aligned}(I(x)y)' = I(x)Q(x) \quad &\Rightarrow \quad I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)Q(x)\,dx + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vamos agora obter a expressão para $I(x)$. De (4.8) temos

$$\begin{aligned}I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad &\Rightarrow \quad I(x)y' + I(x)P(x)y = I'(x)y + I(x)y'\\ &\Rightarrow \quad I(x)P(x) = I'(x)\\ &\Rightarrow \quad \frac{dI}{dx} = I(x)P(x)\\ &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{I(x)}\,dI = \int P(x)\,dx\\ &\Rightarrow \quad \ln|I(x)| = \int P(x)\,dx + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &\Rightarrow \quad I(x) = Ae^{\int P(x)\,dx}, \quad A = \pm e^c,\ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Assim $I(x)$ é um factor integrante qualquer que seja o A. Vamos escolher, por exemplo, $A = 1$. Então

$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Pelo que foi dito, podemos estabelecer o seguinte algoritmo para resolver o problema de condição inicial linear de primeira ordem

$$\begin{cases} y' + P(x)y &= Q(x)\\ y(x_0) &= y_0\end{cases}.$$

1. Obter o factor integrante
$$I(x) = e^{\int P(x)\,dx}.$$

2. Multiplicar ambos os membros por $I(x)$
$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' = I(x)Q(x)$$
e resolver a equação
$$(I(x)y)' = I(x)Q(x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{I(x)}\left(\int I(x)Q(x)\,dx + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Determinar c usando a condição inicial.

4.6 Exercícios práticos

Seguem-se alguns exercícios destinados a serem resolvidos nas aulas práticas.

Exercício 4.6 *Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis:*

1. $(1+t)\dfrac{dy}{dt} - y = 0$;
2. $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{y}, \quad y(4) = 3$;
3. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 + 4$;
4. $e^t \dfrac{dy}{dt} = 2t$;
5. $(4y + yt^2)dy - (2t + ty^2)dt = 0$;
6. $\operatorname{sen} x \cos y y' + \cos x \operatorname{sen} y = 0$;
7. $-x + yy' = 0$.

Exercício 4.7 *Um projéctil é lançado da superfície terreste com uma velocidade V. Supondo que não há arrasto a equação do movimento é*

$$\nu \frac{d\nu}{dr} = -g\frac{R^2}{r^2},$$

onde ν é a velocidade à distância r do centro da Terra que tem raio R. Considerando $g = 9{,}81$ m/s^2, $R = 6{,}37 \times 10^6$ m e $V = 15000$ m/s, determine o valor da velocidade quando $r = 2R$.

Exercício 4.8 *Uma solução líquida flui de forma constante ao longo de um tubo na direcção x. Alguns dos solutos contidos na solução difundem-se através da parede do tubo reduzindo a concentração z no tubo. A concentração z é dada por*

$$\frac{dz}{dx} = -z(0{,}2 + \sqrt{z})e^{-0{,}03x}.$$

Se tomarmos $z = 1{,}5$ em $x = 2$ determine o valor de z em $x = 2{,}4$.

Exercício 4.9 *Uma cultura tem inicialmente um número N_0 de bactérias. No instante $t = 1$ hora, o número de bactérias é $3N_0/2$. Supondo que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.*

Exercício 4.10 *Um tanque tem* 1000 *litros de água pura. Em cada minuto, uma torneira A despeja 5 litros de água salgada com* 0,05 *Kg de sal por litro de água e uma torneira B despeja* 10 *litros de água salgada com* 0,04 *Kg de sal por litro de água. A solução é completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de* 15 *litros por minuto. Indique a quantidade de sal que está no tanque após t minutos.*

Exercício 4.11 *Um certo medicamento é usado para tratar sintomas de angina crónica e hipertensão. Como bloqueador dos canais de cálcio, este fármaco faz aumentar o aporte de oxigénio ao miocárdio e simultaneamente diminui a necessidade geral de oxigénio no organismo. Isto é conseguido através da redução do batimento cardíaco e expansão do volume do sistema circulatório, o que, por sua vez, provoca uma diminuição da tensão arterial. Testes experimentais mostram que a meia-vida do referido medicamento, no interior do corpo humano, é de* 20 *horas. Admita que a taxa de absorção de um medicamento pelo* *organismo, num dado instante, é proporcional à quantidade de medicamento presente no organismo nesse instante.*

Supondo que uma certa dose é administrada de uma só vez a um paciente, escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação do medicamento no seu organismo e determine a constante de proporcionalidade. Determine a solução da equação diferencial.

Exercício 4.12 *Um estudante portador do vírus da gripe regressa a um colégio com* 1000 *alunos. Suponha que o colégio está isolado e que o vírus se propaga com uma taxa de variação proporcional não apenas ao número y de alunos já infectados mas também ao número de alunos não infectados.*

1. *Determine o número de alunos infectados após* 6 *dias, sabendo que passados* 4 *dias eles são já* 50.

2. *Calcule o valor limite da função $y(t)$, quando t tende para $+\infty$.*

Exercício 4.13 *No processo de conservação de alimentos o açúcar de cana passa por uma conversão na qual se transforma numa mistura de glucose e frutose.*

Sabe-se que numa solução diluída a taxa de conversão é proporcional à concentração $y(t)$ de açúcar não alterado. Sabendo que a dita concentração no instante inicial é igual a $1/50$ *e de* $1/200$ *ao fim de* 3 *horas, determine a concentração de açúcar alterado ao fim de 6 horas.*

Exercício 4.14 *Descobriu-se um osso fossilizado com* $1/1000$ *da quantidade original de carbono-14. Sabendo que a meia-vida do carbono-14 é de 5600 anos, determine a idade do fóssil. Admita que a taxa de desintegração (ou decaimento) do carbono-14 é proporcional à massa existente em cada instante.*

Exercício 4.15 *A população de um país foi de* 12,1 *milhões de habitantes em* 1996 *e de* 13,268 *milhões em* 2000. *Supondo que a taxa de crescimento é directamente proporcional ao tamanho da população, estime o tamanho da população em* 2005, 2006 *e* 2007.

Exercício 4.16 *Para que um fármaco possa ser devidamente administrado, é necessário que se conheça o modo como actua no organismo e, em particular, a forma como é absorvido. A relação dose/resposta do organismo, estabelece uma regra vital na determinaçao da quantidade a administrar em cada dose e do intervalo de tempo entre doses sucessivas.*

Testes experimentais a determinado tipo de antibióticos, permitiram concluir que a taxa de variação da concentração destes fármacos na corrente sanguínea, num determinado instante de tempo, é proporcional à sua concentração nesse mesmo instante. Suponha que $y(t)$ representa a concentração deste tipo de antibióticos no organismo (isto é, o número de unidades por mililitro de sangue) no instante t.

1. *Escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação destes antibióticos no organismo.*

2. *Há vários métodos para combater uma determinada infecção. Em situações graves é necessário um tratamento de choque, que consiste em administrar ao paciente várias doses, igualmente espaçadas no tempo, a primeira das quais já tem a concentração máxima requerida C_m e as seguintes permitem apenas corrigir desvios a este valor devidos à perda de concentração por eliminação.*

(a) *Determine a concentração de antibiótico após um tempo prescrito T, depois da administração da primeira dose.*

(b) *Se uma segunda dose é administrada nesse instante T, qual deve ser a sua concentração, de forma a repôr de imediato a concentração inicial C_m?*

(c) *Supondo que este procedimento se repete nos instantes $2T$, $3T$, $4T$, faça um esboço do gráfico da função y no intervalo $[0, 4T]$.*

(d) *Determine o tempo que decorre desde a administração da última dose até que 99% do medicamento desapareça da corrente sanguínea, sabendo que a sua meia-vida, enquanto no organismo, é de 30 minutos.*

Exercício 4.17 *Suponha que uma população y evolui de acordo com a equação logística*

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}05y - 0{,}005y^2,$$

onde t é medido em semanas. Determine a capacidade de suporte da população e valor da sua taxa de crescimento.

Exercício 4.18 *Suponha que o modelo de crescimento de uma população y é descrito pela equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3y}{20} - \frac{y^2}{1600}.$$

Considerando $y(0) = 15$, determine o número de indivíduos da população no instante $t = 10$.

Exercício 4.19 *Suponha que uma dada população está dividida em dois grupos: aqueles que sofrem de uma certa doença infecto-contagiosa e aqueles que não sofrem dessa doença mas que a podem contrair por contacto com uma pessoa infectada. Sabe-se que a taxa de propagação desta doença é directamente proporcional ao número de contactos entre gente infectada e gente sã. Suponha que os dois grupos convivem sem qualquer tipo de precaução.*

1. *Determine a equação diferencial que descreve a propagação desta doença.*
2. *Se $1/4$ da população está infectada num determinado instante $t = 0$, esboce o gráfico da função que descreve a propagação da doença, a partir desse instante.*
3. *Quanto tempo decorrerá até que toda a população esteja doente?*

Exercício 4.20 *Um modelo para o crescimento da biomassa (massa total dos membros da população) de atum do Pacífico, dada em quilogramas, é dado por*

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right), \tag{4.9}$$

onde t é medido em anos, $k = 0{,}71\%$ ao ano e a capacidade de suporte foi medida como sendo $S = 8 \times 10^7$ quilogramas.

1. *Se $y(0) = 2 \times 10^7$ quilogramas, calcule a biomassa um ano depois.*
2. *Quanto tempo levará a biomassa a alcançar 4×10^7 quilogramas?*

Exercício 4.21 *Seja y uma solução da equação logística (4.9).*

1. *Mostre que*
$$\frac{d^2y}{dt^2} = k^2 y\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{2y}{S}\right).$$

2. *Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade da sua capacidade de suporte.*

Exercício 4.22 *Para algumas espécies existe uma população mínima m tal que as espécies se tornam extintas quando o tamanho da população é inferior a esse valor. Nesse caso, o modelo logístico deve ser substituído por*
$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{S}\right)\left(1 - \frac{m}{y}\right), \qquad y(0) = y_0.$$

1. *Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < y < S$ e decrescente se $0 < y < m$.*

2. *Resolva o problema de condição inicial.*

3. *Mostre que se $y_0 < m$ as espécies se tornarão extintas.*

Exercício 4.23 *Num modelo de crescimento sazonal, uma função periódica no tempo é introduzida para considerar as variações na taxa de crescimento. Esse modelo pode ser traduzido pelo problema de condição inicial*
$$\frac{dy}{dt} = ky\cos(rt - \phi), \qquad y(0) = 1,$$
onde k, r e ϕ são constantes positivas. Determine a solução do modelo de crescimento sazonal.

Exercício 4.24 *Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:*

1. $t\dfrac{dy}{dt} - 4y = t^6$;
2. $\dfrac{dy}{dt} + 2ty = t$;
3. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+t}{t}$;
4. $\dfrac{dy}{dt} = y + t$;
5. $dy + (y\cos x - e^{-\operatorname{sen} x})dx = 0$;
6. $t^2y' + t(t+2)y = e^t$;
7. $y' - \dfrac{1}{x}y = x + \dfrac{x}{1+x^2}$;
8. $t^2y' + t(t+3)y = e^{-t}$;
9. $y' + (\cos x)\, y = x^2\, e^{-\operatorname{sen} x}$.

Exercício 4.25 *Uma equação de Bernoulli (em homenagem a James Bernoulli (1654--1705)) é da forma*
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$
com n um número inteiro. Observe que, se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n, mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear
$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x).$$

Exercício 4.26 *Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:*

1. $xy' + y = -xy^2$; *2.* $y' + y = xy^3$; *3.* $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$.

Exercício 4.27 *A Lei de Arrefecimento de Newton diz que taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considere uma esfera de metal aquecida a $100°$ e que é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 30°$. Ao fim de cinco minutos a temperatura da esfera desceu para $60°$. Determine:

1. *a temperatura da esfera ao fim de meia-hora;*
2. *o instante em que a temperatura da esfera atinge $31°$.*

Exercício 4.28 *Às 23 horas John foi encontrado morto no seu apartamento. Claxon chegou ao local do crime às 23h30m e tirou imediatamente a temperatura da vítima: $30°$. Uma hora depois, (às 0h30m) a temperatura do corpo era de $25°$. Claxon notou ainda que a temperatura da sala se mantinha constantemente igual a $20°$. A que hora ocorreu o crime?*

Exercício 4.29 *A Ana pesa 60 quilogramas e está a fazer uma dieta de 1600 calorias por dia, das quais 850 são usadas directamente no metabolismo basal. Mais, a Ana gasta cerca de 15 calorias por dia e por quilograma do seu peso a fazer exercício físico.*

1. *Supondo que um quilograma de gordura tem 10000 calorias e que a reserva de calorias na forma de gordura é 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a de forma a conhecer o peso da Ana em função do tempo.*
2. *Será que o peso da Ana vai chegar ao peso de equilíbrio?*

Exercício 4.30 *Um circuito eléctrico simples consiste num medidor de corrente eléctrica I (em amperes), uma resistência R (em ohms), um inductor L (em henries) e uma voltagem aplicada E (em volts). Pela segunda Lei de Kirchhoff, a corrente I satisfaz*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

1. *Determine a corrente I em função do tempo t (medido em segundos), sabendo que $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ V, $L = 1$ H, $R = 2\ \Omega$ e $I(0) = 1$ A.*
2. *Calcule a corrente ao fim de 0.1 segundos.*

Exercício 4.31 *Um tanque contém 100 litros de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0,4 Kg/L é adicionada a uma taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 L/min. Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) ao fim de t minutos.*

1. *Tendo em conta que o volume do fluido no tanque não permanece constante ao longo do tempo, mostre que y satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}.$$

2. *Resolva a equação diferencial e calcule a concentração ao fim de 20 minutos.*

Capítulo 5

Sistemas de equações lineares

5.1 Introdução

Muitos sistemas físicos e matemáticos exibem propriedades que são geralmente conhecidas por "lineares". Essencialmente, essas propriedades têm a ver com a capacidade de:

1. adicionar dois ou mais objectos por forma a obter um novo objecto do sistema;

2. multiplicar qualquer objecto do sistema por um número real e obter um novo objecto do sistema.

Os resultados obtidos deverão ser consistentes com as leis aritméticas usuais. Em termos simbólicos, os requisitos impostos deverão ser tais que, se x e y forem dois objectos do sistema, $x + y$ e kx, com $k \in \mathbb{R}$, deverão ser elementos do sistema.

Uma forma alternativa de expressar a linearidade é: se x e y pertencerem ao sistema, então a combinação linear

$$\alpha x + \beta y, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

também pertence. Um espaço vectorial (ou linear) é um sistema com a propriedade linear onde os elementos do sistema, chamados vectores, verificam determinadas regras ou axiomas.

Um problema central da álgebra linear consiste em resolver sistemas de equações lineares. Existem várias formas de descrever o problema da resolução de um sistema de equações lineares. Vamos apresentar essas formas no contexto de um exemplo.

Consideremos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 3 \\ x & + & y & = & 5 \end{array} \right. \tag{5.1}$$

nas variáveis x e y. Queremos determinar os números reais α e β tais que, quando substituímos x por α e y por β nas equações anteriores, obtemos duas igualdades.

Descrição por linhas. Queremos determinar o ponto (α, β) que é a intersecção das rectas $3x - y = 3$ e $x + y = 5$. Muitas vezes iremos usar o abuso de linguagem: determinar o ponto (x, y) que é a intersecção das rectas $3x - y = 3$ e $x + y = 5$.

Os pontos podem ser encarados como vectores. Por exemplo, o ponto $(2, 3)$, solução do sistema (5.1), pode ser dado como sendo o vector com origem no ponto $(0, 0)$ e término no ponto $(2, 3)$. Iremos usar a notação $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

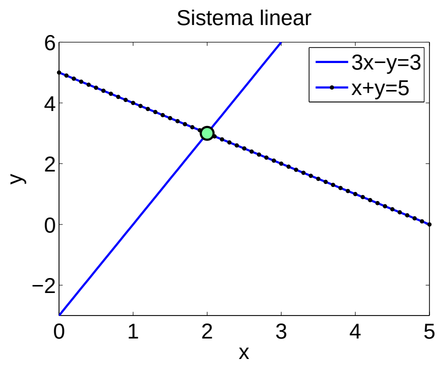

Figura 5.1: Sistema linear.

Convém também recordar o conceito de produto interno, que irá ser estudado com mais pormenor ao longo deste capítulo. Nesta altura, notemos apenas que a equação $3x - y = 3$, por exemplo, pode ser dada à custa do produto interno

$$< (3, -1), (x, y) >= 3 \Leftrightarrow 3x - y = 3.$$

Usando, para o produto interno, a notação

$$< (3, -1), (x, y) >= \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

temos que

$$3x - y = 3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3.$$

Para a equação $x + y = 5$ temos, de forma idêntica,

$$< (1, 1), (x, y) >= 5 \Leftrightarrow x + y = 5$$

ou, noutra notação,

$$x + y = 5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5.$$

Descrição por colunas. As equações (5.1) podem ser escritas na forma

$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Aqui o problema consiste em determinar os valores de x e y (cá está o abuso de linguagem...) que fazem com que $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ seja uma combinação linear de (ou dos vectores) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 5.1 *Considere o sistema linear (5.1).*

1. *Mostre, geometricamente, que a solução do sistema é o ponto/vector* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2. *Se alterássemos o segundo membro do sistema para* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, *qual seria a solução?*

Notemos que qualquer ponto/vector do plano $\mathbb{R}^2$ pode ser obtido por combinação linear de

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De facto, dado $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por outras palavras, e_1 e e_2 geram todos os vectores do plano.

Exercício 5.2 *Será que os vectores* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *geram todos os vectores de* $\mathbb{R}^2$*? E se fosse com os vectores* $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$*? E os vectores* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$*?*

Descrição matricial. As colunas e as linhas do sistema (5.1) podem ser expressas como um todo matricial. Para isso, vamos começar por considerar a notação $x = x_1$ e $y = x_2$ e definir a matriz dos coeficientes como sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vector dos termos independentes será representado por

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e o vector das incógnitas por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema (5.1) pode ser escrito na forma

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

isto é, multiplicamos a matriz A pelo vector x por forma a obter o vector b (o que significará multiplicar A por x?).

Na descrição matricial o problema consiste em determinar o vector x tal que $Ax = b$. Como vimos, a solução é

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A primeira questão que iremos abordar neste capítulo é a de saber como resolver, de forma eficaz, um sistema de equações lineares?

5.2 Método da eliminação de Gauss

Vamos começar por definir sistema de equações lineares.

Definição 5.1 (Sistema de equações lineares) *Uma* equação linear *em (ou nas incógnitas)* $x_1, x_2, ..., n_n$ *tem a forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde os números $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) são chamados os* coeficientes *e* $b \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) é o* termo independente. *Um* n*-úplo (sequência ordenada de* n *números)* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *é uma* solução *ou satisfaz a equação linear se, substituindo as variáveis* $x_1, x_2, ..., x_n$ *pelos números* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *obtivermos uma igualdade, isto é,*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b.$$

Um sistema de equações lineares *do tipo* $m \times n$*, isto é,* m *linhas e* n *colunas,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

tem solução $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *se este* n*-úplo for solução de todas as equações do sistema.* Resolver *um sistema de equações lineares consiste em determinar todas as suas soluções ou provar que não existe solução.*

Existe um algoritmo muito eficiente para resolver sistemas lineares que é o chamado método da eliminação de Gauss (MEG), em homenagem ao matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (ou Gauß) (1777–1855). O MEG transforma, passo a passo, o sistema dado num outro, mais simples, que lhe é equivalente.

5.2.1 Primeira abordagem

Vamos considerar um exemplo. Para resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & + & x_2 & & & = & -10 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 10x_3 & = & -4 \end{array}\right. \tag{5.2}$$

vamos efectuar um conjunto de operações que, como iremos ver, vão transformar o sistema dado num outro, mais simples, que lhe é equivalente. Temos sucessivamente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & + & x_2 & & & = & -10 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 10x_3 & = & -4 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3 = L_3 + (1/2)L_1]{L_2 = L_2 + (-3)L_1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{2}x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & 12x_3 & = & -16 \\ & & 5/2x_2 & - & 8x_3 & = & -3 \end{array}\right. .$$

Chama-se pivot deste primeiro passo do processo de eliminação ao coeficiente $\boxed{2}$ da incógnita x_1. Continuando o processo temos,

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} \boxed{2}\,x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & 12x_3 & = & -16 \\ & & 5/2x_2 & - & 8x_3 & = & -3 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3=2L_3]{L_2=(-1/2)L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & \boxed{1}\,x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ & & 5x_2 & - & 16x_3 & = & -6 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3=(-1/46)L_3]{L_3=L_3+(-5)L_2}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ & & & & \boxed{1}\,x_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Termina aqui a fase descendente do MEG, também chamada fase de condensação. Neste último passo, o pivot foi o coeficiente $\boxed{1}$ da incógnita x_2 na segunda linha. O coeficiente $\boxed{1}$ da variável x_3 na última equação também será chamado pivot.

Para fixar ideias temos que o pivot é o primeiro coeficiente não nulo da linha que efectua a eliminação. No nosso exemplo temos 3 equações, 3 incógnitas e 3 pivots. O multiplicador é dado pelo quociente entre a entrada a eliminar e o pivot.

Passemos agora à fase ascendente do MEG. Temos, sucessivamente,

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ & & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcc} x_1 & = & (2-x_2-4x_3)/2=-2 \\ x_2 & = & 8-6x_3=2 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Concluímos então que solução do sistema (5.2) é

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para além disso, podemos dizer que o vector $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$ pode ser obtido como combinação linear das colunas da matriz do sistema.

Pode provar-se o seguinte teorema.

Teorema 5.1 (Método da eliminação de Gauss) *Se um sistema linear for transformado noutro de acordo com as seguintes* operações elementares

- *troca de equações,*
- *cada membro da equação é multiplicado pela mesma quantidade não nula,*
- *uma equação é substituída por uma soma de si mesma e um múltiplo de outra,*

então ambos os sistemas são equivalentes, isto é, têm a mesma solução.

Consideremos outro exemplo de aplicação do MEG. Seja

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}\right. .$$

O elemento que se esperaria usar como primeiro pivot seria o coeficiente de x_1 na primeira equação. Acontece que esse elemento é zero e, portanto, nenhum múltiplo da primeira equação pode ser usado para anular a incógnita x_1 das restantes equações. Trocando linhas obtém-se

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}\right. .$$

Agora o primeiro pivot é 1. Procedendo de acordo com o MEG temos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{1}x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3 = L_3 + (-1)L_1]{}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & \boxed{1}x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3 = L_3 + L_2]{}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & & & \boxed{3}x_3 & = & 6 \end{array}\right. .$$

Passando à fase ascendente do MEG conclui-se imediatamente que $x_3 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_1 = 1$. Neste caso o sistema tem uma única solução e, como tal, diz-se possível e determinado.

Consideremos agora

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ & & & & ax_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \end{array}\right. .$$

Trocando a linha 2 com a linha 4 obtemos o sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ & & & & ax_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ & & & & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Vamos analisar o comportamento do sistema com a variação do valor do parâmetro a.

Caso 1: $a = 0$.

Neste caso, trocando as linhas 3 e 4, temos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ & & & & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 6x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Estava assim concluída a fase descendente do MEG. Na fase ascendente concluía-se imediatamente que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja o sistema é possível e determinado.

Caso 2: $a \neq 0$.

Neste caso, efectuando a operação elementar $L_4 + (-5/a)L_3$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ & & & & ax_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ & & & & & & (6-30/a)x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Caso 2.1: $a \neq 5$.

Aqui temos que $x_4 = 0$ e os restantes valores seriam obtidos de forma similar, ou seja o sistema seria possível e determinado.

Caso 2.2: $a = 5$.

Aqui temos que x_4 pode assumir um valor arbitrário e, assim sendo, o sistema tem infinitas soluções pois x_4 qualquer, $x_3 = -6/5x_4$, $x_2 = 1 + 2/5x_4$ e $x_1 = -2 - 6/5x_4$ são soluções do sistema. Assim, podemos escrever as soluções do sistema na forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6/5x_4 \\ 2/5x_4 \\ -6/5x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad x_4 \in \mathbb{R}.$$

Neste caso o sistema diz-se possível e indeterminado.

Notemos que, no caso $a = 5$, se o sistema original fosse idêntico mas com o segundo membro da última equação (no sistema já condensado, isto é, depois da fase descendente o MEG) igual a 1 em vez de 0, teríamos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ & & & & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

que é um sistema impossível.

Os exemplos anteriores mostram que podemos ter os seguintes casos no final do processo de condensação de um sistema $n \times n$.

Caso 1: $r = n$ pivots.

Neste caso a solução é única e o sistema diz-se possível e determinado.

Caso 2: $r < n$ pivots.

Neste caso, as últimas equações do sistema são do tipo $0 = 0$ ou $0 = a$, com $a \neq 0$.

Caso 2.1 Se houver, pelo menos, uma equação do tipo $0 = a$, com $a \neq 0$, o sistema é impossível.

Caso 2.2 Se não existir alguma equação do tipo $0 = a$, com $a \neq 0$, então existem $n - r$ equações do tipo $0 = 0$, ou seja, $n - r$ incógnitas/variáveis livres. Neste caso, o sistema tem infinitas soluções e, como tal, o sistema diz-se indeterminado e o grau de indeterminação é $n - r$.

5.2.2 Abordagem matricial

Consideremos, de novo, o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 = -10 \\ -x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -4 \end{cases}$$

que, como vimos, pode ser escrito na forma matricial

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Para resolver este sistema, vamos usar o método de eliminação de Gauss. Para isso, vamos começar por considerar a **matriz ampliada**

$$\big[A \mid b\big] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right].$$

A fase descendente do MEG (também chamada de **condensação**) é efectuada sobre a matriz ampliada. Temos, como foi visto,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + (1/2)L_1]{L_2 = L_2 + (-3)L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -12 & -16 \\ 0 & 5/2 & -8 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = 2L_3]{L_2 = (-1/2)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 8 \\ 0 & 5 & -16 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 = (-1/46)L_3]{L_3 = L_3 + (-5)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right].$$

A fase ascendente do método permitiria obter a solução do sistema.

O processo de condensação (ou eliminação) revela o número de pivots. O número de pivots usados no processo de condensação de uma matriz A é chamado a **característica** de A e será representado por $\mathrm{car}(A)$. Esta noção é muito importante na averiguação da natureza de um sistema linear. De facto, como vimos anteriormente, podemos ter vários casos possíveis no final da fase descendente do método da eliminação de Gauss.

Caso 1. $r = \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}\left(\big[A \mid b\big]\right) = n$ (número de incógnitas).

Neste caso o sistema é possível e determinado.

Caso 2. $r = \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}\left(\big[A \mid b\big]\right) < n$.

Neste caso o sistema é possível e indeterminado.

Caso 3. $r = \mathrm{car}(A) < \mathrm{car}\left(\big[A \mid b\big]\right)$.

Neste caso o sistema é impossível.

5.3 Notação matricial e operações com matrizes

5.3.1 Notação matricial

Como foi dito na secção anterior, um sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

pode ser escrito na forma

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

é a chamada matriz dos coeficientes,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é o chamado vector dos termos independentes e

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o vector das incógnitas.

Definição 5.2 (Matriz) *Chama-se* matriz *do tipo $m \times n$, sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), a todo o quadro que se obtém dispondo $m \times n$ números segundo m linhas e n colunas. A uma matriz A nessas condições diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (ou $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$).*

Em muitas situações iremos omitir a referência ao corpo dos reais ou ao corpo dos complexos nesta notação. Assim, se estivermos na presença de uma matriz do tipo $m \times n$, poderemos dizer que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.

Vamos usar a seguinte notação simplificada para a matriz A dada em (5.3): $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou, se não houver perigo de confusão quando ao tipo, $A = (a_{ij})$. A a_{ij} chama-se elemento, entrada ou componente da matriz A. Em a_{ij} o índice i indica a linha onde se encontra o elemento e o índice j a coluna. Também se diz, muitas vezes, que a_{ij} é o elemento (i, j) de A.

Se estivermos na presença de um sistema de n equações e n incógnitas, a sua matriz dos coeficientes diz-se quadrada. Neste caso usa-se a notação $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ou $A \in \mathcal{M}_n$. Se o sistema tiver m equações e n incógnitas, com $m \neq n$, a matriz dos seus coeficientes diz-se rectangular com m linhas e n colunas.

Uma matriz do tipo $m \times 1$, só com uma coluna, também se chama vector ou vector coluna. Uma matriz do tipo $1 \times n$, só com uma linha, também se chama vector ou vector linha.

Numa matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n$ diz-se de ordem n. Numa matriz quadrada $(a_{ij})_n$, ao conjunto dos elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} chamamos diagonal principal.

Vamos considerar alguns casos particulares de matrizes.

Matriz nula. É a matriz cujas entradas são todas nulas

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz nula do tipo $m \times n$ é representada por $0_{m \times n}$ ou, caso $m = n$, por 0_n.

Matriz diagonal. É uma matriz quadrada cujos únicos elementos não nulos se encontram na diagonal principal

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz identidade. É a matriz diagonal cujas entradas não nulas são todas iguais a 1

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz identidade também pode ser escrita na forma $I = (\delta_{ij})$, em que δ_{ij} é o símbolo Kronecker, em homenagem a Leopold Kronecker (1823–1891),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

A matriz identidade de ordem n é representada por I_n.

Matriz triangular superior. É uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz triangular inferior. É uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

5.3.2 Adição e multiplicação de matrizes por um escalar

As matrizes serão adicionadas entre si e multiplicadas por um escalar da mesma forma que os vectores o são: uma componente de cada vez. De facto, vamos considerar os vectores como casos particulares de matrizes; eles são matrizes com uma só coluna. Tal como os vectores, as matrizes só podem ser adicionadas se tiverem o mesmo tipo.

Consideremos alguns exemplos. Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vamos dar uma definição para o caso geral. Consideremos duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}).$$

Notemos que se multiplicarmos uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ por zero obtemos a matriz nula $0_{m\times n}$. Se multiplicarmos a matriz A por -1 obtemos uma matriz que representamos por $-A$.

Exercício 5.3 *Mostre que, se* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) e* $0 = 0_{m\times n}$*:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. $A + B = B + A$;
3. $A + 0 = 0 + A = A$;
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
8. $1A = A$.

5.3.3 Multiplicação de matrizes

Antes de considerarmos o caso geral, vamos ver como se pode definir a multiplicação de uma matriz por um vector. Consideremos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & -6x_2 & & & = & -2 \\ -2x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

que pode ser escrito, na notação matricial, na forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ax = b. \tag{5.4}$$

A operação produto matriz-vector vai ser definida por forma a que esta notação matricial faça sentido.

Atentemos a (5.4). O segundo membro, o vector b, é suficientemente claro pois é o vector coluna que contém os termos independentes do sistema linear. Já o primeiro membro não é assim tão claro pois é expresso como o produto de uma matriz A por um vector x. Esta multiplicação vai ser definida por forma a reproduzir exactamente o sistema original.

Assim, a primeira componente do produto Ax deve resultar da "multiplicação" da primeira linha de A pelo vector coluna x:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Este valor é igual à primeira componente de b. Obtemos, assim, $2x_1 + x_2 + x_3 = 5$, que é a primeira equação do sistema. A segunda componente de Ax é determinada à custa da segunda linha de A na forma

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - 6x_2 \end{bmatrix}$$

e a terceira componente à custa da terceira linha

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a equação matricial $Ax = b$ é precisamente equivalente ao sistema inicial.

A operação acabada de definir, fundamental na definição de todas as multiplicações matriciais, parte de um vector linha e um vector coluna de "comprimentos" iguais e produz um único número. Esse número é chamado o produto interno dos dois vectores. Por outras palavras, o produto interno de dois vectores é um número (ou uma matriz 1×1) que é dado pelo produto de um vector linha $1 \times n$ por um vector coluna $n \times 1$.

Existem duas formas de encarar a multiplicação de uma matriz por um vector.

Por linhas. Cada linha da matriz combina-se com o vector por forma a dar uma componente do produto. Temos três produtos internos quando temos três linhas na matriz. Por exemplo, fazendo $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, temos

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ 4 \times 1 - 6 + 0 \times 2 \times 1 \\ -2 \times 1 + 7 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix},$$

o que mostra que $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução do sistema original. Esta é a forma usual de definir a operação.

Por colunas. Esta segunda forma de definir o produto, apesar de menos usual, é igualmente importante. Ela produz a multiplicação uma coluna de cada vez. O produto Ax é determinado de uma só vez como sendo uma combinação linear de colunas de A.

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Resumindo, Ax é uma combinação linear das colunas de A cujos coeficientes pelos quais se multiplicam as colunas são as componentes de x.

Vamos agora definir a operação produto matriz-vector no caso geral. Consideremos uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um vector coluna $x = (x_j)_n$. Notemos que um índice é suficiente para descrever um vector e que, para que a operação faça sentido, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de x.

Para escrever o produto Ax vamos usar o símbolo de somatório. Assim, a i-ésima componente do vector coluna Ax é dada por

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

isto é

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_m,$$

ou, na notação de Einstein dos índices repetidos, convenção introduzida por Albert Einstein (1879–1955) em 1916 para simplificar a escrita de somatórios, por $Ax = (a_{ij}x_j)_m$. De facto,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

De novo se verifica que o número de colunas de A terá que ser igual ao número de linhas de x. Uma matriz $m \times n$ multiplicada por um vector $n \times 1$ produz um vector $m \times 1$.

Vamos agora definir o produto de duas matrizes. Essa operação irá ser definida por forma a ser consistente com a operação de produto de uma matriz por um vector, isto é, se, no produto AB, B for uma matriz com apenas uma coluna, o resultado do produto deve ser aquele que se obtinha pela operação matriz-vector. Mais ainda, se B for uma matriz com 3 colunas e A uma matriz do tipo 3×3, o resultado AB deve ser uma matriz com colunas Ax_1, Ax_2, Ax_3, sendo x_1, x_2 e x_3 as colunas de B.

Por outro lado, se quisermos multiplicar duas matrizes quadradas, elas têm que ser do mesmo tipo. Se forem duas matrizes rectangulares, então elas não podem ser do mesmo tipo. Para se efectuar o produto AB, o número de colunas de A terá que ser igual ao número de linhas de B. Se A for $m \times n$ e B for $n \times p$ então AB é uma matriz $m \times p$ cujas colunas são obtidas pelo produto de A por cada uma das colunas de B.

Definição 5.3 (Multiplicação de matrizes) *A entrada (i, j) de AB é dada pelo produto interno da linha i de A pela coluna j de B. Por outras palavras, se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto $C = AB \in \mathcal{M}_{m \times p}$ cuja entrada (i, k) é*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk},$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ e $k = 1, 2, \dots, p$. Então

$$C = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right)_{m \times p}$$

ou, na notação de Einstein dos índices repetidos, $C = (a_{ij}b_{jk})_{m \times p}$.

Notemos que, no produto de matrizes, se tem o seguinte: cada elemento de AB é o produto de uma linha por uma coluna

$$(AB)_{ij} = (\text{ linha } i \text{ de } A) \times (\text{ coluna } j \text{ de } B);$$

cada columa de AB é o produto de uma matriz por uma coluna

$$\text{coluna } j \text{ de } AB = A \times (\text{ coluna } j \text{ de } B);$$

cada linha de AB é o produto de uma linha por uma matriz

$$\text{linha } i \text{ de } AB = (\text{ linha } i \text{ de } A) \times B.$$

O seguinte teorema, cuja demonstração resulta imediatamente da definição anterior, estabelece algumas propriedades do produto matricial.

Teorema 5.2 (Propriedades do produto de matrizes) *Para* $A, \overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B, \overline{B} \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), tem-se que:*

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $AI_n = I_mA = A$;
3. $(A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B$ *e* $A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Exercício 5.4 *Mostre que as seguintes afirmações são falsas:*

1. *se* $AB = 0$ *então* $A = 0$ *ou* $B = 0$, *sendo* 0 *a matriz;*
2. *se* $AB = A\overline{B}$ *e* $A \neq 0$, *então* $B = \overline{B}$;
3. *se* $AB = \overline{A}B$ *e* $B \neq 0$, *então* $A = \overline{A}$;
4. $AB = BA$, *isto é, o produto de matrizes é comutativo.*

Resolução: Para provar que uma afirmação é falsa podemos considerar um exemplo.

1. Considere-se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Considere-se A e B como em 1 e
$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Semelhante a 2.

4. Considere-se
$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Neste caso tem-se que
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

   Se considerarmos
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   então $AB = BA$ e, neste caso, diz-se que as matrizes A e B comutam. $\square$

5.4 Inversas e transpostas

5.4.1 Matriz inversa

A inversa de uma matriz de ordem n é uma matriz de ordem n. Se a matriz original for A, a sua inversa será denotada por A^{-1}. A propriedade fundamental será: se multiplicarmos por A e, posteriormente, multiplicarmos por A^{-1} voltamos ao ponto de partida, isto é,

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = b \Rightarrow A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Assim

$$A^{-1}Ax = x.$$

A matriz $A^{-1}A$ é a matriz identidade.

Mas, nem todas as matrizes têm inversa. O problema surge quando $Ax = 0$ mas x não é o vector nulo. A inversa deveria obter o vector x a partir de Ax mas nenhuma matriz multiplicada pelo vector nulo produz um vector não nulo. Neste caso A^{-1} não existe.

O objectivo desta secção consiste em definir a inversa de uma matriz, calculá-la nos casos em que ela exista e, posteriormente, perceber em que casos é que não existe inversa.

Definição 5.4 (Matriz inversa) *A matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n$ diz-se* invertível *se existir uma matriz quadrada da mesma ordem $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $AB = I_n$ e $BA = I_n$. Para cada A, existe uma e uma só matriz nestas condições, chamada* inversa *de A e denotada por A^{-1}. Assim,*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Notemos que, para cada matriz A, não podem existir duas matrizes inversas pois, se $BA = I$ e $AC = I$ então $B = B(AC) = (BA)C = C$.

Exercício 5.5 *Mostre as seguintes afirmações.*

1. *A inversa de A^{-1} é A, isto é, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*
2. *A inversa de uma matriz de ordem 1 (um número), $A = [a_{11}]$, existe sempre que o elemento (número) a_{11} seja não nulo e é $A^{-1} = [1/a_{11}]$.*
3. *A inversa de uma matriz 2×2 pode ser escrita na forma*

   $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

   sempre que

   $$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

   A $\det(A)$ chama-se determinante *da matriz A.*
4. *Uma matriz diagonal D é invertível sempre que nenhum elemento da sua diagonal seja nulo e*

   $$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix}.$$
5. *A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não é invertível.*

Regra de Cramer. A regra de Cramer, assim chamada em homenagem a Gabriel Cramer (1704–1752), permite-nos obter a solução de um sistema de equações lineares recorrendo à noção de determinante, dada no exercício anterior para matrizes invertíveis de ordem 2. Consideremos o sistema linear $Ax = b$, com A uma matriz invertível de ordem n. Segundo a regra de Cramer, que apresentamos sem demonstração, a solução do sistema é dada por

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, ..., n,$$

com A_j a matriz que se obtém da matriz A substituindo a coluna j de A pela coluna dos termos independentes b. Para o caso em que

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

temos que

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

e

$$x_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Quando duas matrizes estiverem envolvidas, não podemos dizer muito da inversa no caso $A + B$; A e B podem ser invertíveis mas $A + B$ já não (lembrar o caso real). No caso do produto já é possível dizer algo. Notemos que se A e B forem matrizes invertíveis temos que

$$ABx = y \Rightarrow Bx = A^{-1}y \Rightarrow x = B^{-1}A^{-1}y$$

o que nos faz pensar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. De facto, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.3 *O produto de duas matrizes invertíveis AB é uma matriz invertível e a sua inversa é dada por $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração: Temos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I,$$

o que prova o pretendido. □

Uma regra similar poderia ser dada para o produto de três ou mais matrizes invertíveis

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Algoritmo de Gauss-Jordan. Consideremos a equação $AA^{-1} = I$. Se a considerarmos coluna a coluna obtemos as colunas de A^{-1}. De facto, representando as colunas de A^{-1} (a calcular) por x_1, x_2,... , x_n e as colunas de I por e_1, e_2,... , e_n temos que

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ax_1 & = & e_1 \\ & \vdots & \\ Ax_n & = & e_n \end{array}\right. .$$

Temos, assim, n sistemas com a mesma matriz e diferentes termos independentes. Estes sistemas podem ser resolvidos todos de uma vez pelo método de Gauss-Jordan.

Em vez da eliminação parar numa matriz triangular superior e passar à fase ascendente, continua-se a substituição adicionando múltiplos de uma linha às linhas que estão acima. Este procedimento produz zeros tanto acima como abaixo da diagonal principal. Quando obtivermos a matriz identidade obtemos também a matriz inversa.

Lembremos que, nas aulas práticas, se efectuou a condensação usando a matriz ampliada $\begin{bmatrix} A \mid b \end{bmatrix}$. Aqui vamos usar a matriz do tipo $n \times 2n$ e aplicar a fase descendente do método de eliminação de Gauss. A matriz inversa é calculada de acordo com o seguinte algoritmo, conhecido por algoritmo de Gauss-Jordan, cujo nome, para além de Gauss, também presta homenagem ao famoso geodesista alemão Wilhelm Jordan (1842–1899).

1. Obter a matriz $n \times 2n$ $\begin{bmatrix} A \mid I_n \end{bmatrix}$.
2. Efectuar a fase descendente do método de eliminação de Gauss.
3. Se o número de pivots for inferior a n então A não é invertível. STOP
4. Procede-se como no passo 2 mas usando os pivots na ordem inversa e anulando, com operações elementares, todos os elementos acima da diagonal principal da matriz à esquerda.
5. Divide-se cada linha pelo pivot e obtém-se $\begin{bmatrix} I_n \mid A^{-1} \end{bmatrix}$.

A justificação teórica para este algoritmo é dada pelo seguinte teorema, que iremos apresentar sem demonstração.

Teorema 5.4 *Uma matriz quadrada é invertível se e só se for não singular, isto é, se e só se o número de pivots usados após a fase descendente do método de eliminação de Gauss for igual à ordem da matriz.*

5.4.2 Matriz transposta

Vamos necessitar de mais uma matriz que, felizmente, é muito mais simples de calcular que a inversa. Essa matriz é a matriz transposta (de A) e será denotada por A^T.

As colunas da matriz transposta são as linhas da matriz original. Pode assim ser obtida sem cálculos adicionais. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

No caso geral, se A for uma matriz $m \times n$, então A^T é uma matriz $n \times m$ tal que $(A^T)_{ij} = A_{ji}$, isto é, a entrada (i, j) de A^T é a entrada (j, i) de A.

As regras para calcular as transpostas são muito simples. Podemos transpor $A + B$ e obter $(A + B)^T$ ou transpor A e B separadamente e calcular, em seguida, $A^T + B^T$ pois obtemos o mesmo resultado. As questões mais sérias surgem quando queremos transpor AB ou A^{-1}.

Exercício 5.6 *Prove que:*

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$;
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$, *com* $k \in \mathbb{N}$;
6. *se* A *for invertível,* A^T *também o é e* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$.

Antes de passar à frente, vamos tomar atenção ao produto interno (produto de uma matriz linha por uma coluna). A próxima afirmação parece simples (e é) mas contém a justificação mais profunda para a introdução das transpostas: para quaisquer vectores (coluna) x e y,

$$(Ax)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y). \tag{5.5}$$

Estas igualdade, onde os parêntesis são supérfluos, tem aplicações diversas.

Circuitos eléctricos. O vector x é o vector dos potenciais e y o vector das correntes. As diferenças de potencial são dadas pelo vector Ax e a corrente nos nodos por $A^T y$.

Economia. O vector x dá-nos o montante de n *outputs*. Os m *inputs* necessários para produzir o produto são dados por Ax. O custo por *input* é dado por y. Os valores por *output* são as componentes de $A^T y$.

Engenharia. O vector x pode dar-nos o deslocamento de uma estrutura sob o efeito de uma força. Então Ax é o vector do esforço. Se y for o vector das tensões internas, $A^T y$ é a força externa.

Para algumas matrizes a transposição não produz qualquer efeito. Essas matrizes dizem-se simétricas.

Definição 5.5 (Matrizes simétricas e ortogonais) *Uma matriz quadrada A diz-se* simétrica *se $A = A^T$ e* ortogonal *se $A^{-1} = A^T$.*

Uma matriz simétrica pode não ser invertível. No entanto, caso seja invertível, a sua inversa também é simétrica pois

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}.$$

Vamos agora ver como é que as matrizes simétricas podem aparecer, mesmo quando se estão a considerar matrizes não simétricas ou rectangulares. Consideremos a matriz A, que pode ser rectangular. O produto A^TA é uma matriz simétrica pois

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA.$$

A matriz AA^T também é simétrica mas pode ser diferente de A^TA. Muitos problemas da ciência e da engenharia que começam com uma matriz rectangular A terminam numa matriz simétrica A^TA ou AA^T.

5.5 Sistemas indeterminados e sistemas impossíveis

5.5.1 Solução de sistemas rectangulares

O processo de eliminação foi efectuado com facilidade para matrizes quadradas. Para matrizes rectangulares, a primeira fase do processo (a fase descendente) pode ser feita do mesmo modo mas a segunda (a fase ascendente) necessita de algumas alterações.

Relembremos que, quando consideramos a equação escalar

$$ax = b$$

(sistema 1×1), podemos ter três alternativas: (i) se $a \neq 0$, então, para qualquer b, a equação tem sempre uma solução $x = b/a$ e ela é única (caso não singular); (ii) se $a = 0$ e $b = 0$, existe uma infinidade de soluções (caso indeterminado); (iii) se $a = 0$ e $b \neq 0$, não existe nenhum x que verifica $0x = b$ e, como tal, a equação é impossível (ou inconsistente).

Para sistemas lineares onde a matriz dos coeficientes é quadrada (mesmo número de equações e de incógnitas) todas estas alternativas podem surgir. Substituímos "$a \neq 0$" por "A é invertível" e, uma vez que A^{-1} faz sentido, as conclusões são semelhantes.

Para sistemas lineares onde a matriz dos coeficientes é rectangular, a possibilidade (i) desaparece, isto é, não poderemos ter sistemas $Ax = b$ que possuam solução única x, qualquer que seja o vector b escolhido. Podemos ter: infinitas soluções para todo o b; infinitas soluções para alguns vectores b e nenhuma para outros; solução única para alguns vectores b e nenhuma para outros.

Comecemos por considerar um sistema linear com mais incógnitas que equações. Por exemplo,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Ignoremos, para já, o vector b dos termos independentes. Eliminando, na matriz A, os elementos a_{21} e a_{31} com o pivot a_{11} obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

O candidato a segundo pivot é agora zero e, assim sendo, vamos procurar, nas linhas abaixo e na mesma coluna, se existe um elemento não nulo que nos permita trocar de linhas. Neste caso, as entradas abaixo são todas nulas. Se a matriz A fosse quadrada tínhamos aqui um sinal em como ela era singular (e, como tal, não invertível). Com as matrizes rectangulares temos que esperar problemas em todas as ocasiões e, como tal, vamos prosseguir. Prossigamos, pois, para a próxima coluna onde a posição do pivot é não nula. Efectuando mais um passo no processo de eliminação de Gauss obtemos a "matriz condensada"

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que, na quarta posição do pivot voltamos a ter um elemento nulo.

A forma final da matriz U não é, como no caso quadrado, uma matriz triangular superior mas sim uma matriz em escada.

Definição 5.6 (Matriz em escada) *Uma matriz diz-se uma* matriz em escada *sempre que satisfaça: se o primeiro elemento não nulo numa linha estiver na coluna j então a linha seguinte começa com, pelo menos, j elementos nulos; se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.*

Depois deste considerando, vamos ver como determinar, caso existam, as soluções de $Ax = b$, sendo A uma matriz rectangular com mais colunas que linhas. Comecemos pelo caso homogéneo, isto é, quando $b = 0$. Então, como as operações elementares não afectam o segundo membro (que é nulo), o sistema $Ax = 0$ transforma-se em $Ux = 0$. No exemplo (5.6) temos

$$Ux = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 pertencem a dois grupos. Um grupo é o das chamadas variáveis básicas e que são aquelas que correspondem às colunas com pivot (no nosso caso são x_1 e x_3). O outro grupo é constituído pelas variáveis livres que correspondem às colunas sem pivot (no nosso caso são x_2 e x_4).

Para encontrar a solução mais geral para $Ux = 0$ ou, equivalentemente, para $Ax = 0$, vamos atribuir valores arbitrários às variáveis livres, digamos x_2 e x_4. As variáveis básicas são assim completamente determinadas e podem ser obtidas após a fase ascendente do método de eliminação de Gauss. No nosso exemplo

$$\begin{cases} 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1/3x_4 \\ x_1 = -3x_2 - x_4 \end{cases}.$$

Existe, neste caso, uma "dupla infinidade" de soluções para o sistema com dois parâmetros livres independentes x_2 e x_4. A solução geral é, assim, dada pela combinação linear de dois vectores

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -1/3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_2=1 \text{ e } x_4=0} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_2=0 \text{ e } x_4=1}, \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Todas as soluções do sistema são combinações lineares destas duas soluções particulares.

Resumindo, as soluções de $Ax = 0$ podem ser determinadas de acordo com o seguinte algoritmo.

1. Por eliminação chega-se a $Ux = 0$ e identificam-se as variáveis básicas e livres.

2. Atribui-se a uma variável livre o valor 1 e às restantes 0 e resolve-se $Ux = 0$ para as básicas.

3. Cada variável livre produz a sua própria solução pelo passo 2 e a combinação linear dessas soluções forma o espaço nulo, ou núcleo, de A, isto é, o espaço de todas as soluções de $Ax = 0$.

Geometricamente a questão, para o nosso exemplo, é a seguinte: dentro do espaço tetradimensional de todos os possíveis valores de x, as soluções de $Ax = 0$ formam um espaço bidimensional (o espaço nulo de A). Neste exemplo, esse espaço é gerado pelos vectores $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$. A combinação linear destes dois vectores forma, obviamente, um conjunto fechado para a adição e multiplicação escalar.

Esta é a altura para apresentar um teorema muito importante. Suponhamos que temos um sistema cuja matriz dos coeficientes $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tem mais colunas (variáveis do sistema) que linhas (equações do sistema), isto é, $n > m$. Assim, visto que só pode haver, no máximo, m pivots (não há mais linhas), têm que existir, pelo menos, $n - m$ variáveis livres. Poderão existir mais variáveis livres se algumas linhas da matriz condensada U foram reduzidas a zero. No entanto, em qualquer circunstância, pelo menos uma variável deve ser livre. Essa variável pode tomar um valor arbitrário o que conduz ao seguinte resultado.

Teorema 5.5 *Se um sistema homogéneo $Ax = 0$ tiver mais incógnitas que equações então possui, pelo menos, uma solução não trivial, isto é, existe outra solução do sistema para além da trivial $x = 0$.*

O que, de facto, acontece é que existe uma infinidade de soluções visto que todos os múltiplos αx, $\alpha \in \mathbb{R}$, também verificam a equação $A(\alpha x) = 0$. Assim, o espaço nulo contém a recta de soluções definida por x. Se existir mais do que uma variável livre, o espaço nulo é "mais" do que uma linha no espaço n-dimensional. A dimensão do espaço nulo é igual ao número de variáveis livres.

Consideremos agora o caso não homogéneo ($b \neq 0$). Este caso é substancialmente diferente e, para o estudar, voltemos ao exemplo original (5.6). Efectuando a fase descendente do método de eliminação de Gauss obtemos

$$Ax = b \Leftrightarrow Ux = c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}.$$

Não é claro que este sistema de equações tenha solução. Notemos que, atendendo à terceira equação, o sistema é impossível a menos que $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$. Assim, os vectores b que fazem com que $Ax = b$ tenha solução não constituem todo o espaço tridimensional, apesar de haver mais incógnitas que equações.

Considerando $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, temos que $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 5 - 10 + 5 = 0$ e o sistema fica

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Passando à fase ascendente concluímos que

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 1/3x_4 \\ x_1 = -2 - 3x_2 - x_4 \end{cases}.$$

Temos, outra vez, uma dupla infinidade de soluções

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{solução particular de } Ax=b} \underbrace{+ x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{solução geral de } Ax=0}, \qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Assim, para determinar todas as soluções de $Ax = b$ basta determinar as soluções (todas) de $Ax = 0$ e uma de $Ax = b$. Esquematicamente temos

$$x_{\text{geral}} = x_{\text{particular}} + x_{\text{homogénea}}.$$

A parte homogénea vem do espaço nulo; a solução particular resulta de tomar todas as variáveis livres iguais a zero e de resolver o sistema para as variáveis básicas. Esta é a parte nova, pois a parte do espaço nulo já estava determinada. Notemos que

$$A(x_{\text{geral}}) = A(x_{\text{particular}}) + A(x_{\text{homogénea}}) = b + 0 = b.$$

Resumindo, as soluções de $Ax = b$ podem ser determinadas de acordo com o seguinte algoritmo.

1. Reduzir, por eliminação, $Ax = b$ a $Ux = c$ e identificar as variáveis básicas e livres.

2. Considerar todas as variáveis livres iguais a zero e determinar uma solução particular, se existir. Se não existir, o sistema é impossível e o algoritmo termina.

3. Considerar o segundo membro igual a zero e dar o valor 1 a cada uma das variáveis livres (à vez) e zero às restantes, e resolver $Ux = 0$ para as básicas, obtendo assim um "vector gerador" do núcleo de A.

4. Determinar a solução do sistema como sendo a soma da solução particular com a combinação linear dos vectores geradores obtidos no passo anterior.

Notemos que, no caso homogéneo, o passo 2 do algoritmo anterior é evitado pois a solução particular de $Ax = 0$ é o vector $x = 0$.

Para finalizar, notemos que o processo de eliminação revela o número de pivots e o número de variáveis livres. O número de pivots usados no processo de eliminação de uma matriz A é chamado, como vimos, a **característica** de A e será representado por $\text{car}(A)$.

Suponhamos que, por eliminação, passamos de $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, para $Ux = c$ e que temos r pivots, isto é, $\mathrm{car}(A) = r$. Assim, as últimas $m - r$ linhas de U são nulas. O sistema é possível se as $m - r$ componentes de c forem nulas. Se $m = \mathrm{car}(A)$ existe sempre solução. A solução geral é a soma da solução particular (com as variáveis livres nulas) e a solução homogénea geral (com $n - r$ variáveis livres como parâmetros independentes). Se $n = \mathrm{car}(A)$ não existem variáveis livres.

Tal como no caso das matrizes quadradas, temos vários casos possíveis no final da fase descendente do método da eliminação de Gauss.

Caso 1. $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}\left([A \mid b]\right) = n$ (número de incógitas).

Neste caso o sistema é possível e determinado e, como tal, não existem variáveis livres (apenas básicas).

Caso 2. $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}\left([A \mid b]\right) < n$ (número de incógitas).

Neste caso o sistema é possível e indeterminado.

Caso 3. $\mathrm{car}(A) < \mathrm{car}\left([A \mid b]\right)$.

Neste caso o sistema é impossível.

5.5.2 Método dos mínimos quadrados

Desde a sua primeira aplicação a um problema de astronomia por Gauss, o método dos mínimos quadrados tem vindo a ser aplicado num vasto conjunto de situações tanto no campo da ciência como no da engenharia.

Consideremos o sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $m > n$, onde, portanto, o número de equações excede o número de incógnitas. Os sistemas deste tipo são, em geral (mas nem sempre) impossíveis. No entanto, eles surgem em muitas aplicações práticas e, por isso, vão merecer a nossa atenção.

Regressão linear. Suponhamos duas grandezas físicas x e y relacionadas pela expressão $y = a + bx$, em que a e b são parâmetros a determinar. Suponhamos que foram efectuados seis pares de medições (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 6$. Ficamos assim com o sistema (geralmente impossível)

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \\ 1 & x_5 \\ 1 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}.$$

Determinação de cotas em topografia. Obtiveram-se as cotas x_i de um conjunto de pontos $i = 1, 2, 3, 4$ relativamente uns aos outros, tendo-se tomado a cota do ponto $i = 4$ como referência. As relações obtidas foras as seguintes:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1{,}0 \\ x_2 - x_3 = 2{,}0 \\ x_3 - x_4 = 1{,}5 \\ x_1 - x_4 = 3{,}0 \\ x_1 - x_3 = 2{,}8 \\ x_2 - x_4 = 3{,}0 \end{cases}.$$

Em notação matricial, e fazendo $x_4 = 0$, temos o sistema impossível

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 1{,}5 \\ 3{,}0 \\ 2{,}8 \\ 3{,}0 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Ajustar uma curva a um conjunto de pontos dados. São dadas as coordenadas (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$, de m pontos e pretende-se ajustar uma curva do tipo

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x),$$

em que $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ são funções conhecidas, sendo os c_j, com $j = 1, 2, \ldots, n$, parâmetros a determinar. Obtemos assim o sistema

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_m) & \phi_2(x_m) & \ldots & \phi_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Como, em geral, $m \gg n$, o sistema é, normalmente, impossível.

Como vimos temos muitas vezes que considerar sistemas $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $m > n$, impossíveis. Nesses casos o resíduo $Ax - b$ é diferente de zero, isto é,

$$r(x) = Ax - b \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Como não existe $x \in \mathbb{R}^n$ que torna $r(x) = 0$, vamos determinar o vector $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ que minimiza a norma do resíduo, isto é, que minimiza $\|r(x)\|$. O vector $\widehat{x}$ nestas condições é chamado a solução de $Ax = b$ (no sentido) dos mínimos quadrados, pois, normalmente, calcula-se o vector que minimiza $\|r(x)\|^2$.

O seguinte teorema estabelece a existência e unicidade de solução do problema dos mínimos quadrados.

Teorema 5.6 *Para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ existe uma única solução de $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados se e só se* $\mathrm{car}(A) = n$.

A determinação da solução dos mínimos quadrados, caso exista, é feita de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 5.7 *Para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ temos que $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ é a solução de $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados se e só se for a solução de $A^TA\widehat{x} = A^Tb$.*

Exercício 5.7 *Determine a solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ dado por (5.7).*

Resolução: Para este problema temos que

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ 1{,}5 \\ 3{,}0 \\ 2{,}8 \\ 3{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}8 \\ 4{,}0 \\ -3{,}3 \end{bmatrix}.$$

Assim, o vector $\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{bmatrix}$, solução dos mínimos quadrados do sistema, é dado por

$$A^T A \widehat{x} = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}8 \\ 4{,}0 \\ -3{,}3 \end{bmatrix}.$$

Para resolver este sistema, vamos usar o método de eliminação de Gauss. Temos sucessivamente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -1 & -1 & 6{,}8 \\ -1 & 3 & -1 & 4{,}0 \\ -1 & -1 & 3 & -3{,}3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = 3L_3 + L_1]{L_2 = 3L_2 + L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 6{,}8 \\ 0 & \boxed{8} & -4 & 18{,}8 \\ 0 & -4 & 8 & -3{,}1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 = L_3 + (1/2)L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 6{,}8 \\ 0 & 8 & -4 & 18{,}8 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 6{,}3 \end{array}\right].$$

Passando à fase ascendente conclui-se imediatamente que

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}575 \\ 2{,}875 \\ 1{,}05 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Consideremos os dados $\{(x_i, y_i), i = 0, \ldots, m\}$, que pretendemos ajustar a um modelo definido à custa de um número de parâmetros muito inferior ao número de dados. Uma situação muito usual consiste em considerar o modelo como sendo um polinómio

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

com $a_0, \ldots, a_n$ os parâmetros a determinar. Temos então que resolver o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & y_1 \\ & \vdots & \\ a_0 + a_1 x_m + a_2 x_m^2 + \cdots + a_n x_m^n & = & y_m \end{array} \right. .$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Com $n \ll m$, este sistema é, em geral, impossível. Como tal, $Ax - b \neq 0$. O problema dos mínimos quadrados, como vimos, consiste na determinação dos valores de $\widehat{x} = [\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_n]^T$ que minimizam a norma do quadrado dos resíduos, isto é, $\|Ax - b\|^2$. De acordo com o Teorema 5.7, o vector $\widehat{x}$ que torna mínima esta norma é a solução de $A^T A \widehat{x} = A^T b$, que, para este exemplo, pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^m x_i & \cdots & \sum_{i=0}^m x_i^n \\ \sum_{i=0}^m x_i & \sum_{i=0}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^m x_i^n & \sum_{i=0}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{a}_0 \\ \widehat{a}_1 \\ \vdots \\ \widehat{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i^n \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Estas equações são chamadas **equações normais**. Resolvendo as equações normais, obtemos os valores de $\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_n$ e, como tal, o polinómio dos mínimos quadrados.

Notemos que, no sistema de equações normais, a matriz é simétrica. Além disso, também se pode mostrar que, caso os pontos x_i, $i = 0, \ldots, m$, sejam distintos, é não singular. Assim sendo, o problema da determinação do polinómio dos mínimos quadrados tem solução única.

O problema da determinação do polinómio dos mínimos quadrados poderia ser colocado da seguinte forma alternativa: determinar os parâmetros $\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_n$ por forma a que

$$\phi(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n) = \min_{a_i, i=0,\ldots,n} \Phi(a_0, a_1 \ldots, a_n),$$

com

$$\Phi(a_0, a_1 \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^m (y_i - a_0 - a_1 x_i \cdots - a_n x_i^n)^2.$$

Consideremos as observações $\{(x_i, y_i), i = 0, \ldots, m\}$ que correspondem a pontos do plano que pretendemos ajustar a uma recta da forma $p_1(x) = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x$. A questão que se coloca é a de determinar os valores $\widehat{a}_0$ e $\widehat{a}_1$ por forma a

$$\Phi(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1) = \min_{a_0, a_1} \sum_{i=0}^m (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2.$$

O ponto $(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1)$ onde esta função atinge o mínimo satisfaz as condições

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0}(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_1}(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{m}(y_i - \widehat{a}_0 - \widehat{a}_1 x_i) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}(y_i - \widehat{a}_0 - \widehat{a}_1 x_i)x_i = 0 \end{cases}$$

Temos então um sistema linear para resolver da forma

$$\begin{bmatrix} m+1 & \displaystyle\sum_{i=0}^{m} x_i \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m} x_i & \displaystyle\sum_{i=0}^{m} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{a}_0 \\ \widehat{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{m} y_i \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m} y_i x_i \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos os valores de $\widehat{a}_0$ e $\widehat{a}_1$ e, logo, a recta dos mínimos quadrados (ou recta de regressão).

No caso da determinação do polinómio dos mínimos quadrados de grau n, o ponto $(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n)$ que minimiza a função Φ, é tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0}(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_n}(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{m}(y_i - \widehat{a}_0 - \widehat{a}_1 x_i, \cdots - \widehat{a}_n x_i^n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m}(y_i - \widehat{a}_0 - \widehat{a}_1 x_i, \cdots - \widehat{a}_n x_i^n)x_i^n & = & 0 \end{cases}$$

Temos então um sistema linear para resolver da forma (5.8).

Exercício 5.8 *Mostre que o sistema de equações normais (5.9) pode ser escrito na forma* $A^T A\widehat{x} = A^T b$, *com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}, \ \widehat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_0 \\ \widehat{a}_1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Na prática, com o intuito de simplificar a notação, é usual omitir a notação $\widehat{x}$ para representar a solução do sistema $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados. Assim, dado um sistema de equações lineares $Ax = b$, iremos considerar a solução dos mínimos quadrados (caso exista) como sendo o vector x que é solução do sistema de equações normais $A^T Ax = A^T b$.

Exercício 5.9 *Foi efectuado um teste mecânico para estabelecer a relação entre tensões e deformações relativas numa amostra de tecido biológico, tendo-se obtido a seguinte tabela:*

tensão σ (N/cm^2)	*0,06*	*0,14*	*0,25*	*0,31*	*0,47*	*0,60*
deformação ϵ (cm)	*0,08*	*0,14*	*0,20*	*0,23*	*0,25*	*0,28*

Usando a recta dos mínimos quadrados, obtenha uma estimativa para a deformação correspondente a uma tensão de $\sigma = 0{,}08$ N/cm^2.

Resolução: Na prática, com o intuito de simplificar a notação, é usual omitir a notação $\widehat{x}$ para representar a solução do sistema $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados. Assim, por x, omitindo a , . Assim, o sistema de equações normais que perminte obter a recta de regressão $\epsilon = a_0 + a_1\sigma$ pode ser escrito na forma $A^T Ax = A^T b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}06 \\ 1 & 0{,}14 \\ 1 & 0{,}25 \\ 1 & 0{,}31 \\ 1 & 0{,}47 \\ 1 & 0{,}60 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0{,}08 \\ 0{,}14 \\ 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}25 \\ 0{,}28 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema de equações normais é

$$A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 1{,}83 \\ 1{,}83 & 0{,}7627 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}18 \\ 0{,}4312 \end{bmatrix},$$

cuja solução é dada por

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}09035 \\ 0{,}34857 \end{bmatrix}.$$

Concluímos então que a recta de regressão é dada por

$$\epsilon = 0{,}09035 + 0{,}34857\sigma,$$

cujo gráfico pode ser visto na Figura 5.2.

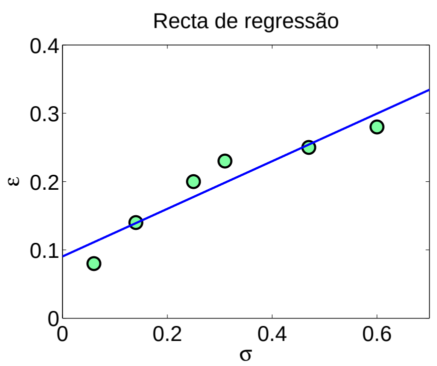

Figura 5.2: Recta dos mínimos quadrados para o Exercício 5.9.

Uma estimatica para a deformação correspondente a uma tensão de $\sigma = 0{,}08$ N/cm^2 pode ser agora dada por

$$\epsilon = 0{,}09035 + 0{,}34857{,}08 = 0{,}1182356 \text{ cm} \approx 0{,}12 \text{ cm}. \quad \square$$

5.6 Exercícios práticos

Seguem-se alguns exercícios destinados a serem resolvidos nas aulas práticas.

Exercício 5.10 *Resolva os seguintes sistemas, quando possíveis, usando o método de eliminação de Gauss, registando os pivots utilizados:*

1. $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-y+z &=& -1 \\ 9x-2y+z &=& -9 \\ 3x+y-2z &=& -9 \end{array}\right.$; *2.* $\left\{\begin{array}{rcr} 2x-3y+z &=& 1 \\ -4x-6y+z &=& -2 \\ 12x-18y+z &=& -6 \end{array}\right.$;

3. $\left\{\begin{array}{rcr} -x-y+2z &=& -5 \\ -3x-y+7z &=& -22 \\ x-3y-z &=& 10 \end{array}\right.$; *4.* $\left\{\begin{array}{rcr} x+y &=& 1 \\ x+y+z &=& 4 \\ x+z+t &=& -4 \\ z+t+u &=& 2 \\ t+u &=& -1 \end{array}\right.$;

5. $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t &=& 1 \\ x+y+3z+2t &=& 3 \\ 3x+5y+7z+3t &=& 0 \\ 3x+5y+9z+4t &=& 2 \end{array}\right.$; *6.* $\left\{\begin{array}{rcr} 5x-z &=& 0 \\ 4x+2y+z &=& 1 \\ 3x-y+3z &=& -1 \end{array}\right.$.

Exercício 5.11 *Determine $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta x-y+\beta z &=& 0 \\ -2\beta y-2z &=& 0 \\ x-y+\beta z &=& 0 \end{array}\right.$$

admita somente a solução trivial.

Exercício 5.12 *Encontre os valores do parâmetro k para os quais o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z &=& 1 \\ 2x+ky+6z &=& 6 \\ -x+3y+(k-3)z &=& 0 \end{array}\right.$$

tem:

1. uma solução; 2. nenhuma solução; 3. uma infinidade de soluções.

Exercício 5.13 *Em função do valor do parâmetro real p, discuta a natureza do sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcc} x+y+z &=& p+1 \\ x+py+z &=& 1 \\ px+y &=& p+2p^2 \end{array}\right. .$$

Exercício 5.14 *Determine o parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\alpha z &=& 2 \\ 2x+y+z &=& \alpha \\ x+2y-z &=& 1 \end{array}\right.$$

seja impossível.

Exercício 5.15 *Podemos misturar, sob certas condições, tolueno C_7H_8 e ácido nítrico HNO_3 para produzir trinitrotolueno $C_7H_5O_6N_3$ (vulgarmente conhecido por TNT) juntamente com um derivado, a água. Em que proporção devem os componentes ser misturados? (Nota: O número de átomos presentes mantém-se constante ao longo da reacção.)*

Exercício 5.16 *As soluções (x, y, z) da equação $ax + by + cz = d$ formam um plano em $\mathbb{R}^3$, quando a, b, c e d não são simultaneamente nulos. Dê exemplo de um sistema de 3 equações cujo conjunto solução seja:*

1. uma recta; 2. vazio; 3. um ponto.

Exercício 5.17 *Consideremos um corpo a deslocar-se horizontalmente de acordo com a equação $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, em que s é o deslocamento relativamente a um certo ponto fixo (medido em metros), s_0 o deslocamento inicial, v_0 a velocidade inicial, a a aceleração e t o tempo (medido em segundos). Determine os valores de s_0, v_0 e a, supondo que nos instantes $t = 1, 2, 3$ segundos, o corpo se encontrava, respectivamente, em $s = 2, 5, 9$ metros.*

Exercício 5.18 *Considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Determine:*

1. $A + B$; *2.* $2A$; *3.* $A - B$; *4.* $-3B$.

Exercício 5.19 *Calcule os produtos AB e BA nos seguintes casos:*

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

Exercício 5.20 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$. Que lhe sugere o resultado obtido?

Exercício 5.21 *Suponhamos que A é uma matriz* 3 *por* 5*, B é* 5 *por* 3*, C é* 5 *por* 1 *e D é* 3 *por* 1*. Diga em que casos as operações estão definidas e de que tipo é a matriz resultante.*

1. BA; *2.* $A(B + C)$; *3.* ABD.

Exercício 5.22 *Que linhas e colunas das matrizes A e B deve multiplicar para obter:*

1. *a terceira coluna de AB;*
2. *a primeira linha de AB;*
3. *o elemento de AB situado na linha 3 e coluna 4.*

Exercício 5.23 *Seja* $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

1. *Mostre que $B^2 - 4B - 12I_2 = 0_2$.*
2. *Determine $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ tal que $BX = 6X$.*

Exercício 5.24 *Encontre uma matriz A, não nula, e duas matrizes B e C para as quais $AB = AC$ mas $B \neq C$.*

Exercício 5.25 *Um vector com entradas não negativas e não superiores a 1 é chamado um vector probabilidade. Uma* matriz estocástica *é uma matriz cujas colunas são vectores probabilidade. Uma* cadeia de Markov*, chamada assim em homenagem ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov (1856–1922), é uma sequência de vectores probabilidade $x_0, x_1, \ldots$, juntamente com uma matriz estocástica P, tais que $x_{k+1} = Px_k$, $k = 0, 1, \ldots$. De acordo com isto, considere a seguinte situação: num determinado dia, um estudante ou está saudável ou está doente. Dos estudantes que estão bem hoje, 95% continuarão bem amanhã. Dos estudantes que estão doentes hoje, 55% continuarão doentes amanhã.*

1. *Construa a matriz estocástica para este problema.*
2. *Suponha que 20% dos estudantes estão doentes na segunda-feira. Qual a percentagem de estudantes que provavelmente estarão doentes na terça-feira?*
3. *Se um estudante está bem hoje, qual a probabilidade de assim continuar passados 2 dias?*

Exercício 5.26 *Durante uma epidemia, a probabilidade de transição para o estado saudável ou doente no dia seguinte é dada pela matriz*

$$T = \begin{bmatrix} 5/8 & 1/8 \\ 3/8 & 7/8 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o que foi dito no problema anterior, podemos interpretar a matriz T do seguinte modo: os elementos da primeira coluna são, respectivamente, as probabilidades de no dia seguinte uma pessoa saudável permanecer saudável ou de adoecer; os elementos da segunda coluna representam as probabilidades de uma pessoa doente se curar ou permanecer doente, respectivamente.

Num certo dia, a população de uma aldeia é constituída por 1536 pessoas saudáveis e 512 doentes. Quantas pessoas doentes haverá três dias depois? O que acontecerá se inicialmente a relação entre saudáveis e doentes for de 1 para 3?

Exercício 5.27 *Suponha que os elementos de uma população estão divididos em n faixas etárias. Em cada instante t, $p_i(t)$ representa o número de elementos da população na faixa i, $i = 1, ..., n$. Sejam r_i, m_i e b_i, respectivamente, a fracção de elementos da população que permanece na faixa i no intervalo $[t, t+1]$, a fracção de elementos da população que passa para a faixa $i+1$ no intervalo $[t, t+1]$ e b_i o número esperado de novos elementos (nascimentos) originados por cada membro da faixa i no intervalo $[t, t+1]$, $i = 1, \dots, n$. Tem-se*

$$p_1(t+1) = r_1 p_1(t) + b_1 p_1(t) + b_2 p_2(t) + \cdots + b_n p_n(t)$$

e

$$p_i(t+1) = m_{i-1} p_{i-1}(t) + r_i p_i(t), \qquad i = 2, \dots, n.$$

Estas n igualdades podem ser representadas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} p_1(t+1) \\ p_2(t+1) \\ p_3(t+1) \\ \vdots \\ p_{n-1}(t+1) \\ p_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + r_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ m_1 & r_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & r_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n-1} & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}.$$

A matriz quadrada de ordem n presente nesta igualdade designa-se matriz de transição.

A seguinte matriz de transição de estados

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

caracteriza a variação anual das 3 fases (larva, crisálida e adulto) no ciclo de vida de um insecto. Mostre que após 3 anos, a população total duplica e que a proporção entre as várias fases do ciclo é igual à do estado inicial.

Exercício 5.28 *Uma empresa fabrica três produtos. As despesas de produção estão divididas em três categorias. Em cada uma delas, faz-se uma estimativa do custo de produção de um único exemplar de cada produto. Faz-se, também, uma estimativa da quantidade de cada produto a ser fabricado por trimestre. Essas estimativas são dadas nas tabelas que se seguem:*

Custo de produção por unidade (em euros)			
Gastos	*Produto A*	*Produto B*	*Produto C*
Matéria-prima	0,10	0,30	0,15
Pessoal	0,30	0,40	0,25
Despesas gerais	0,10	0,20	0,15

;

Números de unidades produzidas por trimestre				
Produto	*Primavera*	*Verão*	*Outono*	*Inverno*
A	4000	4000	4500	4500
B	2200	2000	2600	2400
C	6000	5800	6200	6000

.

A empresa gostaria de apresentar aos seus accionistas uma única tabela mostrando o custo total por trimestre de cada uma das três categorias: matéria-prima, pessoal e despesas gerais. Obtenha essa tabela.

Exercício 5.29 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1. *Indique* A^T, B^T *e* C^T.
2. *Calcule* $3A - 4B$, BC, $(AC)^T$ *e* C^TC.
3. *Pode calcular* AB*? Justifique.*

Exercício 5.30 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. *Determine a matriz* D *que verifica a equação matricial* $A^{-1}DB^{-1} = A^T$.
2. *Calcule a inversa de* C.

Exercício 5.31 *Se possível, inverta as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.32 *Considere os seguintes sistemas:*

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Resolva-os, usando o método de eliminação de Gauss.*
2. *Que pode concluir acerca da matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?

Exercício 5.33 *Na codificação de uma mensagem, um espaço em branco é representado por* 0, *um* A *por* 1, *um* B *por* 2, *um* C *por* 3 *e assim por diante. A mensagem foi transformada usando a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e enviada como $15, 4, -4, 3, -32, 33, -1, 12, -34, 34, 5, 10, 7, 11, -15, 21, 6, 3, 6, -6, 13, 3, -15, 18, -19, 19, 3, 15, -18, 19, -1, 1$. *Qual é a mensagem?*

Exercício 5.34 *Para cada um dos seguintes sistemas, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução do sistema homogéneo correspondente:*

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$; *2.* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$.

Exercício 5.35 *Determine um sistema com duas equações e três incógnitas cuja solução geral seja*

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 5.36 *Indique para que valores de b_1 e b_2 o sistema $Ax = b$ é possível, sendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.37 *Suponha que num sistema biológico existem n espécies de animais e m tipos de alimento. Nesse sistema, representaremos por x_j o número de animais da espécie j, $j = 1, \ldots, n$, por b_i a quantidade diária de comida disponível do tipo i, $i = 1, \ldots, m$, e por a_{ij} a quantidade de alimento do tipo i consumida diariamente (em média) por um animal da espécie j. O sistema linear*

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

representa a situação de equilíbrio, isto é, a situação em que existe uma quantidade diária de comida disponível exactamente igual ao consumo médio de cada espécie.

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $b = \begin{bmatrix} 3500 & 2700 & 900 \end{bmatrix}^T$.

1. *Se $x = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 350 & 400 \end{bmatrix}^T$, haverá comida suficiente para satisfazer o consumo médio diário das espécies de animais?*

2. *Tendo em conta o valor de x dado no ponto anterior, qual o número máximo de animais de cada espécie que pode ser individualmente acrescentado ao sistema de modo a que as reservas de comida ainda sejam suficientes para o consumo?*

3. *Se a espécie 1 se extinguisse, qual o acréscimo individual das restantes espécies suportado pelo sistema? Admita que se mantêm os valores de x_2, x_3 e x_4 dados no ponto 1.*

4. *Se a espécie 2 se extinguisse, qual o acréscimo individual das restantes espécies suportado pelo sistema? Admita que se mantêm os valores de x_1, x_3 e x_4 dados no ponto 1.*

Exercício 5.38 *Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema (com m equações e uma incógnita)* $x = \beta_1,\ x = \beta_2, \ldots,\ x = \beta_m$.

Exercício 5.39 *O sistema*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$$

é impossível. Verifique que a solução no sentido dos mínimos quadrados é única.

Exercício 5.40 *Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente graficamente):*

1. $(0,0),\ (1,0),\ (3,12)$; *2.* $(-1,2),\ (1,-3),\ (2,-5),\ (0,0)$.

Exercício 5.41 *Calcule a parábola dos mínimos quadrados para a função f dada pela seguinte tabela:*

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x_i)$	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	2,1	1,7

.

Exercício 5.42 *A lei de Hooke estabelece que a força F aplicada a uma mola é directamente proporcional ao deslocamento provocado de acordo com a seguinte relação $F = k(e - e_0)$, onde k é a constante da mola, e o comprimento da mola quando sujeita à força F e e_0 o comprimento inicial da mola. No sentido de determinar a constante da mola usaram-se diferentes forças (conhecidas) tendo sido observados os comprimentos resultantes, dados na seguinte tabela:*

Força F (em gramas)	3	5	8	10
Comprimento e (em milímetros)	13,3	16,3	19,4	20,9

.

Sabendo que o comprimento inicial da mola é $e_0 = 10$ mm e considerando as medições (não correlacionadas) com precisão inversamente proporcional ao comprimento observado, determine a melhor estimativa para a constante da mola, usando o algoritmo dos mínimos quadrados.

Exercício 5.43 *A pressão arterial sistólica p (em milímetros de mercúrio) de uma criança saudável com peso w (em quilogramas) é dada, de forma aproximada, pela equação*

$$p = a + b \ln w.$$

Use os seguintes dados experimentais

w	20	28	37	51	59
p	91	99	104	108	111

para estimar a pressão arterial sistólica de uma criança de 45 quilogramas.

Bibliografia

[1] M. Teresa F. Oliveira-Martins, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, textos de apoio, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2003.

[2] J. J. Pedroso de Lima, F. J. A. Caramelo, J. M. C. Rosa, R. C. Reis, F. Alte da Veiga, *Biomatemática. Uma Introdução para o Curso de Medicina*, 2ª edição, Imprensa de Universidade de Coimbra, Coimbra, 2006.

[3] A. P. Santana, J. F. Quieró, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, Lisboa, 2010.

[4] J. Stewart, *Cálculo*, vol. I e II, 5ª edição, Thomson Learning, São Paulo, 2005.

[5] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 4th edition, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, 2009.

[6] E. W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. I e II, McGraw-Hill, São Paulo, 1983.