



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELAÇÃO

Licenciatura em Matemática

Adérito Araújo, Setembro de 2025

Conteúdo

Aula 1: Equações diferenciais ordinárias	1
Aula 2: Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem	5
Aula 3: Equações separáveis e alguns modelos simples	13
Aula 4: Equações lineares de primeira ordem	23
Aula 5: Equações diferenciais exactas	33
Aula 6: O teorema de Picard-Lindelöf	43
Aula 7: Equações diferenciais lineares de segunda ordem	49
Aula 8: Equações diferenciais de coeficientes constantes	63
Aula 9: Método da variação dos parâmetros	69
Aula 10: Método do polinómio anulador	79
Aula 11: Equação de Euler-Cauchy	87
Aula 12: Vibrações mecânicas e osciladores harmónicos	93
Aula 13: Transformadas de Laplace	103
Aula 14: Propriedades das transformadas de Laplace	115
Aula 15: Aplicações das transformadas de Laplace	125
Aula 16: Introdução aos sistemas de equações diferenciais	141
Aula 17: Análise qualitativa de sistemas de equações	151
Aula 18: Modelos de populações que interagem	161
Aula 19: Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem	167
Aula 20: Exponencial de uma matriz	173
Aula 21: Fórmula da variação dos parâmetros	189
Bibliografia	197

Estes apontamentos abordam os principais tópicos de Equações Diferenciais e Modelação e encontram-se organizados em quatro capítulos.

No Capítulo 1 estudam-se as equações diferenciais de primeira ordem, incluindo problemas de valor inicial, equações separáveis, equações lineares, equações exactas e o Teorema de Picard-Lindelöf.

O Capítulo 2 é dedicado às equações diferenciais lineares de segunda ordem, abordando sistemas fundamentais de soluções, Wronskianos, equações com coeficientes constantes, variação dos parâmetros, método do polinómio anulador, equações de Euler-Cauchy e aplicações a vibrações mecânicas.

No Capítulo 3 introduzem-se as transformadas de Laplace e as suas principais propriedades, com aplicações à resolução de equações diferenciais, incluindo funções de Heaviside, delta de Dirac e problemas de valor inicial.

Por fim, o Capítulo 4 aborda os sistemas de equações diferenciais, incluindo análise qualitativa, estabilidade de pontos de equilíbrio, modelos populacionais, sistemas lineares, exponencial de matrizes e a fórmula da variação dos parâmetros.

Em conjunto, estes temas proporcionam uma introdução aos principais métodos e aplicações das equações diferenciais ordinárias.

Aula 1: Equações diferenciais ordinárias

Uma **equação diferencial** é uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida. Neste curso vamos considerar apenas funções de **uma variável real**, com um número finito de derivadas¹.

Essas equações chamam-se **equações diferenciais ordinárias (EDO)** e podem escrever-se de forma geral como

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

onde $y = y(t)$ é a **função incógnita** (ou **variável dependente**), t é a **variável independente**, e F é uma função de várias variáveis definida de forma adequada. A plica ' representa a derivada em relação a t . O número inteiro positivo n , correspondente à derivada de maior ordem que aparece, chama-se **ordem da equação diferencial**.

No caso mais geral, a função desconhecida y pode ser vetorial ou matricial, mas neste início vamos supor que y é apenas uma função escalar. Assim, F pode ser considerada definida num subconjunto $D \subset I \times \mathbb{R}^{n+1}$, com $I \subset \mathbb{R}$. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = ty + \sin y \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} - 3 \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right)^2 = t^2 e^t$$

são EDO de ordens 1 e 3, respetivamente, correspondendo a

$$F(t, y, y') = y' - ty - \sin y \quad \text{e} \quad F(t, y, y', y'', y''') = y' - 3(y''')^2 - t^2 e^t.$$

Seja I um intervalo real e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas até à ordem n . Diz-se que φ é uma **solução explícita** em I da equação (1) se, ao substituir y e as suas derivadas por $\varphi(t)$ e as suas derivadas, a equação se transforma numa identidade em I , isto é,

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0.$$

Uma relação do tipo

$$\varphi(t, y) = 0$$

chama-se **solução implícita** em I da EDO (1) se define pelo menos uma função real $y = \varphi(t)$ que seja uma solução explícita em I . De modo geral, tanto soluções explícitas como implícitas dizem-se simplesmente **soluções**. Resolver (ou integrar) uma EDO significa, portanto, determinar as suas soluções.

Nota 1 Na prática, o problema que se coloca é o de saber se uma dada relação implícita define, de facto, alguma função solução de uma EDO. Uma condição suficiente para que uma relação implícita defina uma relação explícita é dada pelo denominado Teorema da Função Implícita, estudado em disciplinas de Análise Infinitesimal. $\square$

Nota 2 Nem sempre é possível determinar uma solução (explícita ou implícita) de uma EDO. Pode até acontecer que uma equação não tenha soluções, como, por exemplo,

$$|y'| + y^2 = 1.$$

No entanto, em muitos problemas isso não é essencial. O que interessa é saber justificar, por algum processo, que a solução (ou as soluções) existe(m) e compreender o seu

¹Se a equação depender de várias variáveis independentes, chama-se de **equação diferencial parcial** e será estudada noutras disciplinas.

*comportamento. Por exemplo, pode ser suficiente saber que, à medida que t cresce, a solução se mantém limitada, ou que pequenas alterações na equação não modificam de forma significativa o comportamento das soluções. Esta perspectiva conduz ao estudo da chamada **Teoria Qualitativa das EDO**. $\square$*

Na maioria das aplicações, não interessa conhecer *todas* as soluções de uma EDO, mas apenas aquelas que satisfazem certas condições específicas.

Dá-se o nome de **problema de valores iniciais** (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema em que se pretende determinar a solução de uma EDO sujeita a condições impostas num ponto do intervalo de definição. Essas condições chamam-se **condições iniciais**.

Por outro lado, chama-se **problema de valores na fronteira** a todo o problema que consiste em determinar a solução de uma EDO sujeita a condições impostas em dois ou mais pontos do intervalo.

Chama-se **solução geral** (ou **integral geral**, ou ainda **integral completo**) de uma EDO ao conjunto de todas as suas soluções. Em particular, se n é a ordem da EDO, uma família de funções (explícitas ou implícitas)

$$\Phi(t, y, c_1, \dots, c_n) = 0, \quad (2)$$

dependente de n parâmetros reais $c_1, \dots, c_n$, define a **solução geral** da EDO se: (i) cada elemento da família for solução da EDO nalgum intervalo; e (ii) qualquer solução da equação puder ser obtida a partir dessa família, fixando convenientemente os parâmetros $c_1, \dots, c_n$.

Nota 3 *É natural (embora não seja evidente) que, se existir uma expressão suficientemente geral para englobar todas as soluções de uma EDO de ordem n , nessa expressão apareçam n constantes arbitrárias. Isto deve-se ao facto de, no processo de resolução, procurarmos “inverter” a derivação n vezes, como se estivéssemos a realizar n integrações sucessivas. $\square$*

Para muitas equações diferenciais de ordem n , a solução geral reduz-se, de facto, a uma família dependente de n parâmetros, como em (2). Contudo, há casos em que isso não acontece.

Qualquer solução obtida a partir da família (2), escolhendo valores concretos para as constantes $c_1, \dots, c_n$, chama-se **solução particular** da EDO (relativamente àquela família).

Dada uma família de soluções com n parâmetros de uma EDO, chama-se **solução singular** qualquer solução da equação que não pertença a essa família.

Exemplo 1 *Para mostrar que equação $y(t) = t^2(e^t - e)$ é solução do problema de condição inicial*

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, & t \in (1, 2], \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

basta ver que, como $t \neq 0$,

$$y'(t) = 2t(e^t - e) + t^2 e^t = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$$

e que $y(1) = 1(e^1 - e) = 0$. $\square$

Exemplo 2 A equação $y = 1/(c+t)^2$ define uma família de soluções com um parâmetro da EDO $y' = -sy^{3/2}$, no sentido de que, para cada escolha de c , existe um intervalo I onde $y = 1/(c+t)^2$ define uma solução (em I) desta EDO. No entanto, a solução $y(t) \equiv 0$ não está incluída nessa família e, por isso, é uma solução singular da EDO em questão (relativamente à família definida por $y = 1/(c+t)^2$). $\square$

Por vezes, (1) pode ser resolvida explicitamente em termos da derivada $y^{(n)}$, obtendo-se

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (3)$$

onde f é uma função conhecida. Nesse caso, (3) diz-se **forma normal** da equação diferencial.

Nota 4 Note-se que (1) pode corresponder a mais do que uma equação na forma normal. Por exemplo, $(y')^2 - 4y = 0$ representa as duas equações diferenciais $y' = \pm 2\sqrt{y}$. $\square$

No caso mais simples, $n = 1$, a equação (3) reduz-se a $y' = f(t, y)$. As próximas aulas tem por objectivo o estudo deste tipo de equações (ou das que a estas se podem reduzir).

Exercícios

- Para cada uma das seguintes equações diferenciais, identifique a variável independente, a variável dependente e a ordem:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| (a) $\frac{dy}{dt} + y = 0$; | (h) $(y'')^2 + y''' = 4yx^3$; |
| (b) $y'' + \sin y = \cos t$; | (i) $\sin(sy) \frac{d^2y}{ds^2} - 3 \left(\frac{dy}{ds} \right)^3 = 0$; |
| (c) $y'' + \sin t = -y$; | (j) $\ddot{y}^2 + \dot{y}^4 = 4yz^3$; |
| (d) $(2xy - y^2) dx + e^x dy = 0$; | (k) $\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = t^2y$; |
| (e) $t' = \sqrt{t}$; | (l) $xy\ddot{y}^2 = 4ye^x$. |
| (f) $\dot{y} + y^2 = 0$; | |
| (g) $x' = \tan x$; | |

- Supondo que c_1 e c_2 são constantes reais, verifique se a função indicada é uma solução da equação diferencial dada, nalgum intervalo real:

- $\frac{dy}{dt} = 2t$, $y = t^2 + c_1$;
- $yy' = e^{2t}$, $y^2 = e^{2t} + c_1$;
- $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$, $y = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) + 4e^t$;
- $y' + 2ty = 1$, $y = e^{-t^2} \int_0^t e^{r^2} dr + c_1 e^{-t^2}$;
- $2ty dt + (t^2 + 2y) dy = 0$, $t^2y + y^2 = c_1$;
- $(y')^2 = 9ty$, $y = 0$ se $t < 0$ e $y = t^3$ se $t \geq 0$.

- Se k é uma constante real, mostre que as funções $y = ce^{kt}$ são as únicas soluções da equação diferencial $y' = ky$. (Sugestão: mostre que se $f(t)$ é uma solução desta equação diferencial, então $f(t)/e^{kt}$ é uma constante.)

4. Determine $m \in \mathbb{C}$ de modo que:
- (a) $y(t) = e^{mt}$ seja solução de $y'' + 10y' + 25y = 0$;
 - (b) $y(t) = t^m$ seja solução de $t^2y'' + 6ty' + 4y = 0$.
5. Para a equação diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$, mostre que:
- (a) $y(t) = e^{2t}$ e $y(t) = e^{3t}$ são ambas soluções;
 - (b) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ é solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2 .
6. Mostre que $y = Cx$ é uma solução da equação diferencial $xy' - y = 0$, qualquer que seja a constante real C , e determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(-3) = 2$.
7. Mostre que $y = x^2 + C$ é uma solução da equação diferencial $y' - 2x = 0$, qualquer que seja a constante real C , e represente no plano OXY algumas curvas solução correspondentes a valores distintos da constante C .
8. Mostre que $y = C/x$ é uma solução da equação diferencial $xy' + y = 0$, qualquer que seja a constante real C , e represente no plano OXY algumas curvas solução correspondentes a valores distintos da constante C .
9. Sabendo que $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ é uma família de soluções da equação diferencial $y'' - y = 0$, determine a solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
10. Determine os valores do parâmetro real γ , para os quais a equação diferencial $y'' + \gamma^2 y = 0$ tem soluções não triviais que satisfazem $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$. (Sugestão: suponha conhecido o facto de $y = c_1 \cos(\gamma t) + c_2 \sin(\gamma t)$ ser a família de soluções de $y'' + \gamma^2 y = 0$).
11. Considere a equação diferencial seguinte $dy = -\frac{t}{y} dt$.
- (a) Prove que, no intervalo $(-2, 2)$, $y = \sqrt{4 - t^2}$ e $y = -\sqrt{4 - t^2}$ são soluções da equação dada.
 - (b) Mostre que, no intervalo considerado na alínea anterior, $y = \sqrt{4 - t^2}$ se $-2 < t < 0$ e $y = -\sqrt{4 - t^2}$ se $0 \leq t < 2$, não é solução da equação dada.

Aula 2: Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Vamos começar por considerar uma **equação diferencial de primeira ordem** na sua forma normal:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I, \quad (1)$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada.

Ao resolver a equação (1), o processo de integração introduz, em geral, uma **constante de integração**. Isto significa que a equação diferencial, por si só, admite uma família de soluções.

Para seleccionar uma solução particular, impõe-se uma condição adicional: o valor da função $y(t)$ num instante específico $t_0 \in I$. Este tipo de problema é chamado **problema de condição inicial (PCI)**:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2)$$

e é também conhecido como **problema de Cauchy**, em homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Nota 1 *Em muitas aplicações práticas, a variável independente representa o **tempo**. Por essa razão, optamos por designá-la por t . Neste contexto, a equação diferencial (1) descreve um **sistema dinâmico**. Se, além disso, a função f não depender explicitamente de t , então dizemos que a equação diferencial é **autónoma**.*

Nas próximas aulas vamos estudar equações diferenciais que admitem solução explícita. Contudo, na maioria dos casos práticos, encontrar essa solução de forma exata é impossível. Uma estratégia alternativa para compreender o comportamento das soluções consiste em usar um método gráfico baseado no chamado **campo de direcções**.

A equação diferencial (1) fornece-nos o declive da tangente à solução que passa por cada ponto (x, y) do plano: esse declive é precisamente $f(x, y)$. O **campo de direcções** é então uma representação gráfica no plano (x, y) , onde em cada ponto (ou num conjunto representativo de pontos) se desenha um pequeno segmento de recta com inclinação dada por $f(x, y)$. As curvas solução da equação diferencial serão aquelas que permanecem tangentes a esses segmentos. Assim, mesmo sem resolver explicitamente a equação, podemos obter uma boa ideia da forma das soluções apenas pela análise do campo de direcções.

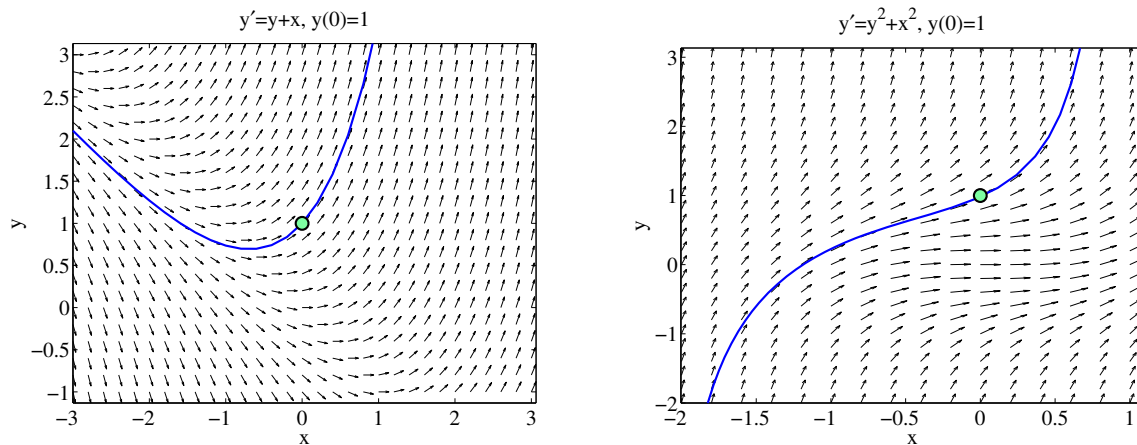
Vejamos dois exemplos. Na figura seguinte (à esquerda) encontra-se o campo de direcções da equação

$$y'(x) = x + y,$$

bem como a solução particular que passa pelo ponto $(0, 1)$. Observa-se que o campo de direcções antecipa corretamente a inclinação e a forma global das soluções. Na mesma figura (à direita) está representado o campo de direcções da equação

$$y'(x) = x^2 + y^2,$$

juntamente com a solução que passa pelo ponto $(0, 1)$. Mais uma vez, verifica-se que o campo de direcções fornece uma indicação clara sobre a geometria das soluções.



Em MATLAB é fácil construir um código que permita visualizar o campo de direcções. Por exemplo, se quisermos ver qual o campo de direcções para equação

$$\frac{dy}{dt} = t - 3x,$$

começamos por fazer

$$\frac{dy}{dt} = t - 3y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dt/dt = 1 \\ dx/dt = t - 3y \end{cases}$$

O campo de vectores no plano $\mathbb{R}^2$ é determinado pela função vectorial

$$\vec{F}(t, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ t - 3y \end{pmatrix}.$$

Em MATLAB, o código para visualizar esse campo vectorial da forma seguinte.

```
[t, y] = meshgrid(0:0.2:3, -1:0.2:2); % definir a malha
dy = t - 3*y;
dt = ones(size(dy)); % calcular o CD
L = sqrt(dt.^2 + dy.^2); % normalizar
quiver(t, y, dt./L, dy./L), axis tight % visualizar
```

Para construir o campo de direcções de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (1) pode ser útil recorrer às chamadas **curvas isóclinas** (isto é, curvas de “igual inclinação”). Dado um valor constante $C \in \mathbb{R}$, a **isóclina** correspondente é o conjunto de pontos $(t, y) \in D$ tais que

$$f(t, y) = C.$$

Ao longo de cada uma dessas curvas, todas as tangentes às soluções têm declive C . Desenhando várias isóclinas e acrescentando em cada ponto pequenos segmentos de recta com essa inclinação, obtém-se uma aproximação gráfica ao campo de direcções da equação diferencial.

Exemplo 1 Consideremos a equação diferencial

$$y'(x) = x + y.$$

Fixando $C \in \mathbb{R}$, a condição $x + y = C$ define a família de isóclinas correspondentes a rectas paralelas de declive -1 . Ao longo de cada uma dessas rectas, as tangentes às soluções da equação diferencial têm sempre declive C . Assim, representando várias destas rectas e marcando em cada uma pequenos segmentos com inclinação C , obtemos uma aproximação gráfica ao campo de direcções de $y'(x) = x + y$. $\square$

Em muitos problemas práticos interessa compreender o comportamento de um sistema dinâmico a longo prazo, isto é, quando $t \rightarrow +\infty$. Com alguma sorte, as soluções aproximam-se de um estado de equilíbrio. Os **estados estacionários** (ou **pontos de equilíbrio**) são soluções constantes, independentes do tempo. No caso da equação diferencial autónoma

$$y'(t) = f(y(t)),$$

um equilíbrio y^* verifica

$$f(y^*) = 0,$$

e corresponde a um estado em que o sistema pode permanecer indefinidamente.

Definição 1 (Equilíbrio) Seja a equação diferencial ordinária autónoma de primeira ordem

$$y'(t) = f(y(t)),$$

com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que $y^* \in \mathbb{R}$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **estado estacionário**) se

$$f(y^*) = 0.$$

Neste caso, a solução constante $y(t) \equiv y^*$ satisfaz a equação.

Definição 2 (Estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade) Um ponto de equilíbrio y^* diz-se:

- **estável** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|y(0) - y^*| < \delta \Rightarrow |y(t) - y^*| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$;
- **assintoticamente estável** se for estável e, além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^*$;
- **instável** se não for estável, isto é, se existir algum $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, se pode encontrar uma condição inicial $y(0)$ com $|y(0) - y^*| < \delta$ mas para a qual $|y(t) - y^*| \geq \varepsilon$ para algum $t \geq 0$.

Um mesmo sistema pode possuir vários equilíbrios, dependendo da forma de f . Seja y^* um equilíbrio do sistema

$$x'(t) = f(x).$$

Para estudar o comportamento de soluções próximas de y^* , fazemos um desenvolvimento de Taylor em torno de y^* :

$$y'(t) = f(y) = f(y^*) + f'(y^*)(y - y^*) + \mathcal{O}((y - y^*)^2).$$

Como $f(y^*) = 0$, obtemos

$$(y(t) - y^*)' = f'(y^*)(y - y^*) + \mathcal{O}((y - y^*)^2). \quad (3)$$

O termo de ordem dois, $R_2 = \mathcal{O}((y - y^*)^2)$, satisfaz $|R_2| \leq C(y - y^*)^2$ para uma certa constante $C > 0$. Se $y(t)$ estiver suficientemente próximo de y^* , este termo pode ser desprezado e a dinâmica linearizada é

$$(y(t) - y^*)' = f'(y^*)(y - y^*)$$

o que implica (prove!)

$$y(t) - y^* = (y(0) - y^*) e^{f'(y^*)t}.$$

Assim, a **estabilidade** de y^* depende do sinal de $f'(y^*)$: se $f'(y^*) < 0$, o equilíbrio é **assintoticamente estável**, com soluções próximas a y^* a convergirem para ele; se $f'(y^*) > 0$, o equilíbrio é **instável**, com soluções a afastarem-se de y^* .

Vejamos dois exemplos simples de aplicação.

Exemplo 2 (Modelo de Malthus (crescimento exponencial)) Considere a equação

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad P(t) > 0, \quad r \in \mathbb{R}.$$

O único ponto de equilíbrio é $P^* = 0$, pois é o valor de P para o qual a taxa de variação dP/dt se anula. Para estudar a estabilidade, observamos a derivada de $f(P) = rP$: $f'(P) = r$. Se $r > 0$, então $f'(0) = r > 0$, indicando que o equilíbrio $P^* = 0$ é instável, pois qualquer população inicial positiva cresce sem limite. Se $r < 0$, temos $f'(0) = r < 0$, e o equilíbrio $P^* = 0$ é estável e assintoticamente estável, com todas as soluções decrescendo gradualmente até zero à medida que $t \rightarrow +\infty$.

Biologicamente, este modelo, proposto por Thomas Robert Malthus (1766–1834) em 1798, assume condições ideais de crescimento, sem limitações de recursos. O parâmetro r representa a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, e não há nenhum limite superior natural para a população, o que justifica o crescimento exponencial quando $r > 0$. $\square$

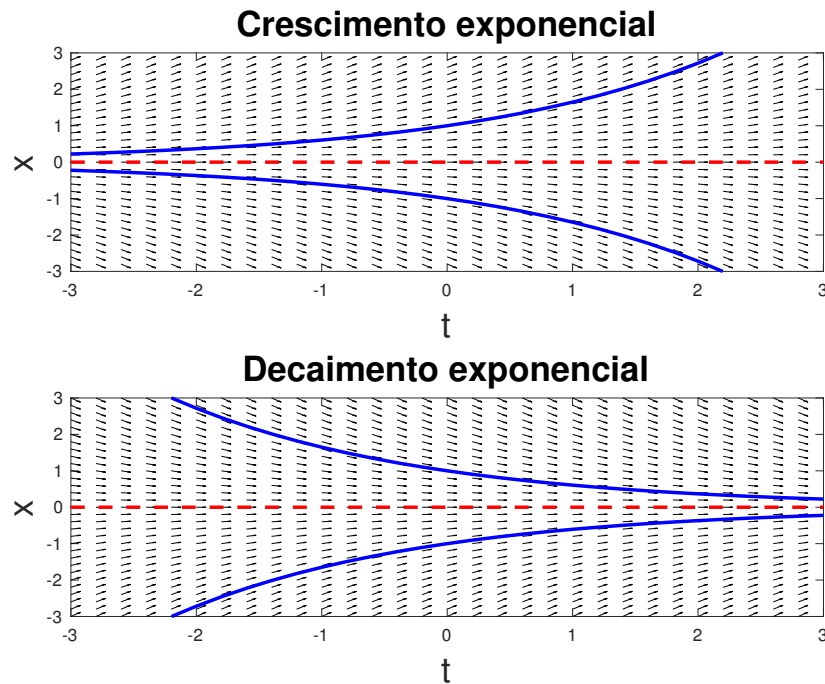
Exemplo 3 (Modelo de Verhulst (crescimento logístico)) Para incorporar a limitação de recursos do ambiente, consideremos a equação logística

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad r > 0, \quad K > 0,$$

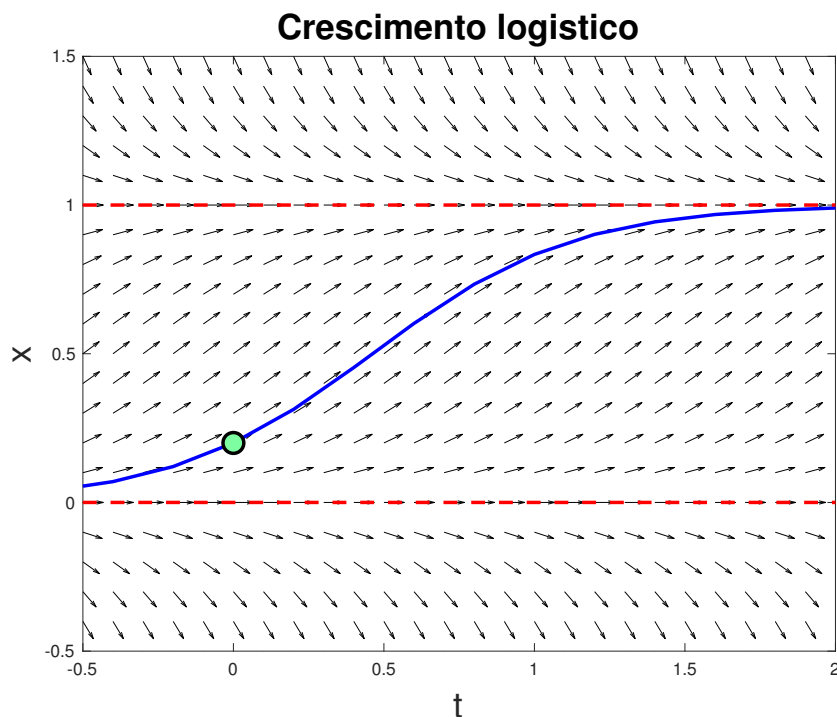
proposta por François Verhulst (1804–1849) em 1840. Aqui, K representa a **capacidade de suporte** do ambiente, ou seja, o valor máximo de população que o meio pode sustentar de forma estável.

Os pontos de equilíbrio são $P^* = 0$ e $P^* = K$. Calculando a derivada $f'(P) = r(1 - 2P/K)$, obtemos $f'(0) = r > 0$, mostrando que $P^* = 0$ é instável: pequenas populações tendem a crescer em direção a K . Para $P^* = K$, $f'(K) = -r < 0$, indicando que este equilíbrio é estável e assintoticamente estável, de modo que a população se aproxima de K ao longo do tempo, independentemente de ter começado abaixo ou acima deste valor.

Biologicamente, se $P \ll K$, então $\frac{P}{K} \approx 0$ e o crescimento da população é aproximadamente exponencial, ou seja, $\frac{dP}{dt} \approx rP$, reproduzindo o comportamento do modelo de



Malthus. Por outro lado, se $P > K$, então $1 - \frac{P}{K} < 0$ e, conseqüentemente, $\frac{dP}{dt} < 0$, o que significa que a população decresce até se aproximar do valor de equilíbrio K . Assim, $P^ = K$ funciona como um limite natural de crescimento, refletindo a capacidade de suporte do ambiente, enquanto $P^* = 0$ corresponde à extinção, instável porque qualquer população inicial positiva tende a aumentar em direção a K . $\square$*



Exercícios

1. Determine e esboce as isóclinas das seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = y^2$;

(b) $y' = t^2 + y^2$;

(c) $y' = t^2 + y$.

2. Esboce o campo de direcções de cada uma das seguintes equações diferenciais (para resolver as alíneas deste exercício sugere-se que recorra a www.wolframalpha.com):

(a) $y' = 2 - y$;

(e) $y' = \sin t$;

(b) $y' = 2 - \frac{1}{4}y^2$;

(f) $y' = y^2$;

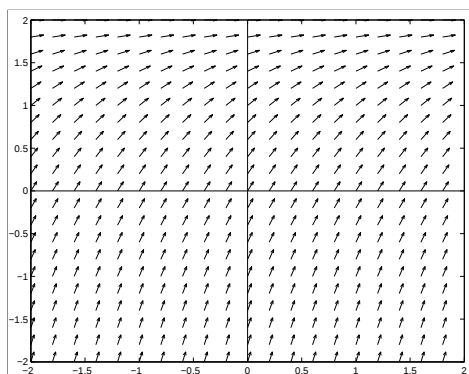
(c) $y' = \sin y$;

(g) $y' = \sec^2 t$;

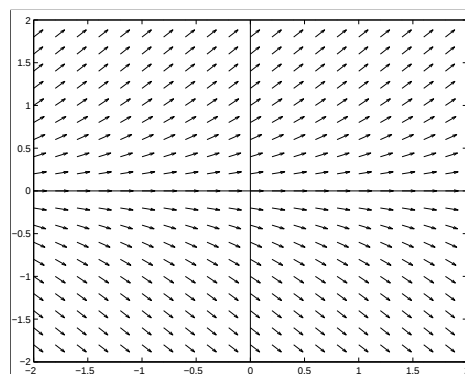
(d) $y' = t^2 + y^2$;

(h) $y' = t^2 + y$.

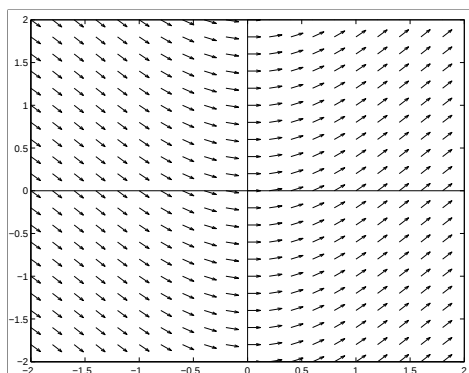
3. Para cada um dos campos de direcções indicados nas figuras seguintes esboce a solução correspondente à condição inicial $y(0) = 1$ e à condição inicial $y(0) = 0$.



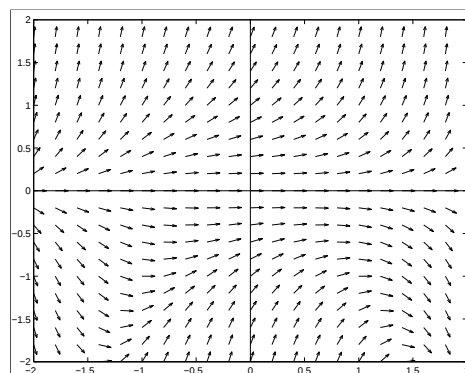
A



B

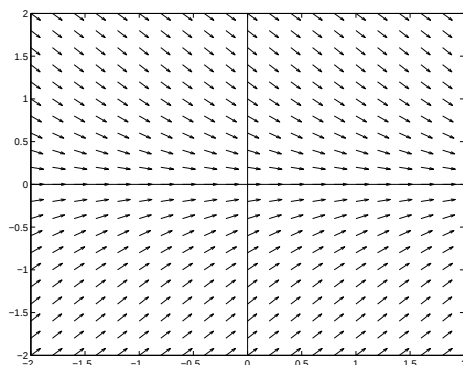


C

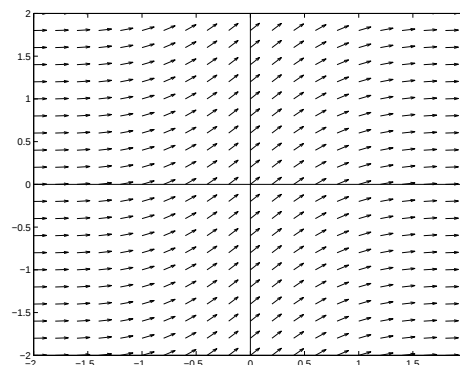


D

4. Considere o campo de direcções indicado na figura E correspondente a uma certa equação diferencial.



E



F

Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras

- (a) A solução cresce com o tempo se a condição inicial for positiva.
 - (b) A solução decresce com o tempo se a condição inicial for negativa.
 - (c) A solução não é derivável se a condição inicial estiver sobre o eixo dos tt .
 - (d) As soluções não podem mudar de sinal.
 - (e) As soluções não constantes nunca atingem um valor máximo.
 - (f) Se a condição inicial for nula, a solução é identicamente nula.
 - (g) Não há soluções constantes além da solução nula.
5. Considere o campo de direcções dado na figura F da equação diferencial $y' = e^{-t^2}$. Determine graficamente a solução que passa pelos pontos

- (a) $(0.5, 0.5)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(1.2, 0)$

6. Considere a equação diferencial

$$y'(t) = y(1 - y).$$

- (a) Determine os pontos de equilíbrio.
- (b) Estude a sua estabilidade usando a derivada de $f(y)$.
- (c) Represente o campo de direcções e algumas soluções.

7. Considere a equação diferencial

$$y'(t) = y^2 - 4.$$

- (a) Determine os equilíbrios e classifique-os (estável/instável).
- (b) Esboce o retrato de fase (eixo y com direcções de crescimento/decrescimento).
- (c) Resolva explicitamente a equação e confirme o comportamento obtido na análise qualitativa.

8. Para a equação

$$y'(t) = e^{-t} - y,$$

- (a) Mostre que existe um único ponto de equilíbrio.
- (b) Estude a sua estabilidade.
- (c) Resolva explicitamente a equação diferencial com condição inicial $y(0) = y_0$ e discuta o limite quando $t \rightarrow +\infty$.

9. (Modelo logístico generalizado) Considere

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \left(\frac{P}{A} - 1 \right), \quad r > 0, \quad K > A > 0.$$

- (a) Identifique todos os pontos de equilíbrio.
- (b) Estude a estabilidade de cada equilíbrio.
- (c) Interprete os resultados no contexto populacional.

Aula 3: Equações separáveis e alguns modelos simples

Uma **equação diferencial separável** (ou de **variáveis separáveis**) é uma equação diferencial de primeira ordem que pode ser escrita na forma

$$y'(t) = g(t) f(y), \quad \text{ou, de modo equivalente,} \quad \frac{dy}{dt} = g(t) f(y).$$

Se $f(y) \neq 0$, é possível reescrevê-la na forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}, \quad \text{onde } h(y) = \frac{1}{f(y)}.$$

Neste caso, a equação pode ser manipulada de modo a separar as variáveis:

$$h(y) \frac{dy}{dt} = g(t).$$

Integrando em relação a t (e usando a técnica da primitivação por substituição) obtemos

$$\int h(y) \frac{dy}{dt} dt = \int g(t) dt \Leftrightarrow \int h(y) dy = \int g(t) dt.$$

Desta forma, chegamos a uma relação (em geral implícita) que permite determinar y como função de t .

Este resultado pode também ser obtido recorrendo à notação de **formas diferenciais** (a que voltaremos mais tarde). De facto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)} \Leftrightarrow h(y) dy = g(t) dt \Leftrightarrow \int h(y) dy = \int g(t) dt.$$

O resultado é uma relação, em geral implícita, da forma

$$H(y) = G(t) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde H e G são primitivas de h e g , respetivamente.

A constante de integração c é determinada a partir da **condição inicial** do problema. Com efeito, se tivermos $y(t_0) = y_0$, basta substituir (t_0, y_0) na expressão obtida para calcular o valor da constante C e, assim, identificar a solução particular que satisfaz a condição inicial.

Exercício 1. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{6t^2}{2y + \cos y} \\ y(1) &= \pi \end{cases}.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6t^2}{2y + \cos y} \Leftrightarrow (2y + \cos y) dy = 6t^2 dt \Leftrightarrow \int 2y + \cos y dy = \int 6t^2 dt.$$

Integrando nos dois membros obtemos $y^2 + \sin y = 2t^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Usando a condição inicial podemos determinar a constante C na forma $\pi^2 + \sin \pi = 2 + C$, o que implica $C = \pi^2 - 2$. Concluimos que a solução pretendida é dada implicitamente por $y^2 + \sin y = 2t^3 + \pi^2 - 2$. $\square$

Exercício 2. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'(t) = y^2.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = 1 dt \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dt.$$

Integrando nos dois membros obtemos $-\frac{1}{y} = t + C$, $C \in \mathbb{R}$, ou, o que é equivalente, $y = -\frac{1}{t+C}$, $C \in \mathbb{R}$. No entanto, na separação das variáveis, dividimos por y^2 , o que só é admissível se $y \neq 0$, que não figura no conjunto de soluções anteriormente encontrado. Dizemos então que esta solução da equação inicial é **singular**. $\square$

Tome atenção que no processo de separação de variáveis (i.e. ao dividir por uma expressão variável), teremos de verificar se não perdemos soluções.

O procedimento geral para resolver uma equação diferencial separável é: (i) reescrever a equação na forma $h(y) dy = g(t) dt$; (ii) integrar ambos os lados; (iii) determinar a constante de integração a partir de condições iniciais; (iv) verificar se alguma solução não foi perdida (por exemplo, soluções constantes eliminadas por divisões).

Exercício 3. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = e^{t^2} y^2 \\ y(1) = -2 \end{cases}.$$

Resolução: Temos, sucessivamente,

$$\frac{dy}{dt} = e^{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = e^{t^2} dt \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = \int e^{t^2} dt.$$

Integrando o primeiro membro (e notando que o segundo não é primitivável) obtemos $-\frac{1}{y} = \int_1^t e^{s^2} ds + C$, $C \in \mathbb{R}$. Usando a condição inicial podemos determinar a constante C na forma $\frac{1}{2} = \int_1^1 e^{s^2} ds + C$, o que implica $C = \frac{1}{2}$. Concluimos que a solução pretendida é dada por $y = \left(\frac{1}{2} + \int_1^t e^{s^2} ds\right)^{-1}$. $\square$

A técnica de separação de variáveis, além de ser simples do ponto de vista algébrico, tem grande utilidade prática na modelação de fenómenos reais. Muitos dos modelos mais clássicos em equações diferenciais podem ser formulados como equações de variáveis separáveis, permitindo assim uma resolução direta através da integração.

Nesta aula vamos explorar alguns exemplos fundamentais, dando continuidade ao que foi considerado na última aula. Apesar de simples, estes exemplos têm grande relevância histórica e prática: o modelo de Malthus constituiu a primeira formulação matemática para o crescimento populacional (1798), o modelo logístico proposto por Verhulst (1840) permanece uma referência em ecologia e dinâmica populacional, e o problema das misturas continua a ser um protótipo essencial no estudo de processos de transporte com aplicações em engenharia química e ambiental.

Modelo de Malthus (crescimento e decaimento exponencial)

Se $y(t)$ representar o número de indivíduos de uma determinada população e b e d as taxas de natalidade e mortalidade, respectivamente, a Lei de Malthus diz que se a população estiver isolada a sua taxa de crescimento (taxa de variação de y em relação a t) é proporcional ao número de indivíduos da população, isto é

$$\frac{dy}{dt} = ry, \quad (1)$$

onde $r = b - d$. A esta lei chama-se lei de crescimento natural ($r > 0$) ou lei de decaimento natural ($r < 0$). Este foi o primeiro modelo do crescimento de uma população humana, e foi proposto em 1798 por Thomas Robert Malthus (1766–1834) que considerou a constante de proporcionalidade como a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

Como a equação diferencial (1) é separável temos

$$\int \frac{dy}{y} = \int r \, dt \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = rt + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{rt+C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Então

$$y(t) = A e^{rt}, \quad A = \pm e^C.$$

Notemos ainda que, se conhecermos uma condição inicial $y(0) = y_0$, o valor de A pode ser dado por $A = y_0$. Provamos então que a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} y'(t) = ry \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

é dada por $y(t) = y_0 e^{rt}$.

Vejamos, agora, qual o significado da constante de proporcionalidade k . Temos que

$$\frac{dy}{dt} = ry \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}.$$

Assim, r representa a **taxa de crescimento (decaimento) relativa**, isto é, a taxa de crescimento (decaimento) dividida pelo tamanho da população. Podemos então dizer que, no modelo exponencial a taxa de crescimento (decaimento) relativa é constante. Por exemplo, se $\frac{dy}{dt} = 0,02y$ dizemos que a taxa de crescimento relativa é de 2%.

Um exemplo de grande importância prática é o do decaimento radioactivo. Como se sabe, as substâncias radioactivas decaem pela emissão espontânea de radiação. Sabe-se experimentalmente que, se $m(t)$ é a massa da substância que fica da massa inicial m_0 ao fim de um tempo t , então a taxa de decaimento relativa $-\frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$ é constante. Temos então que

$$\frac{dm}{dt} = rm, \quad r < 0,$$

o que implica

$$m(t) = m_0 e^{rt}.$$

A taxa de decaimento é calculada em função da **meia-vida** da substância, isto é, do tempo necessário para a massa inicial decair para metade do seu valor.

Exercício 2. A meia-vida do rádio-226, ${}^{226}_{88}\text{Ra}$, é de 1590 anos. Sabendo que uma amostra de rádio-226 tem massa 100 mg, encontre a massa de ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ que permanece ao fim de t anos.

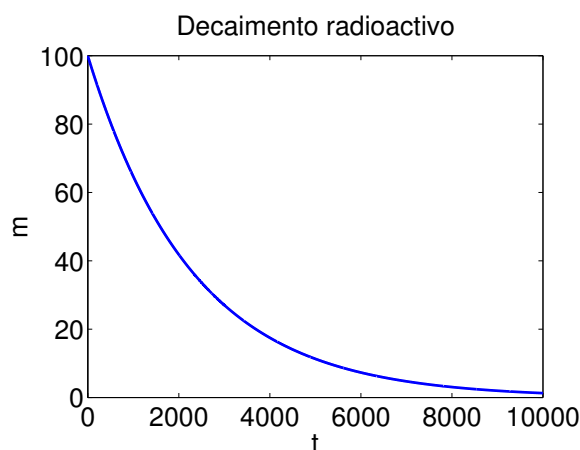
Resolução: Temos que resolver o problema de condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = rm \\ m(0) = 100 \end{cases}.$$

Como vimos, $m(t) = 100 e^{rt}$. Falta-nos apenas determinar o valor da taxa de decaimento relativa k . Pelos dados do problema, $m(1590) = 50$ mg e, como tal,

$$100 e^{1590r} = 50 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{\ln 2}{1590}.$$

Então $m(t) = 100 e^{-(\ln 2/1590)t} = 100 \times 2^{-t/1590}$ mg. $\square$



Modelo de Verhulst (ou modelo logístico)

O modelo de Malthus descreve o crescimento populacional em condições ideais, mas na prática os recursos do ambiente são limitados e não permitem um crescimento indefinido. Assim, muitas populações crescem inicialmente de forma exponencial, mas acabam por estabilizar quando se aproximam da sua **capacidade de suporte** K , ou até decrescem caso ultrapassem esse valor. Para refletir este comportamento, considera-se que a taxa de crescimento relativa diminui à medida que a população aumenta, tornando-se negativa quando esta excede K . A expressão mais simples para uma taxa de crescimento relativa nessas circunstâncias é

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right).$$

Obtemos assim a chamada **equação logística**

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right) \tag{2}$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{dy}{dt} = r_1 y (K - y), \quad r_1 = \frac{r}{K}.$$

Vamos agora ver como obter a solução analítica da equação logística (2). Como é uma equação de variáveis separáveis temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) &\Rightarrow \int \frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \int r \, dt \\
 &\Rightarrow \int \frac{K}{y(K-y)} \, dy = \int r \, dt \\
 &\Rightarrow \int \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} \, dy = rt \\
 &\Rightarrow \ln |y| - \ln |K-y| = rt + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \ln |K-y| - \ln |y| = -rt - C, \quad C \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \ln \left| \frac{K-y}{y} \right| = -rt - C, \quad C \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \left| \frac{K-y}{y} \right| = e^{-rt-C}, \quad C \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow \frac{K-y}{y} = A e^{-rt}, \quad A = \pm e^{-C}, \, C \in \mathbb{R}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Então

$$\frac{K}{y} - 1 = A e^{-rt} \Rightarrow \frac{K}{y} = A e^{-rt} + 1 \Rightarrow y = \frac{K}{A e^{-rt} + 1}.$$

O valor de A pode ser obtido a partir da condição inicial. Se considerarmos $y(0) = y_0$ temos que, de (3),

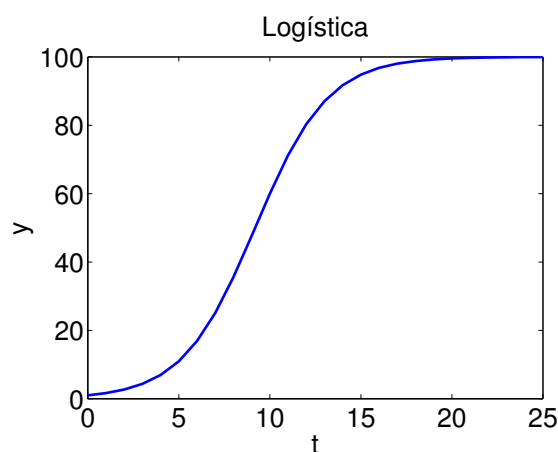
$$A = \frac{K - y_0}{y_0}.$$

Assim, a solução do problema de condição inicial logístico

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

é

$$y(t) = \frac{K}{A e^{-rt} + 1}, \quad A = \frac{K - y_0}{y_0}. \quad (4)$$



Problema das misturas

Um exemplo de um problema que pode ser resolvido pela técnica da separação de variáveis é o chamado **problema das misturas**. Consideremos um tanque com capacidade fixa, preenchido com uma solução completamente misturada de uma substância. Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai do tanque a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denotar a quantidade de substância no tanque no tempo t então

$$y'(t) = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}.$$

A título de exemplo, considere-se um tanque com 20 Kg de sal dissolvido em 5000 L de água. Suponhamos que fazemos entrar no tanque água salgada com 0,03 Kg de sal por litro a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Que quantidade de sal permanece no tanque ao fim de meia hora?

Se representarmos por $y(t)$ a quantidade de sal no instante t , com t o tempo em minutos, pelos dados do problema temos que $y(0) = 20$ Kg e queremos determinar $y(30)$. Temos que a variação de sal no tanque é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \text{taxa de entrada (de sal)} - \text{taxa de saída (de sal)}.$$

Mas,

$$\text{taxa de entrada (de sal)} = (0,03 \text{ Kg/L}) \times (25 \text{ L/min}) = 0,75 \text{ Kg/min}$$

e

$$\text{taxa de saída (de sal)} = \left(\frac{y(t)}{5000} \text{ Kg/L} \right) \times (25 \text{ L/min}) = \frac{y(t)}{200} \text{ Kg/min}.$$

Logo

$$\frac{dy}{dt} = 0,75 - \frac{y}{200} = \frac{150 - y}{200}.$$

Para resolver esta equação temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \frac{150 - y}{200} &\Rightarrow \int \frac{1}{150 - y} dy = \int \frac{1}{200} dt \\ &\Rightarrow -\ln |150 - y| = \frac{1}{200}t + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |150 - y| = e^{-C} e^{-(1/200)t}, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow 150 - y = A e^{-(1/200)t}, \quad A = \pm e^{-c}, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y(t) = 150 - A e^{-(1/200)t}, \quad A \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para obter A notemos que, como $y(0) = 20$ então $A = 130$. Assim, temos que

$$y(t) = 150 - 130 e^{-(1/200)t} \Rightarrow y(30) = 150 - 130 e^{-(3/20)} \approx 38,1080 \text{ Kg}.$$

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis:

(a) $(1+t)\frac{dy}{dt} - y = 0;$

(d) $e^t \frac{dy}{dt} = 2t;$

(b) $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y}, \quad y(4) = 3;$

(e) $(4y + yt^2) dy - (2t + ty^2) dt = 0;$

(c) $\frac{dy}{dt} = y^2 + 4;$

(f) $\sin x \cos yy' + \cos x \sin y = 0;$

(g) $-x + yy' = 0.$

2. Uma equação diferencial de primeira ordem é dita **homogênea** se puder ser escrita na forma

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Mostre que a substituição $z = y/t$ transforma a equação homogênea numa equação de variáveis separáveis.

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}.$$

Mostre que a equação é homogênea e resolva-a.

4. Um projectil é lançado da superfície terrestre com uma velocidade V . Supondo que não há arrasto a equação do movimento é

$$\nu \frac{d\nu}{dr} = -g \frac{R^2}{r^2},$$

onde ν é a velocidade à distância r do centro da Terra que tem raio R . Considerando $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ e $V = 15000 \text{ m/s}$, determine o valor da velocidade quando $r = 2R$.

5. Uma solução líquida flui de forma constante ao longo de um tubo na direcção x . Alguns dos solutos contidos na solução difundem-se através da parede do tubo reduzindo a concentração z no tubo. A concentração z é dada por

$$\frac{dz}{dx} = -z(0,2 + \sqrt{z})e^{-0,03x}.$$

Se tomarmos $z = 1,5$ em $x = 2$ determine o valor de z em $x = 2,4$.

6. Uma cultura tem inicialmente um número N_0 de bactérias. No instante $t = 1$ hora, o número de bactérias é $3N_0/2$. Supondo que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.
7. Um tanque tem 1000 litros de água pura. Em cada minuto, uma torneira A despeja 5 litros de água salgada com 0,05 Kg de sal por litro de água e uma torneira B despeja 10 litros de água salgada com 0,04 Kg de sal por litro de água. A solução é completamente misturada e sai do tanque a uma taxa de 15 litros por minuto. Indique a quantidade de sal que está no tanque após t minutos.

8. Um certo medicamento é usado para tratar sintomas de angina crónica e hipertensão. Como bloqueador dos canais de cálcio, este fármaco faz aumentar o aporte de oxigénio ao miocárdio e simultaneamente diminui a necessidade geral de oxigénio no organismo. Isto é conseguido através da redução do batimento cardíaco e expansão do volume do sistema circulatório, o que, por sua vez, provoca uma diminuição da tensão arterial. Testes experimentais mostram que a meia-vida do referido medicamento, no interior do corpo humano, é de 20 horas. Admita que a taxa de absorção de um medicamento pelo organismo, num dado instante, é proporcional à quantidade de medicamento presente no organismo nesse instante.

Supondo que uma certa dose é administrada de uma só vez a um paciente, escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação do medicamento no seu organismo e determine a constante de proporcionalidade. Determine a solução da equação diferencial.

9. Para que um fármaco possa ser devidamente administrado, é necessário que se conheça o modo como actua no organismo e, em particular, a forma como é absorvido. A relação dose/resposta do organismo, estabelece uma regra vital na determinação da quantidade a administrar em cada dose e do intervalo de tempo entre doses sucessivas.

Testes experimentais a determinado tipo de antibióticos, permitiram concluir que a taxa de variação da concentração destes fármacos na corrente sanguínea, num determinado instante de tempo, é proporcional à sua concentração nesse mesmo instante. Suponha que $y(t)$ representa a concentração deste tipo de antibióticos no organismo (isto é, o número de unidades por mililitro de sangue) no instante t .

- (a) Escreva a equação diferencial que descreve a taxa de variação destes antibióticos no organismo.
 - (b) Há vários métodos para combater uma determinada infecção. Em situações graves é necessário um tratamento de choque, que consiste em administrar ao paciente várias doses, igualmente espaçadas no tempo, a primeira das quais já tem a concentração máxima requerida C_m e as seguintes permitem apenas corrigir desvios a este valor devidos à perda de concentração por eliminação.
 - i. Determine a concentração de antibiótico após um tempo prescrito T , depois da administração da primeira dose.
 - ii. Se uma segunda dose é administrada nesse instante T , qual deve ser a sua concentração, de forma a repôr de imediato a concentração inicial C_m ?
 - iii. Supondo que este procedimento se repete nos instantes $2T$, $3T$, $4T$, faça um esboço do gráfico da função y no intervalo $[0, 4T]$.
 - iv. Determine o tempo que decorre desde a administração da última dose até que 99% do medicamento desapareça da corrente sanguínea, sabendo que a sua meia-vida, enquanto no organismo, é de 30 minutos.
10. No processo de conservação de alimentos o açúcar de cana passa por uma conversão na qual se transforma numa mistura de glucose e frutose.
- Sabe-se que numa solução diluída a taxa de conversão é proporcional à concentração $y(t)$ de açúcar não alterado. Sabendo que a dita concentração no instante inicial é igual a $1/50$ e de $1/200$ ao fim de 3 horas, determine a concentração de açúcar alterado ao fim de 6 horas.

11. Descobriu-se um osso fossilizado com $1/1000$ da quantidade original de carbono-14. Sabendo que a meia-vida do carbono-14 é de 5600 anos, determine a idade do fóssil. Admita que a taxa de desintegração (ou decaimento) do carbono-14 é proporcional à massa de carbono-14 existente em cada instante.
12. A população de um país foi de 12,1 milhões de habitantes em 1996 e de 13,268 milhões em 2000. Supondo que a taxa de crescimento é directamente proporcional ao tamanho da população, estime o tamanho da população em 2005, 2006 e 2007.
13. Em 1626 os índios Lenape venderam a ilha de Manhattan ao Director Geral da Companhia Holandesa das Índias Ocidentais e Colonização, o holandês Peter Minuit, por 60 florins em quinquilharia, o equivalente a 24 dólares. Se, nessa altura, os índios tivessem colocado o dinheiro a render a uma taxa de 6% ao ano, quanto dinheiro teriam agora?
14. Um estudante portador do vírus da gripe regressa a um colégio com 1000 alunos. Suponha que o colégio está isolado e que o vírus se propaga com uma taxa de variação proporcional não apenas ao número y de alunos já infectados mas também ao número de alunos não infectados.
 - (a) Determine o número de alunos infectados após 6 dias, sabendo que passados 4 dias eles são já 50.
 - (b) Calcule o valor limite da função $y(t)$, quando t tende para $+\infty$.
15. Suponha que uma população y evolui de acordo com a equação logística

$$\frac{dy}{dt} = 0,05y - 0,005y^2,$$

onde t é medido em semanas. Determine a capacidade de suporte da população e valor da sua taxa de crescimento.

16. Suponha que o modelo de crescimento de uma população y é descrito pela equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3y}{20} - \frac{y^2}{1600}.$$

Considerando $y(0) = 15$, determine o número de indivíduos da população no instante $t = 10$.

17. Suponha que uma dada população está dividida em dois grupos: aqueles que sofrem de uma certa doença infecto-contagiosa e aqueles que não sofrem dessa doença mas que a podem contrair por contacto com uma pessoa infectada. Sabe-se que a taxa de propagação desta doença é directamente proporcional ao número de contactos entre gente infectada e gente sã. Suponha que os dois grupos convivem sem qualquer tipo de precaução.
 - (a) Determine a equação diferencial que descreve a propagação desta doença.
 - (b) Se $1/4$ da população está infectada num determinado instante $t = 0$, esboce o gráfico da função que descreve a propagação da doença, a partir desse instante.
 - (c) Quanto tempo decorrerá até que toda a população esteja doente?

18. Um modelo para o crescimento da biomassa (massa total dos membros da população) de atum do Pacífico, dada em quilogramas, é dado por

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad (5)$$

onde t é medido em anos, $r = 0,71\%$ ao ano e a capacidade de suporte foi medida como sendo $K = 8 \times 10^7$ quilogramas.

- (a) Se $y(0) = 2 \times 10^7$ quilogramas, calcule a biomassa um ano depois.
 (b) Quanto tempo levará a biomassa a alcançar 4×10^7 quilogramas?

19. Seja y uma solução da equação logística (5).

- (a) Mostre que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = r^2y \left(1 - \frac{y}{K}\right) \left(1 - \frac{2y}{K}\right).$$

- (b) Deduza que a população cresce mais rapidamente quando ela atinge a metade da sua capacidade de suporte.

20. Para algumas espécies existe uma população mínima m tal que as espécies se tornam extintas quando o tamanho da população é inferior a esse valor. Nesse caso, o modelo logístico deve ser substituído por

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \left(1 - \frac{m}{y}\right), \quad y(0) = y_0.$$

- (a) Use a equação diferencial para mostrar que qualquer solução é crescente se $m < y < K$ e decrescente se $0 < y < m$.
 (b) Resolva o problema de condição inicial.
 (c) Mostre que se $y_0 < m$ as espécies se tornarão extintas.

21. Num modelo de crescimento sazonal, uma função periódica no tempo é introduzida para considerar as variações na taxa de crescimento. Esse modelo pode ser traduzido pelo problema de condição inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \cos(rt - \phi), \quad y(0) = 1,$$

onde k , r e ϕ são constantes positivas. Determine a solução do modelo de crescimento sazonal.

Aula 4: Equações lineares de primeira ordem

Uma **equação diferencial linear de primeira ordem** é uma equação que pode ser escrita na forma

$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (1)$$

onde p e q são funções contínuas num intervalo I . O problema típico consiste em resolver a equação com uma **condição inicial** $y(t_0) = y_0$.

Por exemplo, consideremos a equação linear de primeira ordem

$$ty'(t) + y(t) = 2t \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 2.$$

Esta equação não é separável e, portanto, não pode ser resolvida diretamente por separação de variáveis. No entanto, podemos notar que

$$ty'(t) + y(t) = (ty(t))',$$

isto é, o lado esquerdo já se encontra na forma de uma derivada exata. Assim,

$$(ty(t))' = 2t \quad \Rightarrow \quad \int (ty(t))' dt = \int 2t dt \quad \Rightarrow \quad ty = t^2 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

o que conduz à solução geral (para $t \neq 0$)

$$y(t) = t + \frac{C}{t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se tivéssemos partido da forma $y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 2$, teríamos multiplicado a equação por t , obtendo

$$t(y'(t) + \frac{1}{t}y(t)) = ty'(t) + y(t) = 2t.$$

Dizemos que $\mu(t) = t$ é um **factor integrante**, pois é a função que, ao multiplicar a equação diferencial, transforma o lado esquerdo numa derivada exata, permitindo assim a sua integração direta. A constante C é determinada pela condição inicial. Por exemplo, se $y(1) = 2$, então

$$2 = 1 + \frac{C}{1} \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

e a solução particular é

$$y(t) = t + \frac{1}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Método do factor integrante

A ideia fundamental consiste em multiplicar a equação por uma função $\mu(t)$ que transforma o lado esquerdo numa derivada exata

$$\mu(t)(y'(t) + p(t)y(t)) = (\mu(t)y(t))'.$$

Se tal função existir, chamamos-lhe **factor integrante**. A equação torna-se então

$$(\mu(t)y)' = \mu(t)q(t),$$

o que permite integrar diretamente

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)q(t) dt + C \right), \quad C \in \mathbb{R},$$

obtendo assim a solução geral da equação diferencial.

Para determinar $\mu(t)$, notemos que

$$\mu(t)(y'(t) + p(t)y(t)) = \mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = (\mu(t)y(t))' = \mu'(t)y(t) + \mu(t)y'(t).$$

Comparando termos, obtemos $\mu'(t) = \mu(t)p(t)$, ou seja, por separação de variáveis,

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \Rightarrow \ln |\mu(t)| = \int p(t) dt + C \Rightarrow \mu(t) = A e^{\int p(t) dt}, \quad A \neq 0.$$

Assim $\mu(t)$ é um factor integrante qualquer que seja o A . Vamos escolher, por exemplo, $A = 1$. Então,

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}. \quad (2)$$

Nota 1 Note-se que se p é uma função contínua num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, o factor integrante μ é diferenciável em I e nunca se anula. $\square$

O estabelecer um algoritmos para resolver um problema de condição inicial

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = q(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

1. Calcular o factor integrante $\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$.
2. Multiplicar a equação original por $\mu(t)$ e reescrevê-la como $(\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t)$.
3. Integrar e resolver para $y(t)$.
4. Determinar a constante de integração usando a condição inicial.

A construção realizada anteriormente, baseada no factor integrante, não só fornece uma fórmula explícita para a solução da equação diferencial linear de primeira ordem, como também nos permite enunciar e demonstrar um resultado fundamental seguinte.

Teorema 1 (Existência e unicidade para EDOs lineares de 1^a ordem)

Sejam p e q funções contínuas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ que contém t_0 . Para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$ o problema de condição inicial (3) tem uma única solução y definida em todo o $I \subset \mathbb{R}$.

De forma geral, a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial é assegurada pelo Teorema de Picard–Lindelöf (que será demonstrado na Aula 6), o qual requer apenas a continuidade da função e uma condição de Lipschitz relativamente à variável dependente. No entanto, no caso particular das equações diferenciais lineares de primeira ordem, a situação simplifica-se bastante: basta assumir a continuidade de p e q , sendo possível obter a solução de forma construtiva através do factor integrante.

Nota 2 Para provar a unicidade, suponhamos que y_1 e y_2 são duas soluções diferenciáveis da mesma equação com a mesma condição inicial, e seja $z = y_1 - y_2$. Então z é diferenciável em I e satisfaz a equação homogénea $z'(t) + p(t)z(t) = 0$, com $z(t_0) = y_1(t_0) - y_2(t_0) = 0$. Esta equação homogénea é separável; uma solução geral é $z(t) = C e^{\int p(t) dt}$. Como $z(t_0) = 0$, então $C = 0$ e, portanto, $z(t) \equiv 0$ em I . Assim $y_1 \equiv y_2$ em I , provando a unicidade. $\square$

Exercício 1. Um circuito eléctrico simples consiste num medidor de corrente eléctrica I (em amperes), uma resistência R (em ohms), um indutor L (em henries) e uma voltagem aplicada E (em volts). Pela segunda Lei de Kirchhoff, a corrente I satisfaz

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Determine a corrente I ao fim de $t = 0,5$ segundos, sabendo que $L = 1$ H, $R = 2$ Ω , $E(t) = 20 \sin 6t$ V e $I(0) = 1$ A.

Resolução: A equação dada pode ser escrita na forma

$$\frac{dI}{dt} + 2I = 20t \sin(6t).$$

Assim sendo, o factor integrante é dado por

$$\mu(t) = e^{\int 2 dt} = e^{2t}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor integrante obtemos

$$e^{2t} \left(\frac{dI}{dt} + 2I \right) = 20 e^{2t} \sin(6t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(e^{2t} I) = 20 e^{2t} \sin 6t,$$

o que implica

$$I(t) = 20 e^{-2t} \int e^{2t} \sin(6t) dt.$$

Integrando por partes (prove!) obtém-se

$$I(t) = \sin(6t) - 3 \cos(6t) + C e^{-2t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial concluímos que

$$1 = \sin 0 - 3 \cos 0 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = 4.$$

Então, $I(0,5) = \sin 3 - 3 \cos 3 + 4 e^{-1} = 4,5826$ A. $\square$

Nota 3 Em muitas situações é útil escrever factor integrante na forma

$$\mu(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

ue evidencia a dependência no instante inicial t_0 . Assim, multiplicando a equação diferencial por $\mu(t, t_0)$ obtém-se

$$(\mu(t, t_0) y(t))' = \mu(t, t_0) q(t).$$

Integrando ambos os membros entre t_0 e $t \in I$,

$$\mu(t, t_0) y(t) - \mu(t_0, t_0) y(t_0) = \int_{t_0}^t \mu(s, t_0) q(s) ds.$$

Como $\mu(t_0, t_0) = 1$ e $y(t_0) = y_0$, a solução do problema de condição inicial (3) pode ser escrita na forma

$$y(t) = \mu(t, t_0)^{-1} \left(y_0 + \int_{t_0}^t \mu(s, t_0) q(s) ds \right). \quad (4)$$

Esta expressão para a solução é chamada **fórmula da variação dos parâmetros**. $\square$

Exercício 2. Determine a solução dos problemas de condição inicial:

(a) $y' + \frac{1}{t}y = \cos(2t), \quad y(\pi/2) = 1;$

(b) $t y'(t) + 2y(t) = \sin t, \quad y(-\pi) = -2.$

Resolução: (a) Temos que, comparando com a equação geral, $p(t) = \frac{1}{t}$ e $q(t) = \cos(2t)$. Assim, multiplicando ambos os membros da equação diferencial pelo factor integrante $\mu(t) = e^{\int 1/t dt} = |t|$. Atendendo à condição inicial, consideramos $t > 0$ e o factor integrante $\mu(t) = t$ (para o caso $t < 0$ e o factor integrante seria $\mu(t) = -t$). Multiplicando a equação pelo factor integrante obtemos

$$t y'(t) + y(t) = t \cos(2t) \Rightarrow (t y(t))' = t \cos(2t).$$

Integrando entre $\pi/2$ e t resulta

$$t y(t) - 2 \frac{\pi}{2} = \int_{\pi/2}^t s \cos(2s) ds.$$

A primitiva de $s \cos(2s)$ obtém-se por integração por partes:

$$\int s \cos(2s) ds = \frac{s}{2} \sin(2s) + \frac{1}{4} \cos(2s) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

Logo a solução é

$$y(t) = \frac{1}{t} \left(\pi + \left[\frac{s}{2} \sin(2s) + \frac{1}{4} \cos(2s) \right]_{s=\pi/2}^{s=t} \right), \quad t > 0.$$

Escrevendo de forma explícita,

$$y(t) = \frac{1}{t} \left(\pi + \frac{t}{2} \sin(2t) + \frac{1}{4} \cos(2t) - \frac{1}{4} \right).$$

(b) Dividindo por t (tendo em conta $t \neq 0$) obtemos a forma padrão

$$y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Aqui $p(t) = \frac{2}{t}$, $q(t) = \frac{\sin t}{t}$. O factor integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = t^2 \quad (\text{já que } t^2 = |t|^2).$$

Multiplicando pelo factor integrante

$$(t^2 y(t))' = t \sin t.$$

Integrando entre $t_0 = -\pi$ (ponto inicial dado) e t (note que estamos no ramo $t < 0$ quando t é próximo de $-\pi$):

$$t^2 y(t) - (-\pi)^2 y(-\pi) = \int_{-\pi}^t s \sin s ds \Leftrightarrow t^2 y(t) + 2\pi^2 = \int_{-\pi}^t s \sin s ds.$$

A primitiva de $s \sin s$ é (integração por partes)

$$\int s \sin s \, ds = -s \cos s + \sin s + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$t^2 y(t) = -2\pi^2 + (-t \cos t + \sin t) - (-(\pi) \cos(-\pi) + \sin(-\pi))$$

e portanto

$$t^2 y(t) = -2\pi^2 + (-t \cos t + \sin t) - (-\pi) = -2\pi^2 - t \cos t + \sin t + \pi.$$

Finalmente

$$y(t) = \frac{-2\pi^2 - t \cos t + \sin t + \pi}{t^2}, \quad t \neq 0,$$

e em particular para t no ramo contendo $-\pi$ $\square$

Nota 4 Em ambas as equações usamos o método do factor integrante; convém sempre assegurar que integramos num intervalo onde t não muda de sinal, porque o termo $1/t$ (ou divisão por t) e a expressão $\ln |t|$ exigem ramos adequados. $\square$

Interpretação entrada–resposta

Na resolução de equações diferenciais, é muitas vezes útil adotar o ponto de vista **entrada–resposta**. A equação diferencial descreve o modo como um sistema reage a um estímulo externo, isto é, como transforma uma **entrada** num determinado **comportamento de saída**.

No caso das equações diferenciais lineares de primeira ordem (1) a função $q(t)$ pode ser vista como a **entrada** do sistema, enquanto $y(t)$ é a sua **resposta**. Por exemplo, se considerarmos $y' + y = 1$, temos uma entrada constante $q(t) = 1$. A solução geral é $y(t) = C e^{-t} + 1$, onde o primeiro termo representa a resposta transitória (que desaparece quando $t \rightarrow +\infty$) e o termo constante corresponde à resposta estacionária ao estímulo.

Este ponto de vista é particularmente importante em aplicações de física e engenharia, onde sistemas mecânicos, elétricos ou biológicos são frequentemente descritos por equações diferenciais lineares, e a análise da resposta a diferentes entradas (constantes, periódicas, impulsos, etc.) é fundamental para compreender o seu comportamento.

Para considerar o caso geral, é conveniente introduzir o chamado **núcleo de propagação/convolução**

$$\Phi(t, s) = e^{-\int_s^t p(u) \, du}. \quad (5)$$

Nota 5 Note que, usando a definição do factor integrante e μ que surge na fórmula da variação dos parâmetros (4) temos que $\Phi(t, s) = \mu(s, t_0)\mu(t, t_0)^{-1}$. De facto,

$$\frac{\mu(s, t_0)}{\mu(t, t_0)} = e^{\int_{t_0}^s p(u) \, du - \int_{t_0}^t p(u) \, du} = e^{-\int_s^t p(u) \, du} = \Phi(t, s). \quad \square$$

Com esta notação, a solução do problema de condição inicial (3) decompõe-se naturalmente em duas parcelas

$$y(t) = \Phi(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)q(s) \, ds.$$

As duas parcelas da equação anterior podem ser interpretadas da forma seguinte.

- A parcela $\Phi(t, t_0)y_0$ é a **resposta/solução homogênea (transitória)**: descreve a evolução do estado inicial quando não há entrada (solução da equação homogênea). Em muitos casos, ela decai com o tempo, razão pela qual também se chama *transitória*.
- O integral $\int_{t_0}^t \Phi(t, s)q(s) ds$ é a **resposta/solução particular (forçada)**: acumula as contribuições da entrada $q(s)$ ocorridas em cada instante s , atenuadas pelo factor de propagação $\Phi(t, s)$.

Em resumo, a primeira parcela depende apenas da condição inicial e muitas vezes decai quando $t \rightarrow \infty$, enquanto a segunda depende da entrada $q(t)$ e descreve o regime estacionário do sistema. O núcleo $\Phi(t, s)$ atua como uma **função de Green**, isto é, a resposta do sistema a um impulso aplicado em s .

Exercício 3. Mostre que o núcleo satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Phi(t, t) = 1, \quad \Phi(t, s)\Phi(s, r) = \Phi(t, r), \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, s) = -p(t)\Phi(t, s).$$

Resolução: A primeira é evidente. A segunda, chamada propriedade de semigrupo, decorre das propriedades da exponencial. A terceira, que mostra que Φ resolve a equação homogênea, obtém-se diretamente por derivação em ordem a t . $\square$

Vejamos alguns exemplos ilustrativos.

Exemplo 1 (Coeficientes constantes) No caso $p(t) \equiv p_0$ constante obtém-se

$$\mu(t, t_0) = e^{p_0(t-t_0)}, \quad \Phi(t, s) = e^{-p_0(t-s)}.$$

A solução fica

$$y(t) = e^{-p_0(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{-p_0(t-s)}q(s) ds.$$

Aqui $\Phi(t, s) = e^{-p_0(t-s)}$ é um decaimento/crescimento exponencial simples. Se $p_0 > 0$, então $e^{-p_0(t-t_0)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, a resposta transitória decai, os efeitos relativos a $q(s)$ são atenuados. Neste caso o sistema é estável (a longo prazo domina a resposta forçada). Se $p_0 < 0$, a parcela transitória cresce exponencialmente e o sistema é instável.

Se além disso a entrada $q(s) \equiv q_0$ é constante (e $p_0 \neq 0$), integra-se explicitamente

$$y(t) = e^{-p_0(t-t_0)}y_0 + \frac{q_0}{p_0}(1 - e^{-p_0(t-t_0)}).$$

A parcela $y_0 e^{-p_0(t-t_0)}$ decai com o tempo (no caso $p_0 > 0$) e representa a resposta transitória dependente da condição inicial. A parcela $\frac{q_0}{p_0}(1 - e^{-p_0(t-t_0)})$ tende para $\frac{q_0}{p_0}$ quando $t \rightarrow \infty$ e representa a resposta forçada ou regime estacionário. $\square$

Exemplo 2 (Entrada sinusoidal) Se $p(t) \equiv p_0 > 0$ e $q(t) = \sin(\omega t)$, temos

$$y(t) = e^{-p_0(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{-p_0(t-s)} \sin(\omega s) ds.$$

O integral pode ser calculado explicitamente:

$$\int e^{-p_0(t-s)} \sin(\omega s) ds = \frac{e^{-p_0(t-s)}}{p_0^2 + \omega^2} (p_0 \sin(\omega s) - \omega \cos(\omega s)).$$

Logo, a solução geral é

$$y(t) = e^{-p_0(t-t_0)}y_0 + \frac{1}{p_0^2 + \omega^2} \left(p_0 \int_{t_0}^t e^{-p_0(t-s)} \sin(\omega s) ds - \omega \int_{t_0}^t e^{-p_0(t-s)} \cos(\omega s) ds \right),$$

o que se simplifica para (prove!)

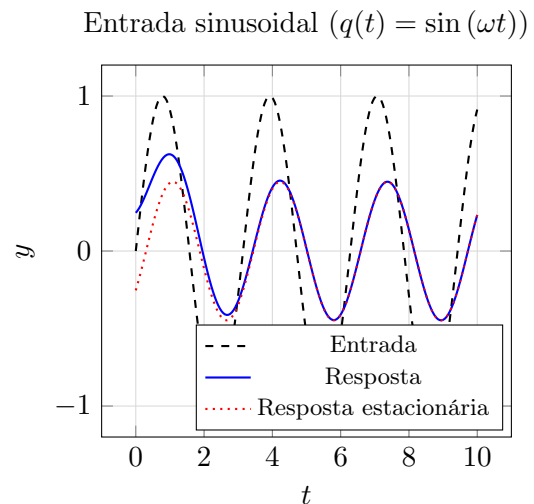
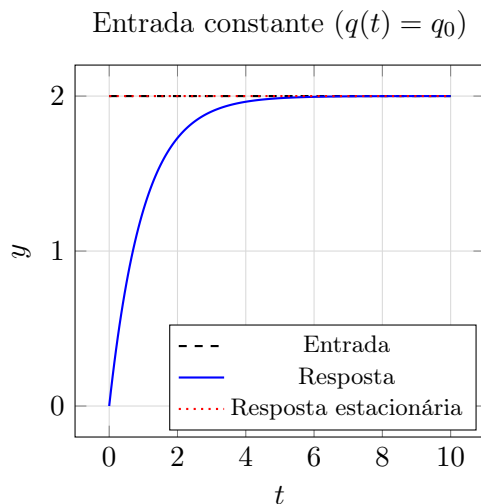
$$y(t) = e^{-p_0(t-t_0)}(y_0 - y_{\text{est}}(t_0)) + y_{\text{est}}(t),$$

com a resposta estacionária dada por

$$y_{\text{est}}(t) = \frac{1}{\sqrt{p_0^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{p_0}\right).$$

Podemos interpretar a resposta estacionária como uma onda sinusoidal com a mesma frequência da entrada, mas com amplitude atenuada e fase atrasada. A componente transitória (exponencial) desaparece quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

As figuras seguintes ilustram a comparação entre respostas transitória e estacionária para entradas constante e sinusoidal.



Vamos considerar um exercício que ilustra, mais uma vez, a ideia de que, em equações lineares, a solução é a soma de uma componente transitória (associada ao estado inicial) e de uma componente estacionária (associada à entrada).

Exercício 3. Determine a resposta da seguinte equação com entrada periódica

$$y'(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = 0.$$

Resolução: O factor integrante é $\mu(t) = e^{\int 1 dt} = e^t$ e a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{-(t-t_0)} y_0 + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)} \sin s \, ds = e^{-t} \int_0^t e^s \sin s \, ds$$

Fazendo integração por partes, encontra-se

$$\int e^s \sin s \, ds = \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t).$$

Portanto,

$$y(t) = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} e^{-t}.$$

A solução pode ser decomposta em duas partes: a resposta transitória $\frac{1}{2} e^{-t}$ e a resposta estacionária $\frac{1}{2} (\sin t - \cos t)$. A primeira corresponde à resposta ao estado inicial e desaparece exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$. A segunda é a resposta permanente da equação à entrada $\sin t$, e é também uma função periódica, com a mesma frequência mas diferente fase e amplitude. $\square$

As equações diferenciais lineares de primeira ordem são casos paradigmáticos em que a solução pode ser construída de forma explícita e interpretada de maneira clara. A distinção entre parte homogénea e particular prepara o caminho para métodos mais avançados, como a variação dos parâmetros, e mostra como a linguagem entrada-resposta é natural na análise de sistemas dinâmicos.

Nota 6 O método da variação dos parâmetros (que veremos mais tarde com outro detalhe), pode ser visto da seguinte forma na resolução do problema de condição inicial (3). Começamos por determinar a solução da equação homogénea que, atendendo à definição do núcleo (5), é dada por $y_h(t) = C \Phi(t, t_0)$. De seguida, considerando $C = u(t)$, procura-se a solução da equação na forma $y(t) = u(t) \Phi(t, t_0)$. Então

$$y'(t) = u'(t) \Phi(t, t_0) + u(t) \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = u'(t) \Phi(t, t_0) - u(t) p(t) \Phi(t, t_0),$$

e substituindo em $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$ obtemos $u'(t) \Phi(t, t_0) = q(t)$. Logo

$$u'(t) = \frac{q(t)}{\Phi(t, t_0)}, \quad u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{q(s)}{\Phi(s, t_0)} \, ds.$$

Impondo a condição inicial $y(t_0) = y_0$ tem-se que $u(t_0) = y_0$. Assim

$$y(t) = \Phi(t, t_0) y_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \frac{q(s)}{\Phi(s, t_0)} \, ds = \Phi(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) q(s) \, ds. \quad \square$$

Um comentário final relativo à relação entre o factor integrante e o núcleo convolucional. O **factor integrante** e o **núcleo convolucional** são duas faces da mesma construção: μ é a ferramenta algébrica que torna a equação integrável; Φ é a sua reinterpretação dinâmica que evidencia a relação entrada-resposta e a acumulação convolucional das entradas ao longo do tempo.

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y' + (\cos x) y &= x^2 e^{-\sin x}; & \text{(b)} \quad \frac{dy}{dt} + 2ty &= t; & \text{(c)} \quad \frac{dy}{dt} &= \frac{y+t}{t}; \\ \text{(d)} \quad dy + (y \cos x - e^{-\sin x}) dx &= 0; & \text{(e)} \quad t^2 y' + t(t+2)y &= e^t; & \text{(f)} \quad \frac{dy}{dt} &= y+t; \\ \text{(g)} \quad y' - \frac{1}{x}y &= x + \frac{x}{1+x^2}; & \text{(h)} \quad t^2 y' + t(t+3)y &= e^{-t}; & \text{(k)} \quad t \frac{dy}{dt} - 4y &= t^6. \end{aligned}$$

2. A Ana pesa 60 quilogramas e está a fazer uma dieta de 1600 calorias por dia, das quais 850 são usadas directamente no metabolismo basal. Mais, a Ana gasta cerca de 15 calorias por dia e por quilograma do seu peso a fazer exercício físico.

- (a) Supondo que um quilograma de gordura tem 10000 calorias e que a reserva de calorias na forma de gordura é 100% eficiente, formule uma equação diferencial e resolva-a de forma a conhecer o peso da Ana em função do tempo.
- (b) Será que o peso da Ana vai chegar ao peso de equilíbrio?

3. Um tanque contém 100 litros de água. Uma solução com uma concentração de sal de 0,4 Kg/L é adicionada a uma taxa de 5 L/min. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque a uma taxa de 3 L/min. Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) ao fim de t minutos.

- (a) Tendo em conta que o volume do fluido no tanque não permanece constante ao longo do tempo, mostre que y satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}.$$

- (b) Resolva a equação diferencial e calcule a concentração ao fim de 20 minutos.

4. Seja $L(t)$ o comprimento (em centímetros) de um determinado peixe no dia t . O modelo de von Bertalanffy diz-nos que a taxa de crescimento do comprimento do peixe é proporcional ao comprimento que ainda lhe falta para atingir o valor máximo M .

- (a) Obtenha a equação diferencial que descreve a evolução do comprimento do peixe ao longo do tempo.
- (b) Considerando $M = 53$ cm e sabendo que $L(0) = 10$ cm e $L(2) = 12$ cm, determine o dia em que o comprimento do peixe atinge 90% do seu valor máximo.

5. A **Lei do Arrefecimento de Newton** diz que taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto).

Considere uma esfera de metal aquecida a 100°C e que é mergulhada em água mantida à temperatura constante de 30°C . Ao fim de cinco minutos a temperatura da esfera desceu para 60°C . Determine: (a) a temperatura da esfera ao fim de meia-hora; (b) o instante em que a temperatura da esfera atinge 31° .

6. Às 11 h da noite John foi encontrado sem vida no seu apartamento. Suspeita-se de homicídio. Claxon chegou ao local do crime às 23 h 30 m e mediu de imediato a temperatura da vítima: 30°C . Uma hora depois, constatou que a temperatura do corpo tinha descido para 25°C enquanto que a temperatura no interior do apartamento se mantinha constante e igual a 20°C . A que hora ocorreu o presumível crime?
7. O João é sempre o primeiro a levantar-se, mas as duas chávenas e a caneca com leite já a Júlia deixou de véspera sobre a mesa para o pequeno almoço. Por rotina, o João faz o café, despeja-o nas duas chávenas, acrescenta uma porção de leite ao seu café e lê o jornal local durante cinco minutos antes de tomar o primeiro gole. A Júlia chega à mesa cinco minutos depois do café ter sido colocado na chávena, acrescenta-lhe o leite (a mesma quantidade que o João) e toma o primeiro gole. Quem bebeu o café mais quente? Apresente argumentos para a sua resposta.
8. Uma **equação de Bernoulli** (em homenagem a James Bernoulli (1654–1705)) é da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n,$$

com n um número inteiro. Observe que, se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é linear. Para outros valores de n , mostre que a substituição $u = y^{1-n}$ transforma a equação de Bernoulli na equação linear

$$\frac{du}{dt} + (1-n)p(t)u = (1-n)q(t).$$

9. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

$$(a) \quad ty' + y = -ty^2; \quad (b) \quad y' + y = ty^3; \quad (c) \quad y' + \frac{2}{t}y = \frac{y^3}{t^2}.$$

10. Uma **equação de Riccati** (em homenagem a Jacopo Riccati (1676 – 1754)) é da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y + q(t)y^2 = f(t).$$

Mostre que se for conhecida uma solução particular y_1 da equação, esta se pode transformar numa equação de Bernoulli com a mudança de variável

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt}.$$

11. Mostre que y_1 é solução de cada uma das equações diferenciais de Riccati e determine a solução geral de cada uma delas:

$$(a) \quad y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2, \quad y_1 = t; \quad (b) \quad x^2y' - x^2y^2 + xy + 1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{x}.$$

12. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

$$\begin{aligned} (a) \quad y' - y &= 2te^{2t}, \quad y(0) = 1; & (b) \quad y' + 2y &= te^{-2t}, \quad y(1) = 0; \\ (c) \quad t^2y' + 2ty &= \cos t, \quad y(\pi) = 0; & (d) \quad ty' + 2y &= \sin t, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \\ (e) \quad y' &= \frac{t^2}{y(1+t^3)}, \quad y(0) = 1; & (f) \quad y' &= \frac{y \cos t}{y(1+2y^2)}, \quad y(0) = 1. \end{aligned}$$

Aula 5: Equações diferenciais exactas

Quando começamos a estudar equações diferenciais, as primeiras equações que aprendemos a resolver eram muito simples: aquelas do tipo $y' = f(t)$, que se resolvem por integração direta. Em seguida alargámos o nosso catálogo para incluir equações separáveis e equações lineares de primeira ordem pelo método do factor integrante.

Ainda assim, muitas equações diferenciais ordinárias não se enquadram directamente nestas classes. Existe, no entanto, um conjunto importante de equações que podem ser resolvidas por uma ideia muito natural: procurar uma função cujo diferencial total coincida com a expressão da equação. Estas equações, podem ser escritas forma

$$\frac{d\phi}{dt}(t, y) = 0 \quad (1)$$

para alguma função $\phi(t, y)$. A intuição é geométrica e elegante: em vez de procurar $y(t)$ explicitamente, procuramos uma função $\phi(t, y)$ cujas curvas de nível

$$\phi(t, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

sejam precisamente as soluções procuradas.

Exemplo 1 A equação $1 + \cos(t + y) + \cos(t + y)(dy/dt) = 0$ pode ser escrita na forma $(d/dt)(t + \sin(t + y)) = 0$. Portanto,

$$\phi(t, y) = t + \sin(t + y) = C \quad e \quad y = -t + \arcsin(C - t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

A equação $\cos(t + y) + (1 + \cos(t + y))dy/dt = 0$ pode ser escrita na forma $(d/dt)(y + \sin(t + y)) = 0$. Portanto,

$$\phi(t, y) = y + \sin(t + y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Devemos deixar a solução nesta forma, pois não conseguimos resolver y explicitamente como uma função de t . $\square$

As curvas de nível (2) descrevem soluções gerais da equação diferencial correspondente. Por exemplo, as soluções de $yy' + t = 0$ são dadas por (prove!) $t^2 + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$, ou seja, as soluções da equação diferencial descrevem circunferências centradas na origem.

Nota 1 (Equações diferenciais e curvas planas) A correspondência entre a solução geral de uma equação diferencial e uma família de curvas planas não é exclusiva das equações diferenciais que se podem escrever na forma (1). Num caso mais geral, dada a família de curvas planas

$$\phi(t, y, C) = 0, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

pode obter-se a equação diferencial correspondente da seguinte forma: (i) deriva-se (3) em ordem a t e obtém-se $\partial\phi/\partial t(t, y, C) = 0$; (ii) tendo em conta esta última equação e (3), elimina-se o parâmetro C e obtém-se a equação diferencial correspondente. De notar que, pelo Teorema da Função Implícita, é sempre possível explicitar o valor de C se $\partial\phi/\partial C(t, y, C)$ não se anular.

Por exemplo, para determinar a equação diferencial correspondente à família de curvas planas $y - 2Ct^2 - C = 0$, $C \in \mathbb{R}$, deriva-se a equação em ordem a t e obtém-se $y' - 4Ct = 0$. Das duas equações elimina-se o parâmetro C . Da primeira obtém-se $C = y/(2t^2 + 1)$; substituindo na segunda, resulta $y' - 4ty/(2t^2 + 1) = 0$, ou seja, $(2t^2 + 1)y' - 4ty = 0$. Esta é a equação diferencial correspondente à família de curvas dada. $\square$

Para encontrar todas as equações diferenciais que podem ser escritas na forma (1), observe que, a partir da regra da cadeia, se tem

$$\frac{d\phi}{dt}(t, y) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial\phi}{\partial y}(t, y) \frac{dy}{dt}(t).$$

Assim sendo, a equação diferencial da forma

$$M(t, y) + N(t, y)y'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt}(t) = 0 \quad (4)$$

pode ser escrita na forma (1) se e somente se existir uma função $\phi(t, y)$ tal que

$$M(t, y) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, y) \quad \text{e} \quad N(t, y) = \frac{\partial\phi}{\partial y}(t, y). \quad (5)$$

Definição 1 (Equação exacta) A equação diferencial (4) diz-se **exacta** se existir uma função diferenciável ϕ tal que a equação se pode escrever na forma (1) ou, o que é equivalente, se existir uma função diferenciável ϕ tal que (5) se verifica.

Nota 2 A razão para a definição anterior tem a ver com o facto de que o primeiro membro de (4) é a derivada exata de uma função ϕ se as igualdades (5) se verificarem.

Campos vectoriais e formas diferenciais

Antes de prosseguir com aspectos mais algorítmicos, vamos relacionar o conceito de equação diferencial exacta com ideias da análise vectorial e da geometria diferencial. Para tal, começamos por rever brevemente noções de campo vectorial e de forma diferencial, que nos permitirão compreender melhor a estrutura das equações.

Um **campo vectorial** em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

que a cada ponto $(x, y, z) \in D$ associa um vector $F(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemplo 2 (Campo gravitacional) O campo gravitacional gerado por uma massa m colocada na origem é definido em $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ pela Lei da Gravitação Universal de Newton:

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{Gmx}{r^3}, -\frac{Gmy}{r^3}, -\frac{Gmz}{r^3} \right),$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{Kg}^2$ é a constante de gravitação. $\square$

Exemplo 3 (Campo vectorial definido por uma equação diferencial) A equação diferencial $y' = f(t, y)$ define, em $\mathbb{R}^2$, o campo vectorial $F(t, y) = (1, f(t, y))$. $\square$

Exemplo 4 (Campo gradiente) O gradiente de uma função escalar $\phi(x, y, z)$ é dado por

$$\nabla\phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right),$$

e define um campo vectorial especial, chamado **campo gradiente**. Dizemos que um campo $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo gradiente se existir uma função diferenciável $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$. Diz-se que ϕ é o **potencial** de F e que F **deriva de um potencial**. Nestas circunstâncias também se diz que F é um campo gradiente ou um **campo conservativo**. $\square$

As equações exactas surgem no estudo de campos de vectores conservativos. Como vimos, o campo de vectores $F(t, y) = (M(t, y), N(t, y))$ é conservativo se existir um potencial ϕ tal que $\nabla\phi(t, y) = F(t, y)$, ou seja, se existir um potencial ϕ tal que (5) se verifica. Podemos, então, dizer que a equação diferencial (4) é exacta se o seu campo vectorial $(M(t, y), N(t, y))$ deriva de um potencial ϕ .

Outra noção importante (que não iremos aprofundar muito neste curso) é a noção de forma diferencial. Uma **1-forma diferencial** (ou, simplesmente, **forma diferencial**) em $\mathbb{R}^2$ é uma expressão do tipo

$$\omega(t, y) = M(t, y) dt + N(t, y) dy, \quad (6)$$

onde M, N são funções suficientemente regulares.

A **forma** ω diz-se **exacta** se é o diferencial de uma função $\phi(t, y)$, isto é, se $\omega = d\phi$. Assim, uma forma diferencial é exacta se existir um potencial ϕ tal que (5) se verifica. Também podemos dizer que uma forma diferencial é exacta quando o campo vectorial correspondente é um campo gradiente.

No contexto das equações exactas, é útil, muitas vezes, escrever a equação (4) na forma

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0. \quad (7)$$

De facto, se atendermos à definição de **diferencial** de uma função diferenciável ϕ ,

$$d\phi(t, y) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(t, y) dt + \frac{\partial\phi}{\partial y}(t, y) dy,$$

é fácil de ver que as igualdades (5) permitem concluir que a equação diferencial (7) é exacta e a sua solução geral é dada pela família de curvas planas (2).

Nota 3 A equivalência entre a equação diferencial (4) e a forma diferencial (7) pode ser evidenciada geometricamente. De facto, se $y(t)$ é uma solução, a curva $(t, y(t))$ no plano (t, y) tem vector tangente $(1, y'(t))$. Para um pequeno incremento dt , temos $dy = y'(t) dt$, pelo que o vector tangente também pode escrever-se como $(dt, dy) = dt(1, y'(t))$, isto é, (dt, dy) e $(1, y')$ são proporcionais. Assim, tanto a equação diferencial como a forma diferencial expressam a ortogonalidade entre o campo $F(t, y) = (M(t, y), N(t, y))$ e o vector tangente da curva solução, dado na equação diferencial por $(1, y'(t))$ e na forma diferencial por (dt, dy) . $\square$

Nota 4 Note-se que uma equação diferencial separável $y' = g(t)/h(y)$ é exacta. De facto, pode ser reescrita como a forma diferencial $h(y) dy = g(t) dt$. Neste caso, a função potencial é dada por $\phi(t, y) = \int h(y) dy - \int g(t) dt$. $\square$

CrITÉrio de exactidão

Pode, agora, colocar-se a seguinte questão: dadas duas funções $M(t, y)$ e $N(t, y)$, existe sempre uma função $\phi(t, y)$ tal que (4) verifica (1)? Por outras palavras, todas as equações diferenciais da forma (4) são exactas? Infelizmente, a resposta a esta questão é quase sempre não.

O teorema seguinte dá-nos um critério para decidir se uma equação é exacta. A sua demonstração também nos dá um algoritmo para calcular a função potencial ϕ e, com isso, determinar a solução geral da equação.

Teorema 1 (Critério de exactidão) *Sejam M e N duas funções de classe $C^1(D)$, com*

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : (t - t_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Então, a equação diferencial (4) se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y). \quad (8)$$

Demonstração: Começemos por assumir que a equação (4) é exacta. Então, existe uma função ϕ tal que as igualdades (5) se verificam. Podemos então concluir, atendendo ao Teorema de Clairaut-Schwarz, que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y}(t, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y),$$

ou seja, que a igualdade (8) se verifica.

Vejam agora se o recíproco também se verifica. Se a igualdade (8) se verificar, vamos ver se conseguimos encontrar uma função ϕ tal que as igualdades (5) se verificam. Considerando uma das igualdades em (5), por exemplo, a primeira, temos

$$\phi(t, y) = \int \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) dt = \int M(t, y) dt + h(y).$$

Para obter o potencial ϕ , temos que determinar a função h . Derivando em relação a y e usando a segunda igualdade em (5), temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt + h'(y) \Leftrightarrow h'(y) = N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt.$$

Notemos que $h'(y)$ não depende de t . Na verdade,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt \right) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 0.$$

Então

$$\phi(t, y) = \int M(t, y) dt + \int \left(N(t, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) dt \right) dy. \quad \square$$

Exemplo 5 *A equação diferencial*

$$\left(\frac{y}{t} + 6t \right) dt + (\ln t - 2) dy = 0$$

é exacta pois

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{1}{t} = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y),$$

mas a equação

$$(e^t \sin y + y^3) dt - (3t - e^t \cos y) dy = 0$$

não é pois

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = e^t \cos y + 3y^2 \neq -3 + e^t \cos y = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y). \quad \square$$

O teorema anterior dá um **método para resolver uma equação diferencial exacta** (4), com M e N duas funções de classe C^1 .

1. Verificar a condição de exactidão (8).
2. Integrar $M(t, y)$ em relação a t , tratando y como constante (ou N em relação a y , tratando t como constante) obtendo

$$\phi(t, y) = \int M(t, y) dt + h(y) \quad \left(\text{ou } \phi(t, y) = \int N(t, y) dy + h(t) \right).$$

3. Impondo $\partial\phi/\partial y(t, y) = N(t, y)$ (ou $\partial\phi/\partial t = M(t, y)$), determinar $h(y)$ (ou $h(t)$) a partir de

$$h'(y) = N(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(t, y) dt \right), \quad \left(\text{ou } h'(t) = M(t, y) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int N(t, y) dy \right) \right),$$

que deve ser função apenas de y (ou apenas de t).

4. A solução da equação é $\phi(t, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exercício 1. Determine a solução geral de:

(a) $\left(\frac{y}{t} + 6t\right) dt + (\ln t + 2) dy = 0$;

(b) $(2t^3 e^{2ty} + t^4 y e^{2ty} + t) dt + (bt^5 e^{2ty}) dy = 0$, com b uma constante a determinar por forma a que equação seja exacta.

Resolução: (a) Pelo exemplo anterior, já vimos que a equação é exacta, pois $\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = t^{-1}$. Vamos, agora, determinar o potencial ϕ de acordo com o algoritmo sugerido na demonstração do teorema anterior. Como a equação é exacta,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t, y) = M(t, y) = \frac{y}{t} + 6t, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(t, y) = N(t, y) = \ln t + 2.$$

Considerando a primeira igualdade, temos que

$$\phi(t, y) = y \ln t + 3t^2 + h(y).$$

Derivando e substituindo na segunda igualdade, obtemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(t, y) = \ln t + h'(y) = \ln t + 2 \quad \Rightarrow \quad h'(y) = 2 \quad \Rightarrow \quad h(y) = 2y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como queremos apenas uma função potencial, podemos considerar $C = 0$. Assim,

$$\phi(t, y) = y \ln t + 3t^2 + 2y$$

e a solução geral da equação é

$$y(t) = \phi(t, y) + C = y \ln t + 3t^2 + 2y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Vamos determinar a constante b por forma a que $\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 4t^4 e^{2ty} + 2t^5 y e^{2ty} + t^4 e^{2ty} = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = 5bt^4 e^{2ty} + 2bt^5 y e^{2ty}.$$

Conclui-se facilmente que $b = 1$. Vamos, agora, determinar o potencial ϕ por forma a que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) = M(t, y) = 2t^3 e^{2ty} + t^4 y e^{2ty} + t, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = N(t, y) = t^5 e^{2ty}.$$

Considerando a segunda igualdade,

$$\phi(t, y) = \int t^5 e^{2ty} dy + h(t) = \frac{t^4}{2} e^{2ty} + h(t).$$

Derivando e substituindo na primeira igualdade, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) = e^{2ty}(2t^3 + t^4 y) + h'(t) \Rightarrow h'(t) = t \Rightarrow h(t) = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como queremos apenas uma função potencial, podemos considerar $C = 0$. Assim,

$$\phi(t, y) = y \ln t + 3t^2 + 2t$$

e a solução geral da equação é

$$y(t) = \phi(t, y) + C = \frac{t^4}{2} e^{2ty} + \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Factor integrante

A equação diferencial $-y dt + t dy = 0$ não é exacta, pois, tomando $M(t, y) = -y$ e $N(t, y) = t$, o critério de exactidão (8) não se verifica. No entanto, esta equação pode ser transformada numa equação exacta multiplicando por $1/t^2$. De facto, temos

$$-\frac{y}{t^2} dt + \frac{1}{t} dy = d\left(\frac{y}{t}\right) = 0,$$

que é exacta, e a sua solução geral é $y/t = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Este exemplo ilustra que é possível resolver equações diferenciais de primeira ordem não exactas pelo método descrito anteriormente, desde que estas possam ser tornadas exactas através da multiplicação por um factor integrante adequado.

Consideremos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que não é exacta

$$M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0.$$

Em certas circunstâncias, podemos tentar encontrar uma função $\mu(t, y)$, chamada **factor integrante**, tal que

$$\mu(t, y)M(t, y) dt + \mu(t, y)N(t, y) dy = 0$$

seja exacta. Para que isso aconteça, atendendo ao critério de exactidão (8),

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)(t, y) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N)(t, y)$$

ou seja

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(t, y)M(t, y) + \mu(t, y)\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, y)N(t, y) + \mu(t, y)\frac{\partial N}{\partial t}(t, y).$$

Rearranjando os termos, temos

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(t, y)M(t, y) - \frac{\partial \mu}{\partial t}(t, y)N(t, y) = \mu(t, y)\frac{\partial N}{\partial t}(t, y) - \mu(t, y)\frac{\partial M}{\partial y}(t, y). \quad (9)$$

A determinação do factor integrante pela resolução da equação (9) não é fácil. Vamos, no entanto, considerar dois casos particulares onde essa determinação é mais simples.

Caso 1: μ depende apenas de t . Neste caso,

$$-\frac{d\mu}{dt}(t)N(t, y) = \mu(t)\frac{\partial N}{\partial t}(t, y) - \mu(t)\frac{\partial M}{\partial y}(t, y)$$

ou seja

$$\frac{d\mu}{dt}(t) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)}{N(t, y)}\mu(t),$$

o que implica, por separação de variáveis,

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)}{N(t, y)} dt}.$$

Caso 2: μ depende apenas de y . Neste caso,

$$\frac{d\mu}{dy}(y)M(t, y) = \mu(y)\frac{\partial N}{\partial t}(t, y) - \mu(y)\frac{\partial M}{\partial y}(t, y).$$

ou seja

$$\frac{d\mu}{dy}(y) = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)}{M(t, y)}\mu(y),$$

o que implica

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)}{M(t, y)} dy}.$$

Nota 5 (Critério para a definição do factor integrante) Para uma equação não exacta $M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0$, um factor integrante depende apenas de t se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = f(t) N(t, y)$$

para alguma função $f(t)$. Analogamente, um factor integrante depende apenas de y se

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = g(y) M(t, y)$$

para alguma função $g(y)$. $\square$

Exercício 2. Determine a solução geral de:

(a) $(3ty + 2) dt + t^2 dy = 0$;

(b) $y^2 + ty y' = 0$.

Resolução: A resolução do exercício é feita em três passos: Passo 1: Verificar a exactidão; Passo 2: Determinar o factor integrante; Passo 3: Obter a solução.

(a) Aqui, $M(t, y) = 3ty + 2$ e $N(t, y) = t^2$

Passo 1: Verificar a exactidão. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 3t \neq \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = 2t,$$

a equação não é exacta.

Passo 2: Determinar o factor integrante. Observamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = 3t - 2t = t \quad \text{e} \quad N(t, y) = t^2$$

dependem apenas de t . Assim, estamos no caso onde $\mu = \mu(t)$, e o factor integrante é dado por $\mu(t) = t$. Multiplicando a equação original por t , obtemos

$$(3t^2y + 2t) dt + t^3 dy = 0,$$

que é exacta.

Passo 3: Obter a solução. Procuramos $\phi(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) = 3t^2y + 2t, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = t^3.$$

Integrando $3t^2y + 2t$ em relação a t

$$\phi(t, y) = yt^3 + t^2 + h(y),$$

e derivando em relação a y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = t^3 + h'(y) = t^3 \quad \Rightarrow \quad h'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a solução geral é

$$yt^3 + t^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Neste caso, $M(t, y) = y^2$ e $N(t, y) = ty$.

Passo 1: Verificar a exactidão. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = y$$

a equação não é exacta.

Passo 2: Determinar o factor integrante. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = 2y - y = y \quad \text{e} \quad M(t, y) = y^2$$

dependem apenas de y , estamos no caso onde $\mu = \mu(y)$, e o factor integrante é dado por $\mu(y) = 1/y$. Multiplicando a equação original por $\mu(y) = 1/y$ obtemos

$$\frac{y^2}{y} dt + \frac{ty}{y} dy = y dt + t dy = 0,$$

que é exacta.

Passo 3: Obter a solução. Procuramos $\phi(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) = y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = t.$$

Integrando a primeira equação em relação a t temos

$$\phi(t, y) = yt + h(y).$$

Derivando em ordem a y obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = t + h'(y) = t \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a solução geral é $yt = C$, $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Exercício 3. Resolva o problema de condição inicial

$$(e^{t+y} + y e^y) dt + (t e^y - 1) dy = 0, \quad y(0) = -1.$$

Resolução: Aqui $M(t, y) = e^{t+y} + y e^y$ e $N(t, y) = t e^y - 1$.

Passo 1: Verificar a exactidão. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{t+y} + (1+y)e^y \neq \frac{\partial N}{\partial t} = e^y,$$

a equação não é exacta.

Passo 2: Determinar o factor integrante. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = e^{t+y} + y e^y \quad \text{e} \quad M(t, y) = e^{t+y} + y e^y$$

dependem apenas de y , estamos no caso onde $\mu = \mu(y)$, e o factor integrante é dado por $\mu(y) = e^{-y}$. Multiplicando a equação original por e^{-y} , obtemos

$$(e^t + y) dt + (t - e^{-y}) dy = 0.$$

que é exacta.

Passo 3: Obter a solução. Procuramos $\phi(t, y)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) = e^t + y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = t - e^{-y}.$$

Integrando a primeira equação em relação a t temos

$$\phi(t, y) = e^t + yt + h(y).$$

Derivando em ordem a y obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) = t + h'(y) = t - e^{-y} \Rightarrow h'(y) = -e^{-y} \Rightarrow h(y) = e^{-y} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a solução geral é

$$e^t + ty + e^{-y} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aplicando a condição inicial $y(0) = -1$, temos $1 + e = C$, e, portanto, a solução que satisfaz a condição inicial é

$$e^t + ty + e^{-y} = 1 + e. \quad \square$$

Exercícios

1. Determine a equação diferencial correspondente à família de curvas indicada:

- (a) $y(t) = c_1 t + 2$;
- (b) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t}$;
- (c) $y(t) = c_1 \sin(\lambda t) + c_2 \cos(\lambda t)$, onde λ é um parâmetro real;
- (d) rectas que passam no ponto $(0, 0)$;
- (e) circunferências que passam na origem e têm centro no eixo das ordenadas;
- (f) circunferências com centro na bissetriz dos quadrantes ímpares e tangentes aos eixos coordenados.

2. Prove que à família de circunferências $(t - c)^2 + y^2 = 25$, corresponde a equação diferencial $(y')^2 = (25 - y^2)/(y^2)$.

3. Resolva as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

- (a) $(t + y) dt + t dy = 0$;
- (b) $(t e^y + y) dy = (2ty - 2t) dt$;
- (c) $\cos t dy = (1 - y - \sin t) dt$;
- (d) $y(t^2 + y^2) dt + t(3t^2 - 5y^2) dy = 0$;
- (e) $(y - t^3) dt + (y^3 + t) dy = 0$;
- (f) $dt + \cos y dy = 0$;
- (g) $(3t^2 + y) dt + (t + 4) dy = 0$;
- (h) $(t + 2y) dt + (2t + 1) dy = 0$;
- (i) $y' = \frac{3t^2 - y}{t - 3y^2}$.

4. Determine f de forma que a seguinte equação diferencial de primeira ordem seja exacta, $y^2 \sin(t) dt + y f(t) dy = 0$.

5. Determine g sabendo que a equação diferencial $g(t) dy + (t + y) dt = 0$ admite $\mu(t) = t$ como factor integrante.

6. Considere o problema de valor inicial

$$y^2 + t - 2tyy' = 0, \quad y(1) = 1.$$

Mostre que a equação diferencial possui um factor integrante na forma $\mu = \mu(t)$ e resolva o problema.

Aula 6: O teorema de Picard-Lindelöf

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1)$$

em que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com I um intervalo real. A solução equação (1), se existir, não é única pois, ao integrarmos, introduzimos sempre uma constante de integração. A forma de contornar este problema consiste em especificar $y(t)$ num ponto qualquer do intervalo I , usualmente o ponto inicial do intervalo t_0 . Ficamos assim com o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}, \quad (2)$$

Ainda assim, nada nos garante que a solução de (2) exista ou, se existir, que seja única.

Exemplo 1 *O problema de Cauchy*

$$|y'| + |y| = 0, \quad y(0) = 1,$$

não tem solução, pois $y(t) = 0$ é a única solução da equação diferencial mas não satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$. Já o problema de Cauchy

$$y' = 2t, \quad y(0) = 1,$$

tem exactamente uma solução $y = t^2 + 1$ definida em $\mathbb{R}$. Outro exemplo interessante é o problema de Cauchy

$$ty' = y - 1, \quad y(0) = 1.$$

Neste caso o problema tem infinitas soluções $y(t) = 1 + Ct$, $C \in \mathbb{R}$. $\square$

O teorema seguinte estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de solução para o problema (2).

Teorema 1 (Picard-Lindelöf) *Seja $I \subset \mathbb{R}$, $D \subset I \times \mathbb{R}$ um conjunto aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0) \in D$, tais que*

1. *f é contínua em D ;*
2. *f é localmente Lipschitziana em relação a y em D , isto é, para cada $(t, y) \in D$ existe uma vizinhança V de (t, y) e uma constante real $L > 0$ tal que, para todo o $(t, y_1), (t, y_2) \in V$*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Então, o problema de Cauchy (2) tem uma única solução $y(t)$ definida e continuamente diferenciável numa vizinhança de t_0 , isto é, definida, pelo menos, para $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, com $\epsilon > 0$.

Antes de demonstrar o teorema, notemos que se $f \in C^1(D)$, então está nas condições do Teorema de Picard-Lindelöf.

Exercício 1. Se $\partial f / \partial y$ é contínua em D (definido no teorema anterior), então f é localmente Lipschitziana em relação a y .

Resolução: Dado $(t, y) \in D$ e V uma vizinhança limitada de (t, y) tal que $\bar{V} \subset D$, temos que: (i) como $\partial f / \partial y$ é contínua, tem um máximo (e um mínimo) no compacto $\bar{V}$ (Teorema de Weierstrass); (ii) pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, para todo o $(t, y_1), (t, y_2) \in \bar{V}$

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |\partial f / \partial y(t, \theta y_1 + (1 - \theta)y_2)| |y_1 - y_2|, \quad \theta \in (0, 1), \\ &\leq \max_{(t, y) \in \bar{V}} |\partial f / \partial y(t, y)| |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

ou seja, f é localmente Lipschitziana em relação a y em V com

$$L = \max_{(t, y) \in \bar{V}} |\partial f / \partial y(t, y)| = \|\partial f / \partial y\|_\infty. \quad \square$$

Considere-se ainda o seguinte resultado.

Exercício 2. Prove que y é solução de (2) se e só se y é solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (3)$$

Resolução: A equivalência é válida porque a continuidade da função f permite a integração da equação diferencial (2) por forma a obter a equação integral (3) e, inversamente, o Teorema Fundamental do Cálculo permite diferenciar a equação integral para recuperar a equação diferencial. $\square$

Note-se que a solução de (3), se existir, pertence a $C^1(I)$. De facto, se y é contínua, como f é contínua $f(t, y(t))$ também é contínua. Logo, $y'(t) = f(t, y(t))$ é contínua e $\int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ tem derivada contínua.

Vamos agora demonstrar o Teorema de Picard-Lindelöf.

Existência de solução. A demonstração que iremos considerar é uma demonstração construtiva. Vamos construir uma sucessão de funções $\{y_n\}_n$ que iremos provar que converge para uma função y que é solução do problema de Cauchy (2).

Considere-se a a sucessão (chamada **sucessão de Picard**)

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0, \quad \forall t \in I, \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds, \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Prova-se (no final) que $\{y_n\}_n$ converge uniformemente em $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, para um certo $\epsilon > 0$ que depende das características de f (na verdade, que depende da constante de Lipschitz, L , de f).

Seja

$$y(t) = \lim_n y_n(t).$$

Então, y é contínua (porque $\{y_n\}_n$ é uniformemente convergente). Por outro lado, como $(t, y_n(t))$ está numa vizinhança de (t_0, y_0) , $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, então f é Lipschitziana em relação a y nessa vizinhança. Podemos, assim, concluir que a convergência

$$f(t, y(t)) = \lim_n f(t, y_n(t))$$

também é uniforme em $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ e, como tal, podemos trocar o limite com o integral. Temos então,

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_n y_n(t) = \lim_n \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) \, ds \right) \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t \lim_n f(s, y_{n-1}(s)) \, ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds, \end{aligned}$$

ou seja, y é solução de (3), o que é equivalente a dizer que y é solução de (2). $\square$

Unicidade de solução. A demonstração da unicidade faz-se por redução ao absurdo, utilizando o Lema de Grönwall (estabelecido pelo matemático sueco Thomas Hakon Grönwall (1877–1932)) para mostrar que duas soluções coincidem necessariamente.

Lema 2 (Grönwall) *Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $u, \alpha : I \rightarrow [0, +\infty)$ duas funções contínuas. Se, para algumas constantes $L > 0$ e $K \geq 0$, se tem*

$$u(t) \leq K + L \left| \int_{t_0}^t \alpha(s) u(s) \, ds \right|, \quad \forall t \in I, \quad (4)$$

então,

$$u(t) \leq K e^{L \left| \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds \right|}, \quad \forall t \in I.$$

Demonstração: Vamos considerar apenas o caso em que $t \geq t_0$. O caso em que $t < t_0$ pode demonstrar-se de forma similar. De (4) temos que

$$\frac{L\alpha(t)u(t)}{K + L \int_{t_0}^t \alpha(s)u(s) \, ds} \leq L\alpha(t).$$

Integrando de t_0 a t , temos

$$\ln \left(K + L \int_{t_0}^t \alpha(s)u(s) \, ds \right) - \ln(K) \leq L \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds,$$

ou seja

$$K + L \int_{t_0}^t \alpha(s)u(s) \, ds \leq K e^{L \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds},$$

o que implica, por (4),

$$u(t) \leq K e^{L \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds}. \quad \square$$

Para provar a unicidade por redução ao absurdo, consideremos y e $\bar{y}$ duas soluções do problema de Cauchy (2) (ou, o que é equivalente, de (3)). Então,

$$\begin{aligned} |y(t) - \bar{y}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, \bar{y}(s)) \, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, \bar{y}(s))| \, ds \leq L \int_{t_0}^t |y(s) - \bar{y}(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Grönwall a

$$u(t) = |y(t) - \bar{y}(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y(s) - \bar{y}(s)| \, ds,$$

temos $K = 0$ e, como tal, $u(t) \leq 0$. Mas, como $u(t) \geq 0$, concluímos que $u(t) = 0$, ou seja, que $y(t) = \bar{y}(t)$ para qualquer t suficientemente próximo de t_0 (na vizinhança onde f é Lipschitziana). Está assim provada a unicidade. $\square$

Para concluir a prova do Teorema de Picard-Lindelöf, falta provar a convergência uniforme da sucessão de Picard. É o que vamos fazer de seguida.

Convergência uniforme da sucessão de Picard. Seja $\delta > 0$ e $L > 0$ tais que

$$\bar{V} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D$$

e, para todo o $(t, y_1), (t, y_2) \in \bar{V}$,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existe

$$M = \max_{(t,y) \in \bar{V}} |f(t, y)|.$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \delta$, $\epsilon M < \delta$, $\epsilon L < 1$, isto é, $\epsilon < \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{L} \right\}$. Podem demonstrar-se os seguintes resultados.

1. $|y_n(t) - y_0| < \delta$, para todo o $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$.

A demonstração é feita por indução. A desigualdade verifica-se para $y_0(t) = y_0$. Supondo que é verdadeira para $y_{n-1}(t)$ tem-se que $y_{n-1}(t) \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ e então

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) \, ds \right| \leq |t_0 - t| M \leq \epsilon M < \delta. \quad \square$$

2. A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)), \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon],$$

é uniformemente convergente.

Tem-se que

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s)) \, ds \right| \\ &\leq L|t - t_0| \max_{t \in I} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|. \end{aligned}$$

Então

$$\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq L\epsilon \max_{t \in I} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|$$

e, por indução (prove),

$$\max_{t \in I} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq (L\epsilon)^n \max_{t \in I} |y_1(t) - y_0|.$$

Como $L\epsilon < 1$, pelo Critério de Weierstrass, conclui-se que a série converge uniformemente. $\square$

Assim sendo, o seguinte limite existe e a sua convergência é uniforme

$$\lim_n (y_n(t) - y_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)),$$

o que implica

$$\lim_n y_n(t) = y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n+1}(t) - y_n(t)) = y(t). \quad \square$$

Exercícios

1. Seja φ uma solução da equação diferencial $y' = f(t, y)$, que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0) = y_0$. O **intervalo de existência** de φ é o maior intervalo contendo t_0 onde φ é contínua e diferenciável. Dizemos que φ tem uma **singularidade** em s quando φ não está definida ou é descontínua no ponto $t = s$.

Considere a equação diferencial $y' = y^2$.

- (a) Encontre uma solução que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$ e determine o seu intervalo de existência.
- (b) Encontre uma solução que satisfaça a condição inicial $y(0) = -2$ e determine o seu intervalo de existência.
- (c) Encontre uma solução que satisfaça a condição inicial $y(0) = 0$ e determine o seu intervalo de existência.
- (d) Encontre uma condição inicial em $t = 0$ para a qual a correspondente solução tenha uma singularidade em $t = 1/10$.
- (e) Seja y_0 uma constante positiva. Encontre uma solução que satisfaça a condição inicial $y(0) = y_0$ e determine o seu intervalo de existência.
- (f) Seja y_0 uma constante positiva. Encontre uma solução que satisfaça a condição inicial $y(0) = -y_0$ e determine o seu intervalo de existência.
- (g) Mostre que y_0 pode ser escolhido de forma a que a condição inicial $y(0) = y_0$ dê origem a uma solução com uma singularidade em $t = s$, onde s é um número real positivo arbitrário.

2. Seja $y' = y^2$. Mostre que as hipóteses do Teorema de Picard-Lindelöf são verificadas para a condição inicial $y(0) = 1$ e que a solução é única mesmo tendo uma singularidade.
3. Para cada um dos seguintes problemas de condição inicial, verifique se as condições do Teorema de Picard-Lindelöf se verificam e se é possível garantir a existência de uma única solução:

$$(a) \ y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1; \quad (b) \ y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

4. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, determine o conjunto de condições iniciais para as quais o Teorema de Picard-Lindelöf garante uma única solução:

$$(a) \ y' = \frac{t}{y}; \quad (b) \ y' = \cos t + y^3 - y.$$

5. Resova, recorrendo ao **método iterativo de Picard**, cada um dos problemas de condição inicial seguintes:

$$(a) \ \begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (b) \ \begin{cases} y'(t) = 1 + (y(t))^2, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

6. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

onde $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em t e localmente Lipschitziana em y com constante $L > 0$. Seja $y(t)$ a solução correspondente a y_0 e $z(t)$ a solução correspondente à condição inicial perturbada $z(t_0) = z_0$. Mostre, usando o Lema de Gronwall, que

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, T],$$

ou seja, que **a solução depende continuamente da condição inicial**.

Nota: A constante e^{Lt} indica que pequenas perturbações na condição inicial provocam variações controladas na solução. Este resultado garante a **estabilidade** da solução relativamente a pequenas alterações em y_0 .

7. Considere a equação diferencial $ty' + y = t^4 \ln(t)$.
 - (a) Classifique a equação e determine a solução geral da equação de forma explícita.
 - (b) Justifique que a equação tem uma única solução passando pelo ponto $(1, 1/5)$. Determine ainda o intervalo máximo de existência da solução encontrada.
8. Considere a equação diferencial $y' - \sin ty = e^{-\cos t}$.
 - (a) Classifique a equação e determine a solução geral da equação de forma explícita.
 - (b) Justifique que a equação tem uma única solução passando pelo ponto $(\pi/2, \pi)$. Determine ainda o intervalo máximo de existência da solução encontrada.
9. Considere o problema de valor inicial

$$2e^t y + (e^t - y e^{-t}) y' = 0, \quad y(1) = 1/2.$$

Mostre que a equação diferencial possui um factor integrante da forma $\mu = \mu(t)$ e resolva o problema, indicando o intervalo máximo de existência de solução.

Aula 7: Equações diferenciais lineares de segunda ordem

As equações diferenciais lineares de segunda ordem aparecem de forma natural em inúmeros contextos, desde a física – para descrever movimentos oscilatórios e vibrações mecânicas – até à engenharia, em circuitos elétricos ou sistemas de controlo, e à matemática aplicada. O estudo sistemático destas equações é essencial para modelar fenómenos do mundo real, permitindo compreender como os sistemas físicos se comportam quando sujeitos a forças, incluindo a sua estabilidade, a tendência para oscilar, o efeito do amortecimento e a resposta a perturbações externas.

Um exemplo clássico é o oscilador harmónico simples, constituído por uma massa presa a uma mola. Pela Segunda Lei de Newton, a força resultante é proporcional à aceleração:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Segundo a Lei de Hooke, a força restauradora da mola é proporcional ao deslocamento x em relação à posição de equilíbrio, isto é, $F = -kx$, onde $k > 0$ é a constante elástica. Substituindo na Segunda Lei de Newton, obtemos

$$mx'' + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + \frac{k}{m}x = 0,$$

uma equação linear homogénea de segunda ordem que descreve o movimento oscilatório da massa. A solução desta equação é periódica e é dada, como veremos, por

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{k/m},$$

com A e B determinadas pelas condições iniciais.

Se introduzirmos resistência ao movimento, proporcional à velocidade, a equação torna-se

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + \frac{\gamma}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0,$$

com $\gamma > 0$. Esta equação continua linear, mas agora com um termo proporcional à velocidade, descrevendo um oscilador amortecido, de grande relevância em engenharia e em sistemas mecânicos reais.

Outro exemplo é a queda de um corpo sob a ação da gravidade, considerando a resistência do ar proporcional à velocidade. A equação do movimento é

$$my'' = mg - \gamma y',$$

onde g é a aceleração da gravidade e γ o coeficiente de atrito viscoso. Dividindo por m , obtém-se

$$y'' + \frac{\gamma}{m}y' = g,$$

uma equação linear de segunda ordem não homogénea. Esta formulação permite calcular a velocidade terminal, a posição ao longo do tempo e compreender a dinâmica do corpo em queda.

O pêndulo simples é outro sistema que pode ser modelado por uma equação diferencial de segunda ordem. Para um pêndulo de massa m e comprimento L , a força da gravidade provoca um *torque* (ou momento de força), que é a tendência da força para fazer o corpo rodar em torno do ponto de suspensão. Se a força é aplicada a uma distância L do eixo de rotação, o torque é proporcional a essa distância e à força: $\tau = -mgL \sin \theta$, onde $\theta(t)$

é o ângulo de deslocamento. Pela Segunda Lei de Newton para rotações, $I\theta'' = \tau$, com $I = mL^2$ a inércia do pêndulo relativamente ao ponto de suspensão. Assim obtemos

$$mL^2\theta'' + mgL \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

Embora esta equação seja não linear, para pequenos ângulos ($\theta \approx 0$) podemos aproximar $\sin \theta \approx \theta$ (porquê?), obtendo uma equação linear homogênea de segunda ordem

$$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0,$$

cujas soluções descrevem oscilações periódicas do pêndulo.

Estes exemplos mostram que equações lineares de segunda ordem surgem de forma natural quando a aceleração depende linearmente da posição e, possivelmente, da velocidade. Estudá-las fornece uma base sólida para analisar sistemas oscilatórios, determinar respostas a forças externas, compreender amortecimento e ressonância, e modelar fenômenos físicos em mecânica, engenharia, física aplicada e ciências naturais.

Definição e resultados básicos

Consideremos a **equação diferencial linear de segunda ordem**

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

com p, q, f contínuas em I . Assumimos que o coeficiente do termo y'' é 1 (equação normalizada), o que simplifica a análise e é suficiente para a maioria das aplicações práticas.

Chamamos à equação (1) **equação homogênea** se $f(t) \equiv 0$ e **não homogênea** (ou caso **completa**) contrário.

Nota 1 Se y representa a posição de uma massa sujeita a forças dependentes da posição, velocidade e tempo, então y'' corresponde à aceleração, $p(t)y'$ a forças de atrito ou amortecimento, $q(t)y$ a forças restauradoras (como a de uma mola) e $f(t)$ a forças externas aplicadas. $\square$

O teorema seguinte garante que, dadas condições iniciais apropriadas, uma equação diferencial linear de segunda ordem tem uma única solução. Esta garantia é fundamental para modelar sistemas físicos de forma confiável.

Teorema 1 (Existência e unicidade) Se p, q, f são contínuas em um intervalo I contendo t_0 , então para quaisquer condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = v_0,$$

existe uma única solução $y(t)$ de (1) definida em todo o intervalo I .

Demonstração: Convertendo a equação diferencial ordinária de ordem (1) num sistema de primeira ordem temos

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -p(t)y_2 - q(t)y_1 + f(t), \end{cases}$$

onde $y_1 = y$ e $y_2 = y'$. Aplicando o Teorema de Picard-Lindelöf para sistemas de equações, a existência e unicidade da solução seguem imediatamente. $\square$

Nota 2 (Implicações práticas) Do teorema anterior podemos concluir as seguintes implicações práticas:

1. duas soluções de (1) que verificam as mesmas condições iniciais são iguais;
2. se $f \equiv 0$ e as condições iniciais forem $y(t_0) = y_0 = 0$ e $y'(t_0) = v_0 = 0$, então a condição do problema de condição inicial é $y(t) \equiv 0$. $\square$

Antes de abordarmos a resolução de equações diferenciais de segunda ordem, vamos começar por dois casos em que o problema pode ser simplificado para uma equação de primeira ordem.

Caso 1: y não está presente na equação. Consideremos a equação

$$ty'' - y' = t^2.$$

Fazendo a mudança de variável $y' = v$ obtemos $tv' - v = t^2$, que é uma equação de primeira ordem em v que pode ser resolvida pelas técnicas estudadas em aulas anteriores.

Caso 2: t não está presente na equação. Consideremos a equação

$$y'' + y(y')^3 = 0.$$

Fazendo $y' = v$ temos $y'' = v'y' = v'v$. Substituindo, obtemos

$$v'v + yv^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dy} + yv^3 = 0,$$

que é uma equação de primeira ordem (onde o t é aqui o y) que pode ser resolvida pelas técnicas estudadas em aulas anteriores. Resolva!

Operador diferencial linear de segunda ordem

Começamos a nossa análise da equação (1) com a observação importante de que o primeiro membro da equação diferencial pode ser interpretado como definindo uma "função de uma função": a cada função y , que possui duas derivadas, associamos outra função, que designaremos por $L[y]$, através da relação

$$L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t). \quad (2)$$

Em terminologia matemática, L é um **operador** que atua sobre funções; isto é, existe uma regra prescrita que associa a cada função y uma nova função $L[y]$.

Exemplo 1 Seja $p(t) = 0$ e $q(t) = t$. Então,

$$L[y](t) = y''(t) + t y(t).$$

Se $y(t) = \cos t$, então

$$L[y](t) = (\cos t)'' + t \cos t = (t - 1) \cos t,$$

e se $y(t) = t^3$, então

$$L[y](t) = (t^3)'' + t(t^3) = t^4 + 6t.$$

Assim, o operador L associa a função $(t - 1) \cos t$ à função $\cos t$, e a função $6t + t^4$ à função t^3 . $\square$

Nota 3 De forma um pouco mais formal, dada a equação diferencial linear de segunda ordem (1), o operador diferencial linear de ordem 2 associado a esta equação, designado por L , é definido por

$$\begin{aligned} L : C^2(I) &\longrightarrow C(I), \\ y &\longmapsto L[y] : I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto L[y](t) := y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t), \end{aligned}$$

onde $C^2(I)$ designa o espaço vetorial constituído pela totalidade das funções com derivadas contínuas em I até à ordem 2 (inclusive), e $C(I) \equiv C^0(I)$ o espaço vetorial das funções contínuas em I , ambos espaços vetoriais de dimensão infinita.

Também se escreve

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + p(t)\frac{d}{dt} + q(t) \quad \text{ou} \quad L = D^2 + p(t)D + q(t),$$

onde D^k designa o operador derivada de ordem k ($k = 0, 1, \dots$), isto é, o operador que associa a cada função $g \in C^k(I)$ a sua derivada de ordem k : $D^k[g](t) = g^{(k)}(t)$.

Usando o operador L , a equação diferencial (1) pode ser representada nas seguintes notações alternativas $L[y](t) = f(t)$ ou, simplesmente, $L[y] = f(t)$. $\square$

O conceito de um operador que atua sobre funções, ou de uma “função de uma função”, é análogo ao de uma função de uma única variável t . Recorde-se a definição de uma função f num intervalo I : a cada número $t \in I$ associamos um novo número, designado por $f(t)$. De forma exatamente análoga, associamos a cada função y que possui duas derivadas uma nova função, designada por $L[y]$.

Este é um conceito matemático extremamente sofisticado, pois, em certo sentido, estamos a tratar uma função da mesma forma que tratamos um ponto. É, sem dúvida, uma ideia difícil de apreender. Não é surpreendente, portanto, que o conceito de operador só tenha sido desenvolvido no início do século passado, e que muitos dos teoremas mais avançados da análise matemática só tenham sido demonstrados depois de este conceito ter sido dominado.

A seguir, deduziremos várias propriedades importantes do operador L , que utilizaremos em breve com grande vantagem.

Nota 4 (Linearidade do operador) Note-se que o operador L é **linear**. Isto é, para quaisquer funções y_1, y_2 suficientemente diferenciáveis e constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]. \quad (3)$$

De facto, aplicando a definição de L temos

$$\begin{aligned} L[\alpha y_1 + \beta y_2] &= (D^2 + pD + q)(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha(D^2 + pD + q)y_1 + \beta(D^2 + pD + q)y_2 \\ &= \alpha L[y_1] + \beta L[y_2], \end{aligned}$$

o que permite concluir o pretendido. $\square$

Exemplo 2 Consideremos $L[y] = y' + 2 \sin t y$. Então

$$L[5 \cos t + 2t^2] = 5L[\cos t] + 2L[t^2] = 5(-\sin t + 2 \sin t \cos t) + 2(2t + \sin t t^2). \quad \square$$

Como resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem? Vamos começar por considerar as equações diferenciais lineares homogéneas.

Equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas

Consideremos a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (4)$$

com p, q contínuas em I . Esta equação também se pode escrever na forma

$$L[y] = 0, \quad (5)$$

com $L[y]$ dado por (2). Denotemos o conjunto de todas as soluções da equação diferencial linear homogênea (4) por

$$\mathcal{S}_0(I) = \{y : L[y](t) = 0, t \in I\}.$$

A linearidade do operador L permite que combinações lineares de soluções sejam também soluções da equação diferencial. Isto é essencial para construir a solução geral da equação homogênea e facilita o estudo das equações não homogêneas.

Teorema 2 (Espaço vectorial das soluções) *O conjunto das soluções de uma equação linear homogênea de segunda ordem é um espaço vectorial de dimensão 2.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathcal{S}_0(I)$ é um espaço vetorial de dimensão 2, é suficiente demonstrar que $\mathcal{S}_0(I)$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $C^2(I)$ e que $\dim \mathcal{S}_0(I) = 2$.

Com efeito, é claro que $\mathcal{S}_0(I) \subset C^2(I)$ e que $\mathcal{S}_0(I) \neq \emptyset$, pois a equação (4) tem sempre a solução trivial. Além disso, sendo $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2] = 0,$$

uma vez que L é linear e $L[y_1] = L[y_2] = 0$. Isto mostra que também $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{S}_0(I)$. Portanto, $\mathcal{S}_0(I)$ é um espaço vetorial.

Para provar que tem dimensão dois, considere-se a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_0(I) &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ y &\longmapsto \Phi(y) = (y(t_0), y'(t_0)), \end{aligned}$$

onde t_0 é um ponto de I escolhido arbitrariamente.

A aplicação Φ é claramente linear, pois para quaisquer $y_1, y_2 \in \mathcal{S}_0(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $k \in \{0, 1, 2\}$, tem-se $(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(k)}(t_0) = \alpha y_1^{(k)}(t_0) + \beta y_2^{(k)}(t_0)$. Além disso, o Teorema 1 (de existência e unicidade de solução) assegura que Φ é bijectiva. Por conseguinte, Φ é um isomorfismo entre os espaços vectoriais $\mathcal{S}_0(I)$ e $\mathbb{R}^2$. Como sabemos que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, concluímos que também $\dim \mathcal{S}_0(I) = 2$. $\square$

Nota 5 *O facto importante que resulta do teorema precedente é que, se por algum processo for possível determinar duas soluções linearmente independentes da equação homogênea (4) digamos, y_1, y_2 , então qualquer outra solução y da mesma equação pode escrever-se como uma combinação linear dessas duas soluções, isto é, existem números reais α, β tais que $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.* $\square$

Sistema fundamental de soluções e Wronskiano

Do exposto decorre que é importante dispor de critérios que permitam analisar, de forma mais eficiente do que por recurso à definição, em que condições é que um conjunto de 2 soluções da equação (4) constitui um conjunto linearmente independente. Vamos, agora, estabelecer um critério possível com base na noção de Wronskiano.

Definição 1 (Sistema fundamental de soluções) *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação homogênea (4). Diz-se que $\{y_1, y_2\}$ é um **sistema fundamental de soluções** se y_1 e y_2 forem linearmente independentes no intervalo I .*

Se $\{y_1, y_2\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênea (4), pelo teorema anterior, a **solução geral** da equação é dada por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

A independência linear de duas funções é verificada através do Wronskiano.

Definição 2 (Wronskiano) *Sejam $y_1, y_2 \in C^1(I)$. Define-se o **Wronskiano** das funções y_1 e y_2 por*

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t). \quad (7)$$

Teorema 3 (Independência linear e Wronskiano) *As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. y_1 e y_2 são soluções de (4) linearmente independentes em I ;
2. existe $t_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$;
3. $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Demonstração:

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$. Se existissem constantes α, β , não simultaneamente nulas, tais que

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

então, derivando e considerando $t = t_0$ obteríamos o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Como a matriz tem determinante $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, o único vetor solução é $\alpha = \beta = 0$. Logo y_1, y_2 são linearmente independentes.

(1)⇒(3) Suponhamos que y_1, y_2 são linearmente independentes em I . Se existisse $t_0 \in I$ com $W[y_1, y_2](t_0) = 0$, então as colunas da matriz do sistema (8) seriam linearmente dependentes, o que implicaria a existência de constantes não todas nulas α, β tais que

$$\alpha y_1^{(k)}(t_0) + \beta y_2^{(k)}(t_0) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Mas, pela unicidade de solução do problema de Cauchy, a combinação linear $\alpha y_1 + \beta y_2$ seria identicamente zero em I , contradizendo a independência linear. Logo $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

(3)⇒(2) Trivial. $\square$

Exemplo 3 (Seno e cosseno) Sejam $y_1(t) = \sin t$ e $y_2(t) = \cos t$. O Wronskiano é

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = (\sin t)(-\sin t) - (\cos t)(\cos t) = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1 \neq 0.$$

Portanto, $\sin t$ e $\cos t$ são linearmente independentes. Como $y_1(t) = \sin t$ e $y_2(t) = \cos t$ são duas soluções de $y'' + y = 0$, por serem linearmente independentes constituem um sistema fundamental da equação. Então, a solução geral da equação diferencial é dada por $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 4 (Funções e^t e e^{-t}) Sejam $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$. O Wronskiano é

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Portanto, e^t e e^{-t} são linearmente independentes. Como $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são duas soluções de $y'' - y = 0$, por serem linearmente independentes constituem um sistema fundamental da equação. Então, a solução geral da equação diferencial é dada por $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 5 (Funções e^t e te^t) Sejam $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = te^t$. O Wronskiano é

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^t(e^t + te^t) - te^t e^t = e^{2t} + te^{2t} - te^{2t} = e^{2t} \neq 0.$$

Portanto, e^t e te^t são linearmente independentes. Como $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = te^t$ são duas soluções de $y'' - 2y' + y = 0$, por serem linearmente independentes constituem um sistema fundamental da equação. Então, a solução geral da equação diferencial é dada por $y(t) = C_1 e^t + C_2 te^t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 6 (Funções t e te^t) Sejam $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = te^t$. O Wronskiano é

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} t & te^t \\ 1 & e^t + te^t \end{vmatrix} = t(e^t + te^t) - te^t = te^t + t^2 e^t - te^t = t^2 e^t \neq 0 \text{ para } t \neq 0.$$

Portanto, t e te^t são linearmente independentes. Como $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = te^t$ são duas soluções de $t^2 y'' - (t^2 + 2t)y' + (t+2)y = 0$, por serem linearmente independentes constituem um sistema fundamental da equação. Então, a solução geral da equação diferencial é dada por $y(t) = C_1 t + C_2 te^t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 7 (Funções linearmente dependentes) Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t) = \alpha y_1(t)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. O Wronskiano é

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & cy_1(t) \\ y_1'(t) & cy_1'(t) \end{vmatrix} = \alpha(y_1(t)y_1'(t) - y_1'(t)y_1(t)) = 0.$$

Portanto, y_1 e $y_2 = \alpha y_1$ são linearmente dependentes. $\square$

O teorema seguinte fornece uma fórmula para o Wronskiano de duas soluções de uma equação diferencial linear homogênea. É uma ferramenta poderosa para estudar independência linear sem calcular diretamente as soluções.

Teorema 4 (Identidade de Abel–Jacobi–Liouville) Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação homogênea (4), o seu Wronskiano satisfaz

$$W'(t) + p(t)W(t) = 0, \quad t \in I. \quad (9)$$

Em particular, é válida a Identidade de Abel–Jacobi–Liouville

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds}, \quad \forall t, t_0 \in I. \quad (10)$$

Demonstração: Diferenciando $W(t)$

$$W'(t) = y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) - y_1'(t)y_2'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t).$$

Como y_1 e y_2 satisfazem a equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, temos

$$y_1''(t) = -p(t)y_1'(t) - q(t)y_1(t), \quad y_2''(t) = -p(t)y_2'(t) - q(t)y_2(t).$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_1(t)(-p(t)y_2'(t) - q(t)y_2(t)) - (-p(t)y_1'(t) - q(t)y_1(t))y_2(t) \\ &= -p(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)) = -p(t)W(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$W'(t) + p(t)W(t) = 0.$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem para $W(t)$, cuja solução é

$$W(t) = C e^{-\int p(t) dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Em particular, considerando $t_0 \in I$, também se conclui que (10). $\square$

Algumas consequências importantes dos teoremas anteriores.

- **Hipóteses essenciais.** A hipótese de continuidade de p, q em I assegura existência e unicidade local do problema de Cauchy e permite a derivação formal que conduz à Identidade de Abel–Jacobi–Liouville. Sem a hipótese de que y_1, y_2 são soluções da mesma equação diferencial linear, a implicação “ $W \equiv 0 \Rightarrow$ dependência linear” deixa de ser válida (ver exemplo mais abaixo).

- **Uso prático.** Para verificar se duas soluções formam um sistema fundamental basta avaliar o Wronskiano num ponto t_0 . Se $W(t_0) \neq 0$, as soluções são independentes em todo o intervalo I . O Wronskiano (10) fornece uma ferramenta prática para verificar a independência linear sem necessidade de calcular derivadas adicionais.
- **Significado da Identidade de Abel–Jacobi–Liouville.** A identidade (10) mostra que o comportamento do Wronskiano é controlado apenas pelo coeficiente $p(t)$ (o coeficiente de y'). Em particular, se $p \equiv 0$ então o Wronskiano é constante.
- **Constante multiplicativa.** Note que W pode ser nulo ou não nulo em todo o intervalo; não existe “troca de sinal” através de zeros porque, se anular em algum ponto, a Identidade de Abel–Jacobi–Liouville força $W \equiv 0$.

Nota 6 (Wronskiano nulo mas funções linearmente independentes) *Note-se que o facto do Wronskiano ser identicamente zero entre funções quaisquer não implica sempre dependência linear. Isso só se pode concluir isso quando se sabe que as funções são soluções da mesma equação diferencial linear com coeficientes contínuos.*

Consideremos as funções definidas em $t \in \mathbb{R}$

$$y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t|t|.$$

As funções são contínuas, mas $y_2(t)$ não é derivável em $t = 0$. O Wronskiano é dado por

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Para $t \neq 0$, temos $y_1'(t) = 2t$ e

$$y_2'(t) = \begin{cases} 2t, & t > 0, \\ -2t, & t < 0, \end{cases}$$

o que implica

$$W[y_1, y_2](t) = t^2 y_2'(t) - 2t y_2(t) = 0.$$

Apesar de o Wronskiano se anular para $t \neq 0$, as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes, pois não existe constante α tal que $y_2(t) = \alpha y_1(t)$ para todos os t . Para $t > 0$, $y_2(t) = y_1(t)$, enquanto para $t < 0$, $y_2(t) = -y_1(t)$, mostrando que a constante que relaciona as duas funções muda de sinal.

A interpretação geométrica é que o Wronskiano calcula a “área” entre os vectores (y_1, y_1') e (y_2, y_2') . Fora de $t = 0$, os vectores são colineares (área zero), mas a mudança de sinal impede a dependência linear global. $\square$

Determinação de uma solução sabendo a outra via Wronskiano

Considere a equação homogénea de segunda ordem (4). Suponha que conhecemos uma solução não nula $y_1(t)$. Queremos encontrar uma segunda solução $y_2(t)$ linearmente independente.

Por definição, o Wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Por outro lado, pela Identidade de Abel–Jacobi–Louville,

$$W[y_1, y_2](t) = W(t) = C e^{-\int p(t) dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Então, igualando as duas expressões para o Wronskiano (podemos fixar a constante como sendo, por exemplo, $C = 1$) obtemos

$$y_2'(t) = \frac{W(t) + y_1'(t)y_2(t)}{y_1(t)}, \quad (12)$$

que é uma equação linear de primeira ordem em y_2 e que podemos resolver como foi visto nas aulas anteriores. Fica ao cuidado do aluno mostrar que, usando o método do factor integrante, se pode concluir que

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{W(t)}{y_1^2(t)} dt = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{y_1^2(t)} dt.$$

Podemos obter uma expressão para o y_2 , de forma alternativa, se considerarmos o chamado **método de redução de ordem de D'Alembert**. Este método consiste em considerar a $y_2(t) = v(t)y_1(t)$, onde v é uma função desconhecida a determinar. Assim sendo,

$$y_2'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

e, substituindo na definição de Wronskiano

$$W(t) = y_1(t)(v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)) - y_1'(t)(v(t)y_1(t)) = y_1^2(t)v'(t).$$

Portanto,

$$v'(t) = \frac{W(t)}{y_1^2(t)},$$

o que implica

$$v(t) = \int \frac{W(t)}{y_1^2(t)} dt.$$

Finalmente, a segunda solução $y_2(t)$ linearmente independente é dada por

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{W(t)}{y_1^2(t)} dt = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{y_1^2(t)} dt. \quad \square \quad (13)$$

Exemplo 8 Consideremos a equação $y'' - y = 0$, da qual se conhece uma solução $y_1(t) = e^t$. Aqui $p(t) = 0$ e então $W(t) = 1$. Assim

$$y_2(t) = e^t \int \frac{1}{e^{2t}} dt = e^t \int e^{-2t} dt = e^t \left(-\frac{1}{2} e^{-2t} \right) = -\frac{1}{2} e^{-t}.$$

Então, $y_2(t) = e^{-t}$ é linearmente independente de $y_1(t) = e^t$ e, como tal, $\{e^t, e^{-t}\}$ constitui um sistema fundamental de soluções da equação diferencial. $\square$

Exemplo 9 Consideremos a equação $x^2 y'' - xy' + y = 0$, $x > 0$, da qual se conhece uma solução $y_1(x) = x$. Aqui $p(x) = -\frac{1}{x}$ e então $W(x) = e^{\ln x} = x$. Assim

$$y_2(x) = x \int \frac{x}{x^2} dx = x \int \frac{1}{x} dx = x \ln x.$$

Então, $y_2(x) = x \ln x$ é linearmente independente de $y_1(x) = x$ e, como tal, $\{x, x \ln x\}$ constitui um sistema fundamental de soluções da equação diferencial. $\square$

Exemplo 10 Consideremos a equação $y'' + y = 0$ da qual se conhece uma solução $y_1(t) = \sin t$. Aqui $p(t) = 0$ e então $W(t) = 1$. Assim

$$y_2(t) = \sin t \int \frac{1}{\sin^2 t} dt = \sin t \int \csc^2 t dt = \sin t(-\cot t) = \cos t.$$

Então, $y_2(t) = \cos t$ é linearmente independente de $y_1(x) = \sin t$ e, como tal, $\{\sin t, \cos t\}$ constitui um sistema fundamental de soluções da equação diferencial. $\square$

Exercício 1. Considere-se a equação de Legendre

$$(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0, \quad t \in (-1, 1),$$

e suponha que já conhecemos uma solução $y_1(t) = t$. Determine uma segunda solução $y_2(t)$ de forma a que $\{y_1, y_2\}$ seja um sistema fundamental de soluções da equação.

Resolução: Dividindo a equação por $1 - t^2$

$$y'' - \frac{2t}{1 - t^2}y' + \frac{2}{1 - t^2}y = 0,$$

temos que $p(t) = -2t/(1 - t^2)$. Então, o Wronskiano é dado por

$$W(t) = C e^{-\int p(t) dt} = C e^{\int 2t/(1-t^2) dt} = C e^{-\ln|1-t^2|}$$

Considerando $C = 1$, temos que

$$W(t) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

Como sabemos, a segunda solução da equação diferencial pode ser dada em termos do Wronskiano na forma

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{W(t)}{y_1^2(t)} dt = t \int \frac{1/(1 - t^2)}{t^2} dt = t \int \frac{1}{t^2(1 - t^2)} dt.$$

Atendendo à decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{t^2(1 - t^2)} = \frac{1}{t^2(1 - t)(1 + t)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right),$$

temos que

$$y_2(t) = t \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) \right) dt.$$

Integrando termo a termo (e considerando as constantes de integração iguais a zero)

$$\int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t}, \quad \int \frac{1}{1 - t} dt = -\ln|1 - t|, \quad \int \frac{1}{1 + t} dt = \ln|1 + t|.$$

Portanto

$$y_2(t) = t \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}(-\ln|1 - t| + \ln|1 + t|) \right) = -1 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right|.$$

Então que um sistema fundamental de soluções da equação de Legendre é

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = -1 + \frac{t}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}, \quad t \in (-1, 1). \quad \square$$

Exercício 2. Considere-se a equação de Legendre

$$(1 + t^2) y'' - 2t y' + 2y = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que o Wronskiano das soluções da equação é dado por $C(1 + t^2)$, $C \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, e, sabendo que $y(t) = t$ é uma solução particular da equação, determine a solução geral da equação.

Resolução: Dividindo por $1 + t^2$ obtemos

$$y'' - \frac{2t}{1 + t^2} y' + \frac{2}{1 + t^2} y = 0,$$

pelo que $p(t) = -2t/(1 + t^2)$. Então, o Wronskiano é dado por

$$W(t) = C e^{-\int p(t) dt} = C e^{\int 2t/(1+t^2) dt} = C e^{\ln(1+t^2)} = C(1 + t^2).$$

Considerando $C = 1$, temos que

$$W(t) = 1 + t^2.$$

A segunda solução da equação diferencial pode ser dada em termos do Wronskiano na forma

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{W(t)}{y_1^2(t)} dt = t^2 \int \frac{1 + t^2}{t^2} dt = t \int \left(\frac{1}{t^2} + 1 \right) dt = t \left(-\frac{1}{t} + t \right) + \tilde{C}t.$$

Ignorando o termo $\tilde{C}t$ (que é múltiplo de y_1), obtém-se como segunda solução linearmente independente

$$y_2(t) = t^2 - 1.$$

Portanto, a solução geral da equação é

$$y(t) = C_1 t + C_2(t^2 - 1), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Resumo final

O Wronskiano é uma ferramenta fundamental para estudar soluções de equações diferenciais de segunda ordem, pois permite verificar se duas soluções são linearmente independentes: Intuitivamente, pode ser visto como uma medida de “área” no plano formado pelos vetores (y_1, y_1') e (y_2, y_2') : se a área for diferente de zero, as soluções não estão “sobrepostas” (são linearmente independentes) e acrescentam informação nova ao espaço das soluções. Graças à Identidade Abel-Jacobi-Liouville, é possível determinar $W(t)$ diretamente a partir da equação, sem conhecer explicitamente todas as soluções. Um sistema fundamental de soluções forma uma base do espaço das soluções homogêneas, que tem dimensão dois para equações de segunda ordem. Assim, a solução geral da equação homogênea é a combinação linear das duas funções que constituem o sistema fundamental do soluções.

Exercícios

1. Escreva uma equação diferencial de ordem superior a um e que corresponda à descrição seguinte.

- (a) Seja linear, com coeficientes constantes e homogênea;
 - (b) Seja linear, com coeficientes variáveis e homogênea;
 - (c) Seja linear, com coeficientes constantes e não-homogênea;
 - (d) Seja linear, com coeficientes variáveis e não-homogênea;
 - (e) Seja não-linear.
2. Prove que as funções dadas formam um sistema fundamental de soluções da equação diferencial respectiva, no intervalo que se indica, e diga qual é a respectiva solução geral.
- (a) $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3t}, e^{4t} ; $(-\infty, +\infty)$.
 - (b) $t^2 y'' - 6ty' + 12y = 0$; t^3, t^4 ; $(0, +\infty)$.
 - (c) $t^2 y'' + ty' + y = 0$; $\cos(\ln t), \sin(\ln t)$; $(0, +\infty)$.
3. (a) Determine os valores de k para os quais t^k é solução da equação $t^2 y'' + ty' - y = 0$.
 (b) Diga, justificando, qual é a solução geral da equação diferencial da alínea anterior no intervalo $(0, +\infty)$.
4. Prove que:
- (a) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + t^2 e^{2t} + t - 2$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias, define a solução geral, em $\mathbb{R}$, da equação diferencial $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + 4t - 12$.
 - (b) $y(t) = \frac{c_1}{\sqrt{t}} + \frac{c_2}{t} + \frac{t^2}{15} - \frac{t}{6}$, onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias, define a solução geral, no intervalo $(0, +\infty)$, da equação diferencial $2t^2 y'' + 5ty' + y = t^2 - t$.
5. Considere a equação diferencial $t^3 y''' - 4t^2 y'' + 8ty' - 8y = 0$. Mostre que $\{t, t^2, t^4\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial em qualquer intervalo que não contenha a origem.
6. Para a equação diferencial linear de segunda ordem $y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$, onde p, q e f são funções contínuas em $\mathbb{R}$, diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- (a) É possível existirem duas soluções distintas, y_1 e y_2 , que satisfaçam as condições $y_1(0) = y_2(0) = 0$.
 - (b) Se f não for a função identicamente nula, existe uma única solução y da equação dada que satisfaz as condições $y(0) = y'(0) = 0$ e, além disso, esta solução não é constante.
 - (c) Se f não for a função identicamente nula, a diferença entre duas soluções de da equação dada é também uma sua solução.
 - (d) Se f for a função identicamente nula, a diferença entre duas soluções da equação dada é também uma sua solução.
7. Se substituir a equação do exercício anterior por uma equação linear de ordem $n > 2$, com coeficientes e segundo membro funções contínuas em $\mathbb{R}$, quais das alíneas permanecem verdadeiras? Justifique.

8. Verifique que a função $y_1(t) = t^2$ é solução da equação

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0$$

e determine, pelo método do Wronskiano, a solução geral da equação.

9. Considere-se a equação

$$(t - 1)y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0, \quad t > 1,$$

e suponha que já conhecemos uma solução $y_1(t) = e^t$. Determine uma segunda solução $y_2(t)$ de forma a que $\{y_1, y_2\}$ seja um sistema fundamental de soluções da equação.

10. Considere a equação diferencial

$$(1 + t)y'' - y' - ty = 0.$$

Mostre que o Wronskiano das suas soluções é dado por $c(1 + t)$, $c \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, e, sabendo que $y(t) = e^t$ é uma solução particular da equação, determine a solução geral da equação.

Aula 8: Equações diferenciais de coeficientes constantes

O problema da determinação da solução geral de uma equação diferencial linear de ordem de coeficientes variáveis é, em geral, muito complicado, e não são conhecidos métodos gerais que permitam determinar essa solução a não ser nalguns casos em que a equação tem uma forma cuja especificidade permite obter a sua solução. Um destes casos ocorre quando os coeficientes que figuram na equação são constantes (não dependem da variável independente). Neste caso, a equação escreve-se na forma

$$L[y] = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad y'' + py' + qy = f(t), \quad (1)$$

onde p e q são constantes reais e f é uma função contínua num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Nesta aula vamos considerar o caso em que a função f é identicamente nula em I , isto é, vamos considerar a equação homogênea

$$L[y] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' + py' + qy = 0, \quad (2)$$

e mostrar que esta equação se pode resolver por um processo puramente algébrico, envolvendo pouco mais que a mera determinação dos zeros de um certo polinómio constituído à custa dos coeficientes p e q .

Equação característica e operador diferencial polinomial

Como é sabido, a equação linear de primeira ordem homogênea de coeficientes constantes $y' + qy = 0$ tem como solução geral $y(t) = Ce^{-qt}$, onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Isto sugere que, para o caso das equações de ordem superior, se procurem soluções de (2) do tipo

$$y(t) = e^{rt} \quad (3)$$

para algum $r \in \mathbb{R}$. Uma tal função será solução de (2) se e só se

$$D^2[e^{rt}] + pD[e^{rt}] + qe^{rt} = 0,$$

com D o operador diferencial $D = d/dt$.

Atendendo a que $D[e^{rt}] = r^k e^{rt}$, para cada $k = 1, 2$, temos que a função (3) é solução da equação diferencial se e só se r for solução da **equação característica**

$$r^2 + pr + q = 0, \quad (4)$$

ou, o que é equivalente, se r for um zero do **polinómio característico**

$$P(r) = r^2 + pr + q. \quad (5)$$

Associado a este polinómio, vamos considerar o **operador diferencial polinomial**

$$P(D) = D^2 + pD + q,$$

que permite escrever a equação diferencial completa (1) na forma $P(D)y = f(t)$ e a equação homogênea (2) como $P(D)y = 0$. Portanto, o operador diferencial linear de segunda ordem L é dado por $L = P(D)$.

Determinação da solução geral da equação homogênea

Para determinar a solução da equação homogênea (2), vamos considerar as soluções da equação característica (4) dadas por

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Podem acontecer três situações distintas, que iremos analisar em separado.

Raízes reais e distintas. Se $\Delta = p^2 - 4q > 0$, então r_1 e r_2 são reais e distintos. Neste caso, a equação diferencial (2) pode ser escrita na forma

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0$$

e o sistema fundamental de soluções é constituído pelas funções

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, \quad y_2(t) = e^{r_2 t}.$$

Então, a solução geral de (2) é dada por

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 1 *Considere*

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

A equação característica é $r^2 + 5r + 4 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -4$ e $r_2 = -1$. Logo,

$$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 2 *Considere*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

A equação característica é $r^2 + 4r - 2 = 0$, com soluções $r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$. A solução geral é

$$y(t) = C_1 e^{(-2+\sqrt{6})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{6})t}.$$

Das condições iniciais segue o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ (-2 + \sqrt{6})C_1 + (-2 - \sqrt{6})C_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}, \\ C_2 = \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}. \end{cases} \quad \square$$

Raízes complexas conjugadas. Se $\Delta = p^2 - 4q < 0$, as raízes da equação característica são complexas conjugadas, ou seja,

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2} = \alpha \pm \beta i$$

com

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Exercício 1. Considere $r = \alpha + \beta i$ e a fórmula de Euler

$$e^{rt} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

Mostre que:

1. a parte real $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e a parte imaginária $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ de e^{rt} são duas soluções reais da equação homogênea (2).
2. $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ são linearmente independentes.

Daqui se conclui que $\{e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)\}$ constitui um sistema fundamental de soluções da equação homogênea (2).

Resolução: A demonstração do primeiro ponto fica ao cuidado do aluno. Vamos apenas considerar o segundo ponto, isto é, provar que as funções $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ são linearmente independentes. Calculemos o Wronskiano $W[y_1, y_2](t)$. Primeiro as derivadas

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= e^{\alpha t}(\alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t)), \\ y_2'(t) &= e^{\alpha t}(\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)). \end{aligned}$$

Assim

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \beta e^{2\alpha t}.$$

Como $\beta \neq 0$ (raiz complexa não real), temos $W(t) = \beta e^{2\alpha t} \neq 0$ para todo t . Logo y_1 e y_2 são linearmente independentes em qualquer intervalo. $\square$

Atendendo ao exercício anterior, a solução geral da equação homogênea é

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3 Considere

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Aqui $p = 4$, $q = 5$, e a equação característica dá $r = -2 \pm i$. Portanto,

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 4 Considere

$$y'' + 2y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Temos $r = -1 \pm \sqrt{3}i$, logo

$$y(t) = e^{-t}(C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)).$$

Das condições iniciais obtém-se $C_1 = 1$ e $C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $\square$

Raízes reais iguais. Se $\Delta = p^2 - 4q = 0$, a equação característica tem uma raiz dupla $r = -p/2$. Temos então que

$$y_1(t) = e^{rt},$$

é uma solução da equação homogênea. Para determinar uma segunda solução da equação diferencial $y_2(t)$ que seja linearmente independente, podemos usar o método de redução de ordem de D'Alembert. Assim, atendendo ao que foi visto na aula passada (ver (13) da Aula 7), concluímos que (note-se que $-p = 2r$)

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p dt}}{y_1^2(t)} dt = e^{rt} \int \frac{e^{-pt}}{e^{2rt}} dt = t e^{rt}.$$

Assim sendo, $\{e^{rt}, t e^{rt}\}$, com $r = -p/2$, constitui um sistema fundamental de soluções da equação homogênea e, como tal, a solução geral é

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{rt}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5 Considere

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Aqui $p = 4$, $q = 4$, a raiz dupla é $r = -2$. Assim,

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-2t}.$$

Das condições iniciais obtém-se $C_1 = 1$, $C_2 = 5$, logo $y(t) = (1 + 5t) e^{-2t}$. $\square$

Generalização para equações diferenciais de ordem superior a dois

Vamos considerar a generalização a equações com ordem superior a dois considerando alguns exemplos.

Exemplo 6 Determinar a solução geral da equação homogênea

$$y^{(iv)} - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 - 1)y = 0.$$

A equação característica é dada por

$$r^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r - 1)(r + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

O sistema fundamental de soluções é dado por

$$\{e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t\}$$

e, assim sendo, a solução geral da equação é

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 7 Determinar a solução geral da equação homogênea

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0.$$

A equação característica é dada por

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r - 1)^3 = 0.$$

O sistema fundamental de soluções é dado por

$$\{e^t, t e^t, t^2 e^t\}$$

e, assim sendo, a solução geral da equação é

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 8 *Determinar a solução geral da equação homogênea*

$$y''' - y'' + 3y' + 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - D^2 + 3D + 5)y = 0.$$

A equação característica é dada por

$$r^3 - r^2 + 3r + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)((r - 1)^2 + 2^2) = 0.$$

O sistema fundamental de soluções é dado por

$$\{e^{-t}, e^t \cos(2t), e^t \sin(2t)\}$$

e, assim sendo, a solução geral da equação é

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t \cos(2t) + C_3 e^t \sin(2t), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 9 *Determinar a solução geral da equação homogênea*

$$y^{(iv)} + 2y'' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 + 2D^2 + 1)y = 0.$$

A equação característica é dada por

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r^2 + 1)^2 = 0.$$

O sistema fundamental de soluções é dado por

$$\{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}$$

e, assim sendo, a solução geral da equação é

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 10 *Determinar a solução geral da equação homogênea*

$$y^{(v)} + 9y''' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^5 + 9D^3)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D^3(D^2 + 9)y = 0.$$

A equação característica é dada por

$$r^3(r^2 + 9) = 0.$$

O sistema fundamental de soluções é dado por

$$\{1, t, t^2, \cos(3t), \sin(3t)\}$$

e, assim sendo, a solução geral da equação é

$$y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 \cos(3t) + C_5 \sin(3t), \quad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exercícios

1. Reescreva as equações diferenciais lineares de coeficientes constantes seguintes usando operadores diferenciais polinomiais e, em seguida, determine um sistema fundamental de soluções e a respectiva solução geral.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ y'' + 4y = 0; & \text{(b)} \ y'' - 3y' - 4y = 0; & \text{(c)} \ y'' + 2y' + y = 0; \\ \text{(d)} \ y'' + y = 0; & \text{(e)} \ y'' + 2y' + 2y = 0; & \text{(f)} \ y'' - 3y' + 2y = 0; \\ \text{(g)} \ y'' - 5y' + 6y = 0; & \text{(h)} \ y''' + 2y'' = 0; & \text{(k)} \ y^{(iv)} + 2y'' + y = 0. \end{array}$$

2. Mostre que a equação diferencial $y'' - \omega^2 y = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ tem $\{e^{\omega t}, e^{-\omega t}\}$ como sistema fundamental de soluções. Posteriormente, conclua que $\{\cosh(\omega t), \sinh(\omega t)\}$ também é um sistema fundamental de soluções da mesma equação.

3. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ (D - 1)(D + 1)D^2 y = 0; & \text{(b)} \ (D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0; \\ \text{(c)} \ (D + 1)^4(D - 2)y = 0; & \text{(d)} \ (D^2 + 1)^2 y = 0; \\ \text{(e)} \ ((D + 1)^2 + 1)y = 0; & \text{(f)} \ ((D - 1)^2 + 9)^2 y = 0; \\ \text{(g)} \ ((D + 1)^2 + 9)y = 0; & \text{(h)} \ ((D + 1)^2 + 9)D^3 y = 0; \\ \text{(i)} \ (D - 1)^2(D + 1)(D^2 + 4)y = 0; & \text{(j)} \ (D^{n+1} - D^n)y = 0. \end{array}$$

4. Determine a solução particular das equações diferenciais seguintes, que satisfazem as condições iniciais dadas:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ y'' - y' - 12y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 5; \\ \text{(b)} \ y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = -2; \\ \text{(c)} \ y'' - y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2; \\ \text{(d)} \ y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 2. \end{array}$$

5. Determine a equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes que admita o seguinte sistema fundamental de soluções:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ \{e^{4t}, e^{-5t}, t e^{-5t}\}; & \text{(b)} \ \{e^{-\frac{1}{2}t}, e^{3t} \cos t, e^{3t} \sin t\}; \\ \text{(c)} \ \{1, e^{-\frac{1}{2}t}, t e^{-\frac{1}{2}t}, e^{3t} \cos t, e^{3t} \sin t\}; & \text{(d)} \ \{e^{4t}, e^{-5t}, t e^{-5t}\}. \end{array}$$

6. Determine a equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes e de menor ordem que admita como soluções as seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \ 1, e^{4t}; & \text{(b)} \ t, e^{4t}; & \text{(c)} \ 2 + t + 3e^{4t}; \\ \text{(d)} \ 5, 1 + 2t, 2te^{4t}; & \text{(e)} \ 2(t + 1) + e^{4t}, te^{4t}; & \text{(f)} \ e^{2t} \cos t + \cos^2 t; \\ \text{(g)} \ te^{2t} \cos t + \sinh(3t); & \text{(h)} \ e^{2t} \cos t, e^{2t} \sin t; & \text{(i)} \ e^{2t} \cos t + e^{2t} \sin t; \\ \text{(j)} \ e^{2t} \cos t - te^{2t} \sin t, t^2. \end{array}$$

Aula 9: Método da variação dos parâmetros

Nas últimas aulas, vimos como encontrar a solução geral de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem da forma

$$L[y] = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

com p, q contínuas em I . Nesta aula, vamos ver como determinar a solução geral da equação não homogênea (ou completa)

$$L[y] = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (2)$$

com $f \neq 0$ contínua em I .

Este estudo baseia-se na equação homogênea associada (1), utilizando as seguintes propriedades, cuja demonstração é bastante simples.

Teorema 1 *Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação completa (2), então $y = y_1 - y_2$ é solução da equação homogênea (1).*

Demonstração: Se y_1 e y_2 são soluções de (2), então $L[y_1] = f(t)$ e $L[y_2] = f(t)$, o que implica, pela linearidade do operador L , temos que

$$L[y] = L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = 0,$$

o que prova o pretendido. $\square$

Teorema 2 (Solução geral da equação não homogênea) *Se y_h é a solução geral da equação homogênea (1) e y_p uma solução particular da equação completa (2), então a solução geral da equação não homogênea é*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Em particular, se $\{y_1, y_2\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogênea, a solução geral da equação (2) pode ser escrita como

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Demonstração: Se y é uma solução da equação completa (2), então, pelo teorema anterior $y - y_p$ é uma solução da equação homogênea (1). Portanto, existem constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$y(t) - y_p(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t).$$

Fazendo variar as constantes C_1 e C_2 , obtemos a solução geral da equação completa (2) conforme (3). $\square$

Nota 1 *Do teorema anterior podemos concluir o seguinte.*

1. O conjunto de todas as soluções da equação completa (2) em I ,

$$\mathcal{S}(I) = \{y : L[y](t) = f(t), t \in I\}$$

é um espaço afim associado ao espaço vectorial $\mathcal{S}_0(I)$ das soluções da equação homogênea (1).

2. A solução de uma equação diferencial linear completa pode obter-se por particularização das constantes em (3), dando sentido à designação de **solução geral** ou **integral geral** de (2): trata-se de uma expressão envolvendo constantes reais arbitrárias a partir da qual toda a solução da equação pode ser obtida escolhendo valores específicos para as constantes. $\square$

Exemplo 1 Vamos resolver o problema de valor inicial

$$y'' - y = 2 - t^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Para isso, começamos por determinar a solução da equação homogênea. $y'' - y = 0$. Como vimos na aula passada, $\{e^t, e^{-t}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação. Logo a solução geral da homogênea é

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

O passo seguinte, consiste em encontrar uma solução particular da equação completa. Neste caso particular, verifica-se facilmente que

$$y_p(t) = t^2$$

satisfaz a equação. Então, a solução geral da equação completa é

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para determinar as constantes, consideram-se as condições iniciais. Temos que

$$y(0) = C_1 + C_2 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'(0) = C_1 - C_2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 - C_2 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $C_1 = \frac{1}{2}$ e $C_2 = \frac{1}{2}$ e concluímos que a solução do problema de condição inicial é

$$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} + t^2. \quad \square$$

No exemplo anterior, foi fácil determinar uma solução particular da equação diferencial completa. No entanto, isso nem sempre acontece. Vamos, então, definir um algoritmo para determinar solução particular y_p da equação completa (2), assumindo que conhecemos o sistema fundamental de soluções $\{y_1, y_2\}$ da equação homogênea (1).

Método da variação dos parâmetros (ou de Lagrange)

Vamos supor que conhecemos um sistema fundamental de soluções $\{y_1, y_2\}$ da equação homogênea (1) e consideremos o **sistema de Lagrange**

$$\begin{cases} u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0, \\ u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = f(t), \end{cases} \quad (4)$$

onde u_1 e u_2 são funções diferenciáveis definidas em I .

Este sistema é possível e determinado, ou seja, permite definir u_1' e u_2' de forma única, pois o determinante da matriz dos coeficientes é o Wronskiano $W[y_1, y_2]$, que é diferente de zero, uma vez que $\{y_1, y_2\}$ é um sistema fundamental de soluções.

O teorema seguinte permite definir o algoritmo para determinar uma solução particular da equação completa (2), supondo que conhecemos o sistema fundamental de soluções da equação homogênea (1).

Teorema 3 *Seja $\{y_1, y_2\}$ um sistema fundamental de soluções da equação homogênea (1). Então, uma solução particular da equação completa (2) é dada por*

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

com u_1 e u_2 funções diferenciáveis definidas em I que satisfazem o sistema de Lagrange.

Demonstração: A primeira derivada de $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ é

$$y'_p = u'_1y_1 + u_1y'_1 + u'_2y_2 + u_2y'_2 = (u'_1y_1 + u'_2y_2) + (u_1y'_1 + u_2y'_2).$$

Pela primeira equação do sistema de Lagrange, temos que

$$y'_p = u_1y'_1 + u_2y'_2.$$

A segunda derivada é

$$y''_p = u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + u_1y''_1 + u_2y''_2.$$

Usando a segunda equação do sistema de Lagrange, obtemos

$$y''_p = u_1y''_1 + u_2y''_2 + f(t).$$

Substituindo na equação completa,

$$y''_p + p(t)y'_p + q(t)y_p = (u_1y''_1 + u_2y''_2) + p(t)(u_1y'_1 + u_2y'_2) + q(t)(u_1y_1 + u_2y_2) + f(t).$$

Como y_1 e y_2 são soluções da homogênea (1), podemos concluir que

$$y''_p + p(t)y'_p + q(t)y_p = f(t),$$

o que mostra que y_p é uma solução particular da equação completa (2). $\square$

Com base no teorema anterior, podemos definir o seguinte algoritmo para determinar a solução geral da equação completa (2), conhecendo o sistema fundamental de soluções da equação homogênea (1).

1. **Determinar a solução geral da homogênea.** Encontre duas soluções linearmente independentes $y_1(t), y_2(t)$ da equação homogênea (1) e escreva a solução geral na forma

$$y_h(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Obter uma solução particular da completa pelo método da variação dos parâmetros.** Procure $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, onde u_1, u_2 satisfazem o sistema de Lagrange (4).

Calcule o Wronskiano

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y'_2(t) - y'_1(t)y_2(t) \neq 0,$$

e, pela **regra de Cramer**

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

Integre para obter

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

e substitua na expressão de $y_p(t)$. A solução particular da equação (2) é dada por

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt. \quad (5)$$

3. **Escrever a solução geral da equação completa.** A solução geral da equação não homogênea fica então

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

com y_p dada por (5).

Exemplo 2 Considere $y'' - y = e^t$ e determine a sua solução geral pelo algoritmo dado.

1. *Determinar a equação geral da homogênea. De acordo com o que vimos na aula passada, $\{e^t, e^{-t}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogênea (prove!). Então, solução geral da homogênea é*

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

2. *Obter uma solução particular pelo método da variação dos parâmetros. Procuramos*

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t},$$

com $u_1(t)$ e $u_2(t)$ a verificar o sistema de Lagrange

$$\begin{cases} u_1'(t)e^t + u_2'(t)e^{-t} = 0, \\ u_1'(t)e^t - u_2'(t)e^{-t} = e^t. \end{cases}$$

Resolvendo sai que

$$u_1'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1(t) = \frac{t}{2}$$

e

$$u_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} \Rightarrow u_2(t) = -\frac{1}{4}e^{2t}.$$

Então, a solução particular fica

$$y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t} = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^t.$$

3. *Escrever a solução geral. A solução geral da equação completa é*

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^t. \quad \square$$

Nota 2 Note que, ao determinar uma solução particular pelo método da variação dos parâmetros, podem surgir termos que são múltiplos das soluções da equação homogênea. Estes termos podem ser incluídos na solução geral da homogênea, pois a solução geral da equação completa é dada por $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, onde $y_h(t)$ contém todas as combinações lineares das soluções fundamentais da homogênea. Assim, tais termos não alteram a forma final da solução geral e podem ser omitidos da solução particular.

No exemplo anterior, ao determinar a solução particular pelo método da variação dos parâmetros, obtivemos

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t e^t - \frac{1}{4}e^t.$$

Observe que o termo $-\frac{1}{4}e^t$ é múltiplo de e^t , que já pertence à solução geral da equação homogênea (6). Portanto, este termo pode ser incluído na solução homogênea, e podemos escrever a solução particular de forma simplificada como

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t e^t,$$

mantendo a solução geral completa

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t e^t. \quad \square$$

Exercício 2. Determine a solução geral de:

- (a) $y'' + 2y' + y = t e^{-t}$;
- (b) $y'' + y = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Resolução: Vamos determinar as soluções gerais das equações com base no algoritmo considerado.

- (a) Consideremos a equação $y'' + 2y' + y = t e^{-t}$.

Passo 1: Determinar a equação geral da homogênea.

Atendendo a que a equação característica da equação homogênea é

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r + 1)^2 = 0,$$

temos que, pelo que foi visto na aula passada, $\{e^{-t}, t e^{-t}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogênea. Então, solução geral da equação homogênea é

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Obter uma solução particular pelo método da variação dos parâmetros. Procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1(t)e^{-t} + u_2(t)t e^{-t},$$

com $u_1(t)$ e $u_2(t)$ a verificar o sistema de Lagrange

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)t e^{-t} = 0, \\ -u_1'(t)e^{-t} + u_2'(t)(1-t)e^{-t} = t e^{-t}. \end{cases}$$

Da primeira equação sai que $u_1'(t) = -tu_2'(t)$ e, substituindo na segunda

$$tu_2'(t) + (1-t)u_2'(t) = u_2'(t) = t \Rightarrow u_2(t) = \frac{t^2}{2}, \quad u_1(t) = -\frac{t^3}{3}.$$

Então, a solução particular fica

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{t^3}{3}e^{-t} + \frac{t^2}{2}te^{-t}.$$

Passo 3: Escrever a solução geral.

A solução geral é

$$y(t) = \left(C_1 - \frac{t^3}{3}\right)e^{-t} + \left(C_2 + \frac{t^2}{2}\right)te^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideremos a equação $y'' + y = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Passo 1: Determinar a equação geral da homogênea.

Como vimos na aula passada, $\{\cos t, \sin t\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogênea. Então, solução geral da equação homogênea é

$$y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: Obter uma solução particular pelo método da variação dos parâmetros.

Procuramos uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t,$$

com $u_1(t)$ e $u_2(t)$ a verificar o sistema de Lagrange

$$\begin{cases} u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \sin t = 0, \\ -u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = \tan t. \end{cases}$$

Neste caso, $W[y_1, y_2](t) = 1$ e a solução deste sistema, dada por (5), é

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt = - \int \sin t \tan t dt = - \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt,$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt = \int \cos t \tan t dt = \int \sin t dt.$$

Integrando,

$$u_2(t) = -\cos t,$$

$$u_1(t) = - \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = - \int \sec t dt + \int \cos t dt = -\ln |\sec t + \tan t| + \sin t.$$

Então, a solução particular fica

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\cos t \ln |\sec t + \tan t|.$$

Passo 3: Escrever a solução geral.

A solução geral é

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \cos t \ln |\sec t + \tan t|, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Nota 3 (Interpretação entrada–resposta) Tal como no caso das equações lineares de primeira ordem, também aqui é muitas vezes útil adotar o ponto de vista **entrada–resposta**. A equação diferencial descreve como um sistema reage a um estímulo externo, isto é, como transforma uma **entrada/estímulo** $f(t)$ num determinado comportamento de saída.

Neste contexto, y_p é a **resposta particular ao estímulo** e $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ representa a **resposta livre** do sistema, determinada pelas condições iniciais. Assim, a solução da equação completa (também chamada **resposta total**) pode ser vista como a sobreposição da resposta livre com a resposta ao estímulo externo, isto é,

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + y_p(t),$$

com y_p dada por (5).

No caso de uma equação linear de primeira ordem $y' + p(t)y = f(t)$, a solução da homogénea é dada por

$$y_h(t) = C y_1(t), \quad C \in \mathbb{R}, \quad \text{com } y_1(t) = e^{-\int p(t) dt},$$

enquanto que a solução particular é

$$y_p(t) = y_1(t) \int \frac{f(t)}{y_1(t)} dt = e^{-\int p(t) dt} \int f(t) e^{\int p(t) dt} dt.$$

A solução geral da equação é também (como vimos) escrita na forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

A interpretação é análoga: y_h representa a resposta livre do sistema; y_p é a resposta particular ao estímulo $f(t)$ e a linearidade garante que estas respostas se superpõem. $\square$

O princípio da superposição permite separar a resposta total de um sistema linear como a soma da resposta livre com a resposta ao estímulo externo. O teorema seguinte, que também exemplifica este princípio, afirma que a resposta de um sistema linear à soma de vários estímulos é igual à soma das respostas individuais correspondentes a cada estímulo.

Teorema 4 (Princípio da sobreposição) Sejam $y_1, \dots, y_k$, $k \geq 2$, soluções das equações diferenciais lineares

$$L[y] = f_j(t), \quad j = 1, \dots, k.$$

Então

$$y(t) = \sum_{j=1}^k y_j(t) \quad \text{é solução de} \quad L[y] = \sum_{j=1}^k f_j(t).$$

Demonstração: O resultado decorre imediatamente da linearidade do operador L . De facto,

$$L[y] = L \left[\sum_{j=1}^k y_j \right] = \sum_{j=1}^k L[y_j] = \sum_{j=1}^k f_j(t). \quad \square$$

Exemplo 3 Considere o operador linear $L[y] = y'' - y$, e os dois estímulos $f_1(t) = e^t$ e $f_2(t) = e^{-t}$. Primeiro, resolvemos separadamente as equações

$$L[y_1] = f_1(t), \quad L[y_2] = f_2(t).$$

Uma possível escolha de soluções particulares é (ver Exemplo 2 e a nota que se lhe segue)

$$y_{p,1}(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t, \quad y_{p,2}(t) = -\frac{1}{2}t^2 e^{-t}.$$

Segundo o princípio da sobreposição, a soma

$$y_p(t) = y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t - \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

representa a resposta particular do sistema ao estímulo $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = e^t + e^{-t}$.

A solução geral da equação $L[y] = f(t)$ é dada por (ver Exemplo 2)

$$y(t) = y_h(t) + y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^t - \frac{1}{2}t^2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exercício 3. Considere a equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$y''(t) + 4y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determine um sistema fundamental de soluções para a equação dada.
- (b) Determine uma solução particular da equação $y''(t) + 4y(t) = \sec(2t)$.
- (c) Indique, justificadamente, a solução geral de $y''(t) + 4y(t) = 1 + \sec(2t)$.

Resolução:

- (a) A equação característica da equação homogênea associada é

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2i.$$

Portanto um sistema fundamental de soluções da homogênea é $\{\cos(2t), \sin(2t)\}$ e

$$y_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- (b) Para a determinação de uma solução particular de $y'' + 4y = \sec(2t)$, usamos o método da variação das constantes. Pelo que foi visto anteriormente, essa solução pode ser dada por $y_p(t) = u_1(t) \cos(2t) + u_2(t) \sin(2t)$, com u_1 e u_2 a verificar o sistema de Lagrange. Então, atendendo a que

$$W[\cos(2t), \sin(2t)](t) = \begin{vmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} = 2,$$

tem-se que

$$u_1'(t) = -\frac{\sin(2t) \sec(2t)}{2} = -\frac{1}{2} \tan(2t) \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = \frac{1}{4} \ln |\cos(2t)|,$$

$$u_2'(t) = \frac{\cos(2t) \sec(2t)}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad u_2(t) = \frac{t}{2}.$$

Assim, a solução particular é

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = \frac{1}{4} \ln |\cos(2t)| \cos(2t) + \frac{t}{2} \sin(2t),$$

válida nos intervalos onde $\cos(2t) \neq 0$.

- (c) Para determinar a solução da equação $y'' + 4y = 1 + \sec(2t)$, vamos considerar o princípio da sobreposição. Atendendo a que a solução particulares relativa ao termo constante 1 é $y_{p,1}(t) = \frac{1}{4}$ e a solução particular $y_{p,2}(t)$ relativa ao termo $\sec(2t)$ foi dada na alínea anterior, a solução geral pretendida é

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) \\ &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln |\cos(2t)| \cos(2t) + \frac{t}{2} \sin(2t), \end{aligned}$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e t pertencente a qualquer intervalo onde $\cos(2t) \neq 0$. $\square$

Exercícios

1. (a) Demonstre a seguinte generalização do **princípio da sobreposição** para equações diferenciais lineares de ordem n : sejam $y_1, \dots, y_k$, $k \geq 2$, soluções das equações diferenciais lineares

$$L[y] = f_j(t), \quad j = 1, \dots, k,$$

com

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y,$$

Então

$$y(t) = \sum_{j=1}^k C_j y_j(t) \quad \text{é solução de} \quad L[y] = \sum_{j=1}^k C_j f_j(t),$$

com $C_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$.

- (b) Mostre que a solução geral de $y''' + 4y' = \cos t$ é dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 + C_2 \cos(2t) + C_3 \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

- (c) Sabendo que $y_1(t) = e^{t^2}$ é uma solução particular de $y''' + 4y' = f(t)$, determine $f(t)$ e calcule a solução geral da equação $y''' + 4y' = 2f(t) - \cos t$.

2. Utilizando o método da variação dos parâmetros arbitrários (ou de Lagrange), determine a solução geral de cada uma das equações diferenciais.

(a) $4y'' + 36y = \csc(3t)$; (b) $y'' + 9y = 9 \sec^3(3t)$;

(c) $y'' + 4y' + 4y = t^{-2} e^{-2t}$; (d) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$.

3. Sabendo que $\{t^2, t^2 \ln t\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial $y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = 0$, $t > 0$, determine a solução geral de $y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = \ln t$, para $t > 0$.

4. Determine a solução geral da equação diferencial linear

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

sabendo que $y = t$ é solução da equação homogênea associada.

5. Determine a solução geral das equações diferenciais lineares:

(a) $y'' - y = \frac{2e^t}{e^t - 1}$; (b) $y'' + y = \frac{1}{e^t + 1}$.

6. Considere a equação diferencial $(1 + t^2)y'' - 2ty' + 2y = 1 + t^2$, e seja $y(t) = t$ uma solução da equação homogênea associada.
- Determine a solução geral da equação homogênea associada.
 - Calcule a solução geral da equação inicial.

7. Considere a equação diferencial

$$y''(t) - 2y'(t) + 10y(t) = \frac{e^t}{\cos(3t)}.$$

- Determine a solução geral da equação homogênea associada.
 - Calcule a solução geral da equação inicial.
8. Considere a equação diferencial $ty'' + 2(1 + t)y' + 2y = 8e^{2t}$.
- Mostre que $y(t) = \frac{1}{t}$ é uma solução da equação diferencial homogênea associada.
 - Mostre que $\left\{\frac{1}{t}, \frac{e^{-2t}}{t}\right\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada.
 - Calcule a solução geral da equação inicial.

9. Suponhamos que $t \sin(2t)$ é uma solução particular de uma equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = 4 \cos(2t),$$

para algum $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Determine uma solução particular de $ay'' + by' + cy = 8 \cos(2t)$.
 - Determine a, b, c e a solução geral do problema.
10. Considere a equação diferencial
- $$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1 + t^2}.$$
- Descreva o método da variação dos parâmetros de Lagrange que lhe permite determinar a solução geral de uma equação diferencial linear completa de ordem dois.
 - Calcule a solução geral da equação dada pelo método da variação dos parâmetros de Lagrange.
 - Diga para que valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$ as soluções de $y'' - ay' + y = 0$ são tais que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.
11. Determine, a solução geral da equação diferencial, $y''' + y'' + y' + y = \cosh t$. Deve explicitar a solução geral da equação homogênea bem como exibir uma solução particular da equação dada.
12. Considere a equação diferencial $(1 + t)y'' - y' - ty = (1 + t^2)$.

- Descreva o método da variação dos parâmetros de Lagrange que lhe permite determinar a solução geral de uma equação diferencial linear completa de ordem dois.
- Sabendo que $y_1 = e^t$ e $y_2 = (3 + 2t)e^{-t}$ são soluções da equação homogênea associada, determina pelo método de Lagrange (da variação dos parâmetros) a solução geral desta equação.

Aula 10: Método do polinómio anulador

Nesta aula vamos considerar um método alternativo ao método da variação dos parâmetros de Lagrange, para calcular uma solução particular de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes:

$$L[y] = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad y'' + py' + qy = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

com $p, q \in \mathbb{R}$ e f uma função contínua definida em I .

O método que iremos considerar tem por base a noção de polinómio anulador. Sejam D o operador diferencial $D = d/dt$ e g uma função real de variável real suficientemente regular. Diz-se que o polinómio diferencial $P(D)$ é um **polinómio anulador** para g , ou que $P(D)$ anula g se $P(D)g = 0$.

Exemplo 1 Se y é a solução da equação homogénea

$$y'' + py' + qy = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

com $p, q \in \mathbb{R}$, então $P(D) = D^2 + pD + q$ é um polinómio anulador para y . Com esta notação, a equação diferencial linear de coeficientes constantes (1), pode ser escrita na forma

$$P(D)y = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + pD + q)y = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}. \quad \square \quad (2)$$

Quando a função f possui uma determinada estrutura – o método não funciona para todos as funções – é possível definir um método alternativo ao método de Lagrange da variação dos parâmetros para determinar uma solução particular de (1). Este método passa por determinar, caso exista, um **polinómio anulador** de f , isto é, um polinómio diferencial $Q(D)$ tal que

$$Q(D)f(t) = 0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

A pergunta que se impõe é: quais as funções f para as quais é fácil determinar um polinómio anulador? É fácil de ver que tais funções devem estar relacionadas com as soluções das equações diferenciais lineares de segunda ordem (ou de ordem superior) com coeficientes constantes. Mais concretamente, podemos enumerar os tipos de funções f para os quais o método do polinómio anulador é aplicável.

1. Polinómios: $f(t) = t^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Funções exponenciais: $f(t) = t^n e^{\alpha t}$, com $n \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Funções trigonométricas multiplicadas por exponenciais:

$$f(t) = t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad f(t) = t^n e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4. Combinações lineares das anteriores.

Antes de passarmos ao exercício em que se demonstrará explicitamente quais os polinómios anuladores das funções referidas, é útil apresentar uma propriedade fundamental que permite simplificar muitos cálculos.

Teorema 1 (Identities de deslocamento) *Seja $g(t)$ uma função suficientemente diferenciável e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $(D - \alpha)(e^{\alpha t}g(t)) = e^{\alpha t}Dg(t);$
2. $((D - \alpha)^2 + \beta^2)(e^{\alpha t}g(t)) = e^{\alpha t}(D^2 + \beta^2)g(t), \beta \in \mathbb{R}.$

Demonstração: Para a primeira identidade, temos que

$$(D - \alpha)(e^{\alpha t}g(t)) = \alpha e^{\alpha t}g(t) + e^{\alpha t}D(g(t)) - \alpha e^{\alpha t}g(t) = e^{\alpha t}Dg(t).$$

Para a segunda identidade, temos

$$((D - \alpha)^2 + \beta^2)(e^{\alpha t}g(t)) = (D - \alpha)^2(e^{\alpha t}g(t)) + \beta^2 e^{\alpha t}g(t)$$

e, aplicando a primeira identidade, concluímos o pretendido. $\square$

O exercício seguinte mostra como determinar o polinómio anulador para as funções que aparecem como soluções das equações lineares de coeficientes constantes, isto é, para funções que podem ser escritas como combinações de polinómios, exponenciais e funções trigonométricas (possivelmente multiplicadas por polinómios ou exponenciais).

Exercício 1. Mostre que:

- (a) $Q(D) = D^{n+1}$ anula $f(t) = t^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$;
- (b) $Q(D) = (D - \alpha)^{n+1}$ anula $f(t) = t^n e^{\alpha t}$, com $n \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (c) $Q(D) = ((D - \alpha)^2 + \beta^2)^{n+1}$ anula $f(t) = t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $f(t) = t^n e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (d) Produtos de operadores correspondentes anulam combinações lineares de funções das formas anteriores.

Resolução:

(a) $f(t) = t^n$. Basta derivar t^n $n + 1$ vezes: $D^{n+1}(t^n) = 0$.

(b) $f(t) = t^n e^{\alpha t}$. Usando a primeira identidade de conjugação,

$$(D - \alpha)^{n+1}(t^n e^{\alpha t}) = e^{\alpha t} D^{n+1} t^n = 0.$$

(c) $f(t) = t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $t^n e^{\alpha t} \sin(\beta t)$: Pela segunda identidade de conjugação,

$$((D - \alpha)^2 + \beta^2)^{n+1}(t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t)) = e^{\alpha t} (D^2 + \beta^2)^{n+1}(t^n \cos(\beta t)),$$

e de forma análoga para $\sin(\beta t)$. Para $n = 0$, sai que

$$(D^2 + \beta^2)(\cos(\beta t)) = D^2 \cos(\beta t) + \beta^2 \cos(\beta t) = -\beta^2 \cos(\beta t) + \beta^2 \cos(\beta t) = 0,$$

e de forma análoga, $(D^2 + \beta^2)(\sin(\beta t)) = 0$. O caso geral prova-se por indução.

(d) Para combinações lineares de funções das formas anteriores, use a linearidade do operador e a propriedade de produtos de anuladores (ver Exercício 2) para concluir que a combinação é também anulada pelo polinómio indicado. $\square$

Vamos agora provar um resultado importante relativo aos polinómios anuladores e que foi usado no exercício anterior.

Exercício 2. Sejam $P(D)$ e $Q(D)$ dois polinómios diferenciais de coeficientes constantes tais que $P(D)$ anula a função y_1 e $Q(D)$ anula a função y_2 . Mostre que produto (composição) $P(D)Q(D)$ anula $\alpha y_1 + \beta y_2$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Resolução: Pela linearidade do operador $Q(D)$, e atendendo ao facto de $Q(D)y_2 = 0$,

$$Q(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha Q(D)y_1 + \beta Q(D)y_2 = \alpha Q(D)y_1 + 0.$$

Como $P(D)y_1 = 0$, aplicando $P(D)$ ao termo $\alpha Q(D)y_1$ resulta que

$$P(D)(\alpha Q(D)y_1) = \alpha P(D)Q(D)y_1 = 0.$$

Portanto,

$$(P(D)Q(D))(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0. \quad \square$$

Exemplo 2 Pelo Exercício 1, o polinómio anulador de $f_1(t) = e^t$ é $Q_1(D) = D - 1$ e o polinómio anulador de $f_2(t) = \sin(\sqrt{5}t)$ é $Q_2(D) = D^2 - 5$. Então, pelo Exercício 2, o polinómio anulador de $f(t) = e^t + 3 \sin(\sqrt{5}t)$ é $Q_1(D)Q_2(D) = (D - 1)(D^2 - 5)$. $\square$

Exercício 3. Determine os polinómios anuladores das seguintes funções:

- (a) $f(t) = 5e^{2t} + t \cos(3t)$;
- (b) $f(t) = te^{-4t} + 5t^2 \sin(2t) + e^{3t/2} \cos t$;
- (c) $f(t) = 1 + 5t - te^{5t}$.

Resolução:

- (a) Escrevendo $f(t) = 5f_1(t) + f_2(t)$, com $f_1(t) = e^{2t}$, $f_2(t) = t \cos(3t)$, sabemos que o polinómio anulador de f_1 é $Q_1(D) = D - 2$ e o de f_2 é $Q_2(D) = (D^2 + 9)^2$. Então, o polinómio anulador de f é

$$Q(D) = Q_1(D)Q_2(D) = (D - 2)(D^2 + 9)^2.$$

- (b) Escrevendo $f(t) = f_1(t) + 5f_2(t) + f_3(t)$, com $f_1(t) = te^{-4t}$, $f_2(t) = t^2 \sin(2t)$, $f_3(t) = e^{3t/2} \cos t$, sabemos que o polinómio anulador de f_1 é $Q_1(D) = (D + 4)^2$, o de f_2 é $Q_2(D) = (D^2 + 4)^3$ e o de f_3 é $Q_3(D) = (D - 3/2)^2 + 1$. Então, o polinómio anulador de f é

$$Q(D) = Q_1(D)Q_2(D)Q_3(D) = (D + 4)^2(D^2 + 4)^3((D - 3/2)^2 + 1).$$

- (c) Escrevendo $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$, com $f_1(t) = 1 + 5t$, $f_2(t) = te^{5t}$, sabemos que o polinómio anulador de f_1 é $Q_1(D) = D^2$ e o de f_2 é $Q_2(D) = (D - 5)^2$. Então, o polinómio anulador de f é

$$Q(D) = Q_1(D)Q_2(D) = D^2(D - 5)^2. \quad \square$$

O **método do polinómio anulador** fornece um procedimento sistemático para determinar uma solução particular $y_p(t)$ da equação não homogénea (1). A ideia central consiste em aplicar um operador diferencial adicional que anula o termo não homogéneo $f(t)$, transformando a equação original numa equação homogénea de ordem superior, cuja solução é então facilmente obtida.

Método do polinómio anulador

Considere a equação diferencial linear com coeficientes constantes

$$P(D)y = f(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

onde $P(D)$ é um operador diferencial com coeficientes constantes e $f(t)$ é do tipo elementar, ou seja, polinomial, exponencial, trigonométrica ou um produto destes.

Para resolver esta equação, podemos utilizar o **método do polinómio anulador**, que permite determinar uma **solução particular** a partir de um polinómio diferencial $Q(D)$ que anula $f(t)$ e combinar essa solução com a solução geral da equação homogénea. O algoritmo passo a passo é o seguinte:

1. **Determinar a solução geral da equação homogénea:** Resolver

$$P(D)y_h = 0$$

e encontrar $y_h(t)$. Este passo corresponde a fatorizar o polinómio $P(D)$ e identificar suas raízes, que determinam a forma da solução homogénea.

2. **Determinar um polinómio anulador $Q(D)$ de $f(t)$:** Escolher $Q(D)$ tal que

$$Q(D)f(t) = 0.$$

Este operador será usado para construir uma equação homogénea aumentada.

3. **Resolver a equação homogénea aumentada:** Resolver

$$Q(D)P(D)y = 0$$

para obter a solução geral

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

onde $y_p(t)$ contém os termos da solução de $Q(D)P(D)y = 0$ que não aparecem em $y_h(t)$ e que possuem constantes livres.

4. **Determinar as constantes livres de $y_p(t)$:** Obter as constantes de $y_p(t)$ por forma a que $y_p(t)$ seja uma **solução particular da equação completa**

$$P(D)y = f(t).$$

5. **Obter a solução geral da equação completa:** A solução geral é

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

com y_h obtida no passo 1 e y_p determinada no passo 4.

Exercício 4. Utilizando o método do polinómio anulador, determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - y = e^t + 2$;

(b) $y'' - 5y' + 6y = 2t^2 - 1$;

(b) $y'' + y = \cos t$.

Resolução:

(a) A equação pode ser escrita na forma $P(D)y = e^t + 2$, com $P(D) = D^2 - 1$.

1. Solução da homogénea (factorizar $P(D)$): A equação característica

$$r^2 - 1 = 0$$

tem como raízes $r = \pm 1$ e, como tal, $P(D) = (D - 1)(D + 1)$ e

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Determinar o polinómio anulador de $f(t) = e^t + 2$: Tem-se que

$$Q(D) = (D - 1)D, \quad \text{pois} \quad (D - 1)e^t = 0, \quad D(2) = 0.$$

3. Resolver a equação homogénea aumentada:

$$Q(D)P(D)y = (D - 1)D(D^2 - 1)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + At e^t + B = y_h(t) + y_p(t),$$

com

$$y_p(t) = At e^t + B.$$

4. Determinar A e B substituindo na equação original: Tem-se que

$$y_p'' - y_p = (2A e^t) - B = e^t + 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -2.$$

5. Solução geral da equação:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t e^t - 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

(b) A equação pode ser escrita na forma $P(D)y = 2t^2 - 1$, com $P(D) = D^2 - 5D + 6$.

1. Solução da homogénea (factorizar $P(D)$): A equação característica

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

tem como raízes $r = 2, 3$ e, como tal, $P(D) = (D - 2)(D - 3)$ e

$$y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Determinar o polinómio anulador de $f(t) = 2t^2 - 1$: Tem-se que

$$Q(D) = D^3, \quad \text{pois} \quad D^3(2t^2 - 1) = 0.$$

3. Resolver a equação homogénea aumentada:

$$Q(D)P(D)y = D^3(D^2 - 5D + 6)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + At^2 + Bt + C = y_h(t) + y_p(t),$$

com

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C.$$

4. Determinar A , B e C substituindo na equação original: Tem-se que

$$\begin{aligned} y_p'' - 5y_p' + 6y_p &= 2A - 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) \\ &= 6At^2 + (-10A + 6B)t + (2A - 5B + 6C). \end{aligned}$$

Comparando com $2t^2 - 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} 6A &= 2 &\Rightarrow A &= \frac{1}{3}, \\ -10A + 6B &= 0 &\Rightarrow B &= \frac{5}{9}, \\ 2A - 5B + 6C &= -1 &\Rightarrow C &= \frac{5}{27}. \end{aligned}$$

5. Solução geral da equação:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{9}t + \frac{5}{27}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- (c) A equação pode ser escrita na forma $P(D)y = \cos t$, com $P(D) = D^2 + 1$.

1. Solução da homogénea (factorizar $P(D)$): A equação característica

$$r^2 + 1 = 0$$

tem como raízes $r = \pm i$ e, como tal, $P(D) = D^2 + 1$ (já está factorizado) e

$$y_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Determinar o polinómio anulador de $f(t) = \cos t$: Tem-se que

$$Q(D) = D^2 + 1.$$

3. Resolver a equação homogénea aumentada:

$$Q(D)P(D)y = (D^2 + 1)(D^2 + 1)y = 0.$$

A solução geral desta equação é

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + At \cos t + Bt \sin t = y_h(t) + y_p(t),$$

com

$$y_p(t) = At \cos t + Bt \sin t.$$

4. Determinar A e B substituindo na equação original: Tem-se que

$$y_p'' + y_p = -2A \sin t + 2B \cos t = \cos t \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad B = \frac{1}{2}.$$

5. Solução geral da equação:

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{2}t \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Nota 1 (Forma alternativa para determinar y_p) Além do método do polinómio anulador, existe uma forma prática de obter a solução particular y_p : assumir diretamente uma **função tentativa** baseada no tipo de $f(t)$ – polinomial, exponencial, trigonométrica ou combinações destes .. multiplicando por potências de t sempre que alguma função já apareça na solução homogênea y_h . As constantes são então determinadas substituindo y_p na equação completa.

A diferença principal em relação ao método do polinómio anulador é que, enquanto este último determina sistematicamente y_p a partir de um operador $Q(D)$ que anula $f(t)$, a forma alternativa utiliza um raciocínio guiado pelo tipo de função e só depois resolve para as constantes, sem construir explicitamente $Q(D)$.

Veja-se a diferença nos exemplos considerados no exercício anterior.

- (a) Para $y'' - y = e^t + 2$, a função tentativa é $y_p = Ate^t + B$ (multiplicando por t porque e^t já aparece em y_h). Substituindo na equação, obtém-se $A = \frac{1}{2}$ e $B = -2$, portanto $y_p = \frac{1}{2}te^t - 2$.
- (b) Para $y'' - 5y' + 6y = 2t^2 - 1$, a função tentativa é $y_p = At^2 + Bt + C$. Determinando as constantes na equação completa, obtém-se $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{9}$ e $C = \frac{5}{27}$, logo $y_p = \frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{9}t + \frac{5}{27}$.
- (c) Para $y'' + y = \cos t$, a função tentativa é $y_p = At \cos t + Bt \sin t$ (multiplicando por t porque $\cos t$ já aparece em y_h). Substituindo na equação completa, obtém-se $A = 0$ e $B = \frac{1}{2}$, portanto $y_p = \frac{1}{2}t \sin t$.

Esta forma permite obter y_p de modo rápido, focando apenas na escolha da função tentativa e na determinação das constantes, sem recorrer ao operador anulador. $\square$

Exercício 5. Considere a equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$y''' + ay'' + by' + cy = f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Sabendo que -2 e i são raízes do polinómio característico e que $y(t) = e^{3t}$ é uma solução da equação diferencial dada, determine a , b , c e f .
- (b) Indique a solução geral da equação.

Resolução:

- (a) Como i é raiz do polinómio característico e os coeficientes são reais, a sua conjugada $-i$ também é raiz. Assim as três raízes do polinómio característico são $r_1 = -2$, $r_2 = i$ e $r_3 = -i$. O polinómio característico é então

$$(r + 2)(r - i)(r + i) = (r + 2)(r^2 + 1) = r^3 + 2r^2 + r + 2.$$

Comparando com $r^3 + ar^2 + br + c$ obtemos $a = 2$, $b = 1$ e $c = 2$. Logo o operador diferencial associado é

$$P(D) = D^3 + 2D^2 + D + 2.$$

A função $f(t)$ é obida atendendo a que $y(t) = e^{3t}$ é solução da equação completa. Assim,

$$f(t) = P(D)e^{3t} = P(3)e^{3t} \Rightarrow f(t) = 50e^{3t}.$$

(b) A solução geral da homogénea $P(D)y = 0$ é obtida dada por

$$y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Como $f(t) = 50 e^{3t}$ e $r = 3$ não é raiz do polinómio característico, uma solução particular pode ser dada por (ver nota anterior) $y_p(t) = A e^{3t}$, com $A \in \mathbb{R}$. Aplicando o operador,

$$P(D)(A e^{3t}) = A 50 e^{3t} = f(t) \Rightarrow A = 1$$

Assim $y_p(t) = e^{3t}$ e a solução geral da equação completa é

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t + e^{3t}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exercícios

1. Obtenha a solução geral das seguintes equações diferenciais.

- (a) $y'' + 2y' = (1+t)e^{4t}$; (b) $3y'' - 9y' + 6y = 3e^{2t} + 1$;
 (c) $y'' - y' = 3e^{-x}$; (d) $y'' + y' = e^{-x}$;
 (e) $y'' - 3y' = 2x^2 + 1$; (f) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = te^{2t}$;
 (g) $y'' - 8y' + 16y = \sin(2x)$; (h) $y'' + 4y = x^2 \cos(2x) - x \sin(2x) + \sin(2x)$.

2. Determine o polinómio anulador para as seguintes funções.

- (a) $e^{5t} + 6te^{5t}$; (b) te^{5t} ;
 (c) $t^2 e^{5t} + 3t \sin(2t)$; (d) $t^2 e^{5t} + 2t \cos(2t)$;
 (e) $t^2 - t^2 e^{5t} - t \cos(2t) + 4t^2 e^{-t} \cos(2t)$; (f) $te^{5t} - t^3 e^{5t} + 3t \sin(2t)$.

3. Utilizando o método do polinómio anulador, determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

- (a) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2t + 3$; (b) $y'' - 9y = e^{3t}$;
 (c) $y'' - y' = t^2 e^t$; (d) $y'' + 2y' + y = e^t \sin t$;
 (e) $y'' - y' - 6y = \sin^2(2t)$; (f) $y'' - y' - 6y = e^{3t} \sin(2t)$;
 (g) $y''' - y'' = 3e^t + \sin t$; (h) $y'' - y' = 3e^t + 2$;
 (i) $y'' - 2y' + y = (t^2 + t + 1)e^t$; (j) $y''' - y' = 3(2 - t^2)$.

4. Vimos que a solução geral de $y'' - y = e^t + 2$ é dada por (3). Determine a solução geral de $y'' - y = e^t + 2 - 12e^{4t}$, sabendo que $\frac{1}{12}e^{4t}$ é solução particular de $y'' - y = e^{4t}$.

5. Considere a equação diferencial linear de coeficientes constantes $y'' + y = 5te^{2t}$.

- (a) Determine a solução geral da equação diferencial homogénea associada.
 (b) Aplicando o método do polinómio anulador determine uma solução particular da equação dada.
 (c) Determine a solução da equação da equação inicial tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Aula 11: Equação de Euler-Cauchy

As equações de Euler-Cauchy, também chamadas de equações equidimensionais, surgem em problemas com simetria de escala, como vibrações em sistemas contínuos. Elas têm a forma

$$t^2 y'' + p t y' + q y = f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}$ e f é contínua em $t > 0$. No caso homogêneo, isto é, quando $f(t) \equiv 0$, obtemos

$$t^2 y'' + p t y' + q y = 0. \quad (2)$$

Apesar de ter coeficientes variáveis, esta equação pode ser resolvida de forma semelhante a uma equação de coeficientes constantes.

Exercício 1. Mostre que, considerando a mudança de variável $e^s = t$, a equação de Euler-Cauchy (2) se pode escrever na forma

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + (p-1) \frac{dy}{ds} + q y = 0. \quad (3)$$

Resolução: Se $e^s = t$ então $s = \ln t$. Começemos por ver que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{1}{t}$$

e

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{ds} \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right)$$

Substituindo na equação (2) sai que

$$t^2 \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right) + p t \frac{dy}{ds} \frac{1}{t} + q y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + (p-1) \frac{dy}{ds} + q y = 0. \quad \square$$

Assim, para resolver a equação de Euler-Cauchy (2) resolve-se a equação (3) e, no final, faz-se a mudança de variável $s = \ln t$. Como (3) é uma equação diferencial de coeficientes constantes homogênea, é fácil calcular a sua solução geral. A equação característica é

$$r^2 + (p-1)r + q = 0.$$

Denotando por r_1, r_2 as raízes da equação característica, temos as seguintes possibilidades.

1. **Raízes distintas e reais:** $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. A solução geral é

$$y_h(x) = C_1 e^{r_1 s} + C_2 e^{r_2 s} \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = C_1 t^{r_1} + C_2 t^{r_2} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Raízes iguais:** $r_1 = r_2 = r$. A solução geral é

$$y_h(x) = C_1 e^{rs} + C_2 s e^{rs} \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = C_1 t^r + C_2 t^r \ln t \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. **Raízes complexas:** $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. A solução geral é

$$y_h(x) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) = t^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln t) + C_2 \sin(\beta \ln t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nota 1 (Soluções do tipo potência) As soluções da equação de Euler-Cauchy podem ser expressas como t^r , $t^r \ln t$ ou, no caso de raízes complexas, $t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ e $t^\alpha \sin(\beta \ln t)$. Por isso, diz-se que são soluções do tipo potência, o que sugere um método direto e eficiente para determinar a solução geral.

A ideia é procurar soluções da forma $y(t) = t^r$. Substituindo na equação (2), obtemos a equação característica

$$r(r-1) + pr + q = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + (p-1)r + q = 0.$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes dessa equação. Os casos possíveis são os seguintes.

1. **Raízes distintas e reais:** $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. A solução geral é

$$y_h(t) = C_1 t^{r_1} + C_2 t^{r_2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **Raízes iguais:** $r_1 = r_2 = r$. A solução geral é

$$y_h(t) = C_1 t^r + C_2 t^r \ln t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. **Raízes complexas:** $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. A solução geral é

$$y_h(t) = t^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln t) + C_2 \sin(\beta \ln t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Após determinar a solução da equação homogênea, podemos considerar o caso não homogêneo. A solução geral da equação não homogênea (1) é dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

onde $y_h(t)$ é a solução da equação homogênea (2) e $y_p(t)$ representa uma solução particular. Esta solução pode ser obtida, por exemplo, pelo método da variação dos parâmetros adaptado a soluções do tipo t^r ou combinações com $\ln t$ e funções oscilatórias $\cos(\beta \ln t)$, $\sin(\beta \ln t)$, dependendo das raízes da equação característica da homogênea. Nesta aula consideraremos apenas o caso homogêneo.

Exercício 2. Resolva as seguintes equações de Euler-Cauchy homogêneas:

(a) $t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0$;

(b) $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$;

(c) $t^2 y'' + 3ty' + 5y = 0$.

Resolução: Procuramos soluções da forma $y(t) = t^r$. Substituindo na equação homogênea $t^2 y'' + pty' + qy = 0$, obtemos a equação característica

$$r(r-1) + pr + q = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + (p-1)r + q = 0.$$

(a) Equação $t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0$.

Aqui $p = 2$, $q = -2$. A equação característica é

$$r^2 + (2-1)r - 2 = r^2 + r - 2 = 0.$$

Resolvendo

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -2.$$

Como as raízes são reais e distintas, a solução geral é

$$y(t) = C_1 t + C_2 t^{-2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Equação $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$.

Aqui $p = 5$, $q = 4$. A equação característica é

$$r^2 + (5-1)r + 4 = r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Resolvendo

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Raízes iguais $r_1 = r_2 = -2$, logo a solução geral é

$$y(t) = C_1 t^{-2} + C_2 t^{-2} \ln t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Equação $t^2 y'' + 3ty' + 5y = 0$.

Aqui $p = 3$, $q = 5$. A equação característica é

$$r^2 + (3-1)r + 5 = r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Resolvendo

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Raízes complexas $r = \alpha \pm \beta i$ com $\alpha = -1$, $\beta = 2$. A solução geral é

$$y(t) = t^{-1} (C_1 \cos(2 \ln t) + C_2 \sin(2 \ln t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Aplicações reais da equação de Euler–Cauchy

A equação de Euler–Cauchy (ou equação equidimensional) surge em muitos problemas físicos e de engenharia com simetria de escala, ou seja, quando o comportamento é invariante sob multiplicação da variável independente por uma constante. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1 (Vibrações longitudinais de uma haste cônica) Considere uma haste elástica cônica com secção transversal $A(x) = A_0 x^n$, densidade ρ e módulo de Young E constantes. A equação do movimento longitudinal $u(x, t)$, onde x representa a posição ao longo da haste, é

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Usando separação de variáveis $u(x, t) = U(x)T(t)$, obtém-se a equação espacial

$$x^2 U'' + nxU' + \lambda x^2 U = 0, \quad \lambda = \frac{\rho \omega^2}{E},$$

com ω frequência angular. Para obter a solução, procuramos $U(x) = x^r$. A equação característica é

$$r(r-1) + nr + \lambda = r^2 + (n-1)r + \lambda = 0.$$

As raízes da equação são

$$r_{1,2} = \frac{1-n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-n}{2}\right)^2 - \lambda}.$$

A solução geral é dada por

$$U(x) = \begin{cases} C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}, & r_1 \neq r_2, \\ x^r (C_1 + C_2 \ln x), & r_1 = r_2 = r, \\ x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)), & r = \alpha \pm \beta i, \end{cases}$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemplo 2 (Equação de Laplace em coordenadas polares (problema radial))

Para um problema de determinar a temperatura (ou potencial) radial $u = u(r)$, com r a distância radial, a equação de Laplace reduz-se a

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 u'' + ru' = 0.$$

Procurando $u(r) = r^m$, a equação característica é

$$m(m-1) + m = m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0.$$

A solução geral é

$$u(r) = C_1 + C_2 \ln r. \quad \square$$

Exemplo 3 (Fluxo de calor em coordenadas esféricas) A equação de Laplace esférica é

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 u'' + 2ru' = 0.$$

Procurando $u(r) = r^m$, temos

$$m(m-1) + 2m = m(m+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0, \quad m_2 = -1.$$

A solução geral é

$$u(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exemplo 4 (Deflexão de uma viga com espessura variável) Para uma viga com rigidez $EI(x) = EI_0 x^m$, com x a posição ao longo da viga e E , I_0 , m constantes, a equação de equilíbrio que permite obter a deflexão vertical $y(x)$ é

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_0 x^m \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 y^{(4)} + 2mxy''' + m(m-1)y'' = 0,$$

Definindo $v(x) = y''(x)$, a equação reduz-se a

$$x^2 v'' + 2mxv' + m(m-1)v = 0,$$

que é uma equação de Euler-Cauchy de segunda ordem. Procurando $v(x) = x^r$, obtemos a equação característica

$$r^2 + (2m - 1)r + m(m - 1) = 0.$$

Como discriminante é $\Delta = 1$, temos as raízes

$$r_1 = -m, \quad r_2 = 1 - m.$$

Portanto,

$$v(x) = y''(x) = C_1 x^{-m} + C_2 x^{1-m}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Integrando duas vezes, obtemos a solução geral para $y(x)$ (onde $C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4$)

$$y'(x) = \frac{C_1}{1-m} x^{1-m} + \frac{C_2}{2-m} x^{2-m} + C_3, \quad m \neq 1, 2,$$

$$y(x) = \frac{C_1}{(1-m)(2-m)} x^{2-m} + \frac{C_2}{(2-m)(3-m)} x^{3-m} + C_3 x + C_4, \quad m \neq 1, 2.$$

Consideremos agora os casos particulares $m = 1$ e $m = 2$. Para $m = 1$ tem-se

$$y''(x) = C_1 x^{-1} + C_2 \Rightarrow y(x) = C_1 \ln x + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4,$$

e. para $m = 2$

$$y''(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-1} \Rightarrow y(x) = -C_1 x^{-1} + C_2 \ln x + C_3 x + C_4. \quad \square$$

Exemplo 5 (Circuitos elétricos com parâmetros distribuídos) Considere uma linha de transmissão com indutância por unidade de comprimento $L(t) = L_0 t^\alpha$ e capacitância por unidade de comprimento $C(t) = C_0 t^\beta$, onde L_0 e C_0 são os valores de referência da indutância e capacitância, e α, β determinam como elas variam ao longo da linha. No regime harmônico ou estacionário, aplicando as leis de Kirchhoff para um elemento infinitesimal da linha, a tensão $V(t)$ satisfaz uma equação diferencial da forma

$$t^2 V'' + atV' + bV = 0,$$

onde

$$a = \alpha - \beta, \quad b = L_0 C_0 \omega^2.$$

Aqui, a reflete a variação relativa da indutância e capacitância ao longo da linha, enquanto b está relacionada às propriedades da linha e à frequência ω da onda propagante. Procurando soluções do tipo $V(t) = t^r$, temos a equação característica

$$r(r-1) + ar + b = r^2 + (a-1)r + b = 0.$$

Consideremos o caso particular $a = 3, b = 2$. Equação característica é

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

Portanto, a solução geral é

$$V(t) = t^{-1} (C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Exercícios

1. Resolva as seguintes equações de Euler–Cauchy, determinando a solução geral e classificando os tipos de raízes (reais distintas, iguais ou complexas):

(a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$;

(b) $t^2y'' + 4ty' + 4y = 0$;

(c) $s^2y'' + 5sy' + 6y = 0$;

(d) $r^2y'' + 2ry' + 5y = 0$;

(e) $x^2y'' - 2xy' + y = 0$.

2. Resolva a equação não homogênea usando o método da variação dos parâmetros

$$t^2y'' + 3ty' + 2y = t^2.$$

3. Considere a equação do fluxo de calor radial

$$r^2u'' + ru' - u = 0, \quad r > 0.$$

(a) Determine a solução geral.

(b) Discuta o comportamento da solução no centro $r \rightarrow 0$.

4. A deflexão de uma viga com rigidez variável $EI(x) = EI_0x^m$ pode ser calculada pela equação

$$x^2y^{(4)} + 2mxy''' + m(m-1)y'' = 0.$$

Determine a solução geral para:

(a) $m = 1$;

(b) $m = 2$;

(c) $m = 0$ (caso especial).

5. Linha de transmissão com parâmetros distribuídos

$$t^2V'' + atV' + bV = 0.$$

(a) Resolva para $a = 3, b = 2$.

(b) Resolva para $a = 4, b = 4$.

6. Considere a equação de Laplace esférica

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad r > 0.$$

(a) Mostre que a solução geral é $u(r) = C_1 + C_2/r$.

(b) Determine a solução que é finita no centro $r = 0$ e satisfaz $u(R) = 50$ na superfície de uma esfera de raio R .

Aula 12: Vibrações mecânicas e osciladores harmônicos

O estudo das vibrações mecânicas é fundamental em física, engenharia e biologia, pois muitos sistemas naturais e artificiais podem ser modelados como osciladores. Entre os exemplos clássicos estão o sistema massa-mola, o pêndulo simples em pequenas oscilações e sistemas elétricos LC análogos a sistemas mecânicos.

Oscilador massa-mola

Consideremos uma massa m (em kg) presa a uma mola ideal de constante elástica k (em N/m), suspensa verticalmente e sujeita à aceleração da gravidade g (em m/s²). O peso da massa estica a mola até uma posição de equilíbrio, determinada pela Lei de Hooke¹

$$mg = kL,$$

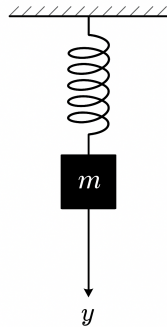
onde L é o comprimento da mola esticada. Denotando por $y(t)$ o deslocamento da massa a partir da posição de equilíbrio, temos que, atendendo à segunda Lei de Newton, o movimento da massa é descrito pela equação homogênea

$$my''(t) = -mg + k(L - y(t)) \quad \Leftrightarrow \quad my''(t) + ky(t) = 0.$$

Dividindo por m , obtemos a chamada equação do **oscilador harmônico simples**

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad (1)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (em rad/s) é a **frequência natural** do sistema.



Oscilador hamônico: sistema massa-mola.

Suponhamos agora que o movimento é amortecido (oscilador dentro de água, resistência do ar, etc) com uma força de amortecimento proporcional à sua velocidade. Então

$$my''(t) = -mg + k(L - y(t)) - cy'(t) \quad \Leftrightarrow \quad my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0,$$

com c (em N·s/m) o coeficiente de amortecimento e $y'(t)$ (em m/s) é a velocidade em torno da posição de equilíbrio. Dividindo por m , obtemos a chamada equação do **oscilador harmônico amortecido**

$$y''(t) + 2\nu y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad (2)$$

onde $\nu = c/(2m)$ (em 1/s) é o **coeficiente de amortecimento absoluto**.

¹Na publicação preservada nesta coleção de atas da *Royal Society*, Robert Hooke (1635–1703) revela a solução de um anagrama que tinha publicado dois anos antes. O seu anagrama – *c e i i n o s s t t u u* – resolve-se na frase latina *ut tension, sic vis*, significando “assim como a extensão, assim a força”. Nas suas próprias palavras: “A força de qualquer mola está na mesma proporção que a sua tensão: ou seja, se uma força a estica ou dobra uma unidade de espaço, duas irão dobrá-la duas unidades, e três irão dobrá-la três, e assim sucessivamente.”

Nota 1 Muitas vezes, a equação do oscilador harmônico amortecido é escrita na forma

$$y''(t) + 2\zeta\omega_0 y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad (3)$$

onde $\zeta = c/(2m\omega_0)$ é o **coeficiente de amortecimento adimensional**. $\square$

Quando o sistema é submetido a uma força externa periódica de amplitude F_0 (em newton, N) e frequência ω (em rad/s), o movimento é descrito pela chamada equação do **oscilador harmônico forçado**

$$y''(t) + 2\nu y'(t) + \omega_0^2 y(t) = E_0 \cos(\omega t), \quad (4)$$

com $E_0 = F_0/m$ (em N/m), permitindo estudar a resposta do sistema, incluindo fenômenos como ressonância quando $\omega \approx \omega_0$.

Pêndulo simples

O pêndulo simples de comprimento L (em m) e aceleração da gravidade g (em m/s²) também se comporta como um oscilador harmônico para pequenas oscilações. Denotando por $\theta(t)$ o ângulo de abertura em relação à vertical (em rad), a aceleração angular $\theta''(t)$ (em rad/s²) é nula quando o pêndulo passa pela posição de equilíbrio, $\theta = 0$. Para pequenos deslocamentos, a equação linearizada é

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0, \quad (5)$$

com frequência natural $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ (em rad/s).

Vamos estudar o movimento do sistema massa-mola de acordo com os três casos referidos anteriormente: oscilador harmônico simples, oscilador harmônico amortecido e oscilador harmônico forçado.

Oscilador harmônico simples

Consideremos a equação (1). A sua equação característica é

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i$$

e, como tal, a solução da equação corresponde ao movimento harmônico

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad (6)$$

com C_1 e C_2 constante arbitrárias (em metro, m). Esta é uma **oscilação harmônica simples**, com **período** T (em segundo, s) e **frequência** f (em 1/s) dados, respectivamente, por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

A solução de um oscilador harmônico simples pode ser expressa de forma combinada em termos de amplitude e fase

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

onde a **amplitude** A (em m) e a **fase** φ (em rad) são definidas, respectivamente, por

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \varphi = \frac{C_2}{C_1}. \quad (7)$$

No caso do pêndulo simples (5), a solução é

$$\theta(t) = \Theta \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

com amplitude inicial Θ (em rad) e fase φ (em rad). Assim como no oscilador massa-mola, $\theta''(t)$ depende do tempo: a aceleração angular é máxima nos extremos da oscilação e nula na posição de equilíbrio, variando continuamente durante o movimento. O argumento do cosseno é adimensional, e a frequência angular ω_0 é expressa em rad/s.

Considerando as condições iniciais

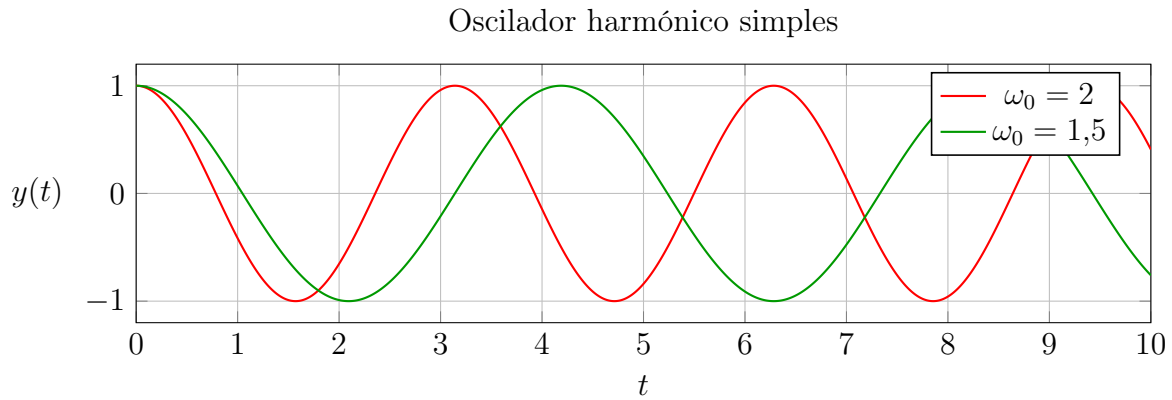
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0,$$

obtem-se as constantes da solução (6) como

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Deste modo, a amplitude e a fase incorporam diretamente os valores iniciais do sistema, permitindo escrever a solução de forma compacta e completa.

A figura seguinte mostra a solução do oscilador harmônico simples para diferentes valores da frequência natural ω_0 , considerando a amplitude igual $A = 1$ e a fase $\varphi = 0$.



Nota 2 *Alguns notas importantes.*

1. Se a velocidade inicial v_0 for positiva, então a amplitude A é maior do que o valor absoluto do deslocamento inicial y_0 . De facto,

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} > |y_0|, \quad \text{se } v_0 > 0.$$

A explicação física é a seguinte: uma velocidade inicial positiva confere energia cinética adicional ao sistema, aumentando assim a amplitude máxima em relação ao deslocamento inicial.

2. No caso da equação do pêndulo (5), o período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

é independente da amplitude de oscilação. Esta propriedade, descoberta por Galileu e posteriormente estudada por Newton, teve grande importância histórica, pois permitiu não só a construção de relógios de pêndulo com elevada precisão, como também a determinação experimental do valor da aceleração da gravidade.

3. Sendo a velocidade dada por

$$v(t) = y'(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t - \varphi),$$

esta é nula nas posições de deslocamento máximo ($y = \pm A$) e assume valor máximo na posição de equilíbrio ($y = 0$). A explicação física é a seguinte: a velocidade atinge o seu valor máximo ao passar pelo ponto médio, pois toda a energia potencial acumulada nas extremidades foi convertida em energia cinética. Nos extremos, a velocidade é nula, já que, nesse instante, a energia encontra-se totalmente armazenada como potencial. $\square$

Oscilador harmónico amortecido

A equação característica de (2) é

$$r^2 + 2\nu\omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega_0^2}.$$

Neste caso, considerar as seguintes situações: **amortecimento forte** ($\nu > \omega_0$), **amortecimento crítico** ($\nu = \omega_0$) e **amortecimento oscilatório** ($\nu < \omega_0$).

1. **Amortecimento forte (ou superamortecido):** $\nu > \omega_0$. Neste caso, a equação característica possui duas raízes reais distintas e negativas, e o deslocamento é dado por

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega_0^2} < 0.$$

A solução mostra que o decaimento do deslocamento é monótono, sendo dominado pela exponencial associada à raiz menos negativa (r_1), que determina a velocidade com que o sistema se aproxima do equilíbrio.

2. **Amortecimento crítico (ou criticamente amortecido):** $\nu = \omega_0$. Neste caso, a equação característica possui uma raiz dupla negativa $r = -\nu = -\omega_0$, e o deslocamento é dado por

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t}.$$

A velocidade é

$$v(t) = y'(t) = (C_2 - \omega_0(C_1 + C_2 t)) e^{-\omega_0 t},$$

e o deslocamento atinge um único máximo em

$$t_{\max} = -\frac{C_1}{C_2} > 0, \quad \text{se } C_1 C_2 < 0.$$

Assim, quando $C_1 C_2 < 0$, o deslocamento cresce inicialmente até $t_{\max}$ e depois decresce monotonamente em direção ao equilíbrio. O termo linear $C_2 t$ garante que o sistema atinja o equilíbrio no menor tempo possível sem oscilações.

3. **Amortecimento oscilatório (ou subamortecido):** $\nu < \omega_0$. Neste caso, a equação característica possui raízes complexas conjugadas

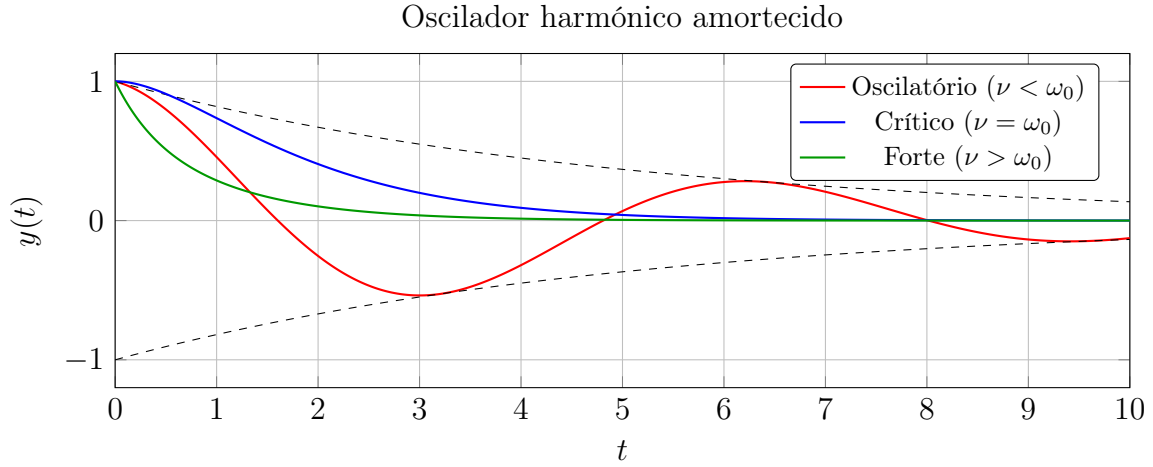
$$r_{1,2} = -\nu \pm \omega_d i, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2} \quad (\text{frequência angular amortecida}),$$

e o deslocamento é dado por

$$y(t) = e^{-\nu t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) = A e^{-\nu t} \cos(\omega_d t - \varphi),$$

com a amplitude A e a fase φ dadas por (7). A solução mostra que o deslocamento oscila, atingindo vários máximos e mínimos de amplitude decrescente, aproximando-se gradualmente do equilíbrio devido ao factor exponencial $e^{-\nu t}$.

A figura seguinte mostra o comportamento de um oscilador linear com diferentes níveis de amortecimento: oscilatório/subamortecido ($\nu < \omega_0$, vermelho), criticamente amortecido ($\nu = \omega_0$, azul) e forte/superamortecido ($\nu > \omega_0$, verde).



No caso oscilatório/subamortecido, o sistema oscila em torno do ponto de equilíbrio, com amplitude decrescendo gradualmente, delimitada pelo **envelope** exponencial $\pm A e^{-\nu t}$ (a tracejado na figura), evidenciando que o retorno ao equilíbrio é retardado.

No caso criticamente amortecido, o sistema retorna ao equilíbrio no menor tempo possível sem oscilar, correspondendo ao decaimento mais rápido permitido para um sistema linear.

No caso forte/superamortecido, não há oscilações, mas o retorno ao equilíbrio é mais lento do que no caso crítico, pois um dos termos exponenciais decai mais devagar, dominando o comportamento a longo prazo; o envelope exponencial mostra claramente a diminuição gradual da amplitude.

Oscilador harmónico forçado

Consideremos a equação do oscilador harmónico forçado (4) sem amortecimento ($\nu = 0$)

$$y'' + \omega_0^2 y = E_0 \cos(\omega t), \quad (8)$$

onde E_0 é a amplitude da força aplicada e ω a frequência da excitação.

A solução geral é da forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

onde

$$y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t).$$

é a solução homogênea e $y_p(t)$ é uma solução particular. Usando o método do polinómio anulador (ou o método da variação das constantes) é possível provar (ver exercício no final da aula) que

$$y_p(t) = \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t), \quad \text{caso } \omega_0^2 \neq \omega^2, \quad (9)$$

e

$$y_p(t) = \frac{E_0}{2\omega_0} t \sin(\omega t), \quad \text{caso } \omega_0^2 = \omega^2. \quad (10)$$

Nota 3 (Sobreposição de dois movimentos) *Note-se que, no caso $\omega \neq \omega_0$, a solução geral de (8) pode ser escrita na forma*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

A solução escrita nesta forma mostra que ela resulta da composição de dois movimentos: o movimento livre $y_h(t)$, onde não há forças externas e que corresponde ao movimento harmônico simples, com um movimento $y_p(t)$ correspondente à solução da equação (8) com condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$. Esse movimento pode ser periódico (caso ω/ω_0 seja racional) ou quasi-periódico (caso ω/ω_0 seja irracional). $\square$

Batimento e ressonância

Quando duas ondas com frequências muito próximas se somam, surge um fenômeno chamado **batimento**, caracterizado por uma oscilação rápida modulada por um envelope lento. Um exemplo do dia a dia é tocar duas cordas de guitarra afinadas quase na mesma frequência, como 440 Hz e 442 Hz. O ouvido percebe um som pulsante, alternando entre sons mais e menos intensos. Outro exemplo prático é sintonizar um rádio analógico ligeiramente fora da frequência de uma estação, produzindo um som modulante audível.

Matematicamente, para uma força externa $F_0 \cos(\omega t)$ atuando sobre um sistema de segunda ordem com frequência natural ω_0 , com $\omega \approx \omega_0$, uma solução particular é dada por (como foi visto na nota anterior)

$$y_p(t) = \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)).$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$, obtemos

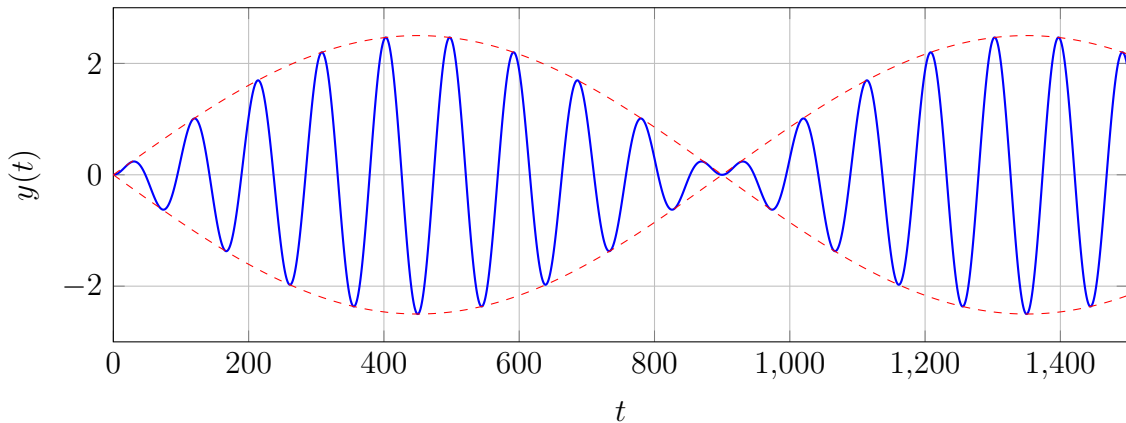
$$y(t) = \frac{2E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right),$$

onde a frequência rápida $(\omega_0 + \omega)/2$ determina a oscilação principal, e a diferença de frequências define a modulação lenta do envelope

$$A(t) = \frac{2E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right).$$

A figura seguinte mostra o fenômeno de batimento, com uma frequência rápida modulada por uma envelope de frequência lenta (a tracejado na figura).

Fenômeno de batimento: onda modulada com envelope de frequência lenta



A amplitude da oscilação forçada aumenta muito quando $\omega \approx \omega_0$. Quando a frequência da força externa coincide exactamente com a frequência natural do sistema, isto é, quando $\omega = \omega_0$, ocorre um fenómeno conhecido como **ressonância**.

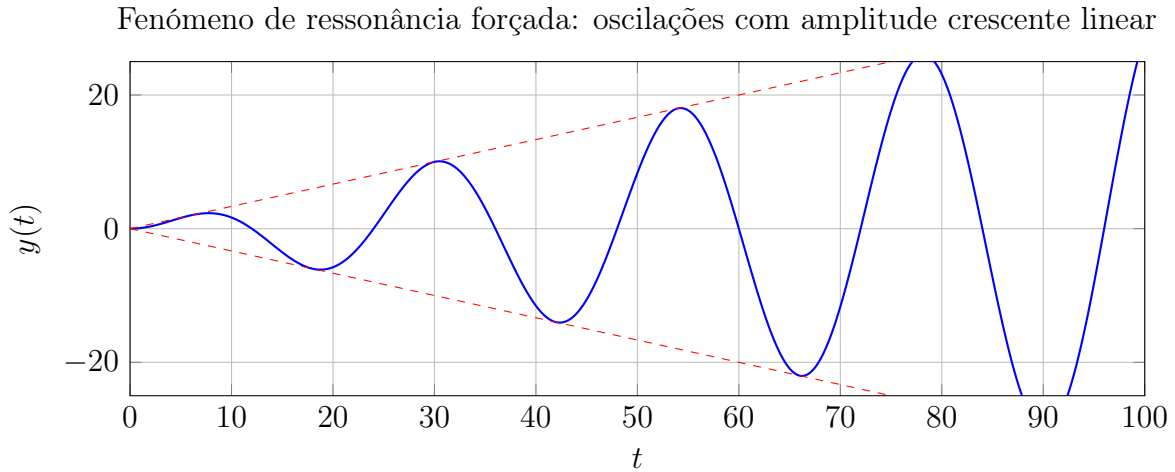
Matematicamente, para uma força externa $F_0 \cos(\omega t)$ atuando sobre um sistema de segunda ordem com frequência natural ω_0 , com $\omega = \omega_0$, uma solução geral é dada por (como foi visto em (10))

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{E_0}{2\omega_0} t \sin(\omega t).$$

Como se pode ver, a solução consiste na sobreposição de um harmónico simples com um movimento oscilatório de amplitude crescente linear

$$A(t) = \frac{E_0}{2\omega_0} t.$$

A figura seguinte ilustra, claramente, o fenómeno de ressonância com o crescimento linear da amplitude da onda (evidenciado a tracejado na figura).



Um exemplo histórico clássico de ressonância é a ponte de Tacoma Narrows, construída em 1940. Ventos fortes produziram impulsos periódicos muito próximos da frequência natural da estrutura, amplificando progressivamente as oscilações e gerando vibrações enormes que culminaram no colapso da ponte. Situações mais quotidianas também ilustram o fenómeno: empurrar um baloiço sempre no momento certo aumenta a amplitude do movimento sem esforço adicional, exactamente porque a frequência do impulso coincide com a frequência natural do sistema. Instrumentos musicais funcionam de forma semelhante, pois cordas ou tubos vibram intensamente quando excitados nas suas frequências naturais, aumentando a sonoridade sem necessidade de energia extra.

Exercícios

1. Resolva $y'' + 9y = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Determine o período de oscilação.
2. Para $y'' + 4y' + 4y = 0$, identifique o tipo de amortecimento e escreva a solução geral.
3. Resolva $y'' + 2y' + 2y = 0$ e descreva o comportamento da solução ao longo do tempo (caso subamortecido).

4. Diga qual o tipo de amortecimento do movimento descrito pelo problema de condição inicial $y'' + 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, escreva a sua solução e descreva o comportamento da oscilação ao longo do tempo.
5. Considere o sistema massa-mola submetido a uma força externa periódica de amplitude F_0 (N) e frequência ω (rad/s), descrito pela equação do oscilador harmônico forçado (4).

(a) Mostre que a solução geral pode ser escrita como

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

onde $y_h(t)$ é a solução da equação homogênea

$$y_h''(t) + 2\nu y_h'(t) + \omega_0^2 y_h(t) = 0,$$

e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação forçada.

(b) Determine explicitamente $y_p(t)$ nos casos seguintes (comparar com (9) e (10)).

i. Não amortecido ($\nu = 0$):

$$y_p(t) = \begin{cases} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t), & \omega \neq \omega_0, \\ \frac{E_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), & \omega = \omega_0 \text{ (ressonância)}. \end{cases}$$

ii. Amortecido ($\nu > 0$):

$$y_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\nu\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \varphi = \arctan \frac{2\nu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Neste caso, não ocorre crescimento ilimitado da amplitude.

- (c) Comente como a relação entre a frequência da força externa ω e a frequência natural ω_0 do sistema influencia a amplitude da oscilação em ambos os casos.
6. Considere o oscilador harmônico forçado (4) com amortecimento ($\nu > 0$).

(a) Mostre que a amplitude (ver exercício anterior)

$$A(\omega_0) = \frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\nu\omega)^2}}$$

é máxima quando $\omega_0 = \omega_t$, com ω_t a chamada **frequência de ressonância amortecida**

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\nu^2}, \quad (\text{para } 0 < \nu < \omega_0/\sqrt{2}).$$

(b) Mostre que a amplitude máxima é

$$A(\omega_r) = \frac{E_0}{2\nu\sqrt{\omega_0^2 - \nu^2}}$$

e conclua que quanto menor o coeficiente de amortecimento ν , maior é a amplitude. Em particular, quando $\nu \rightarrow 0$, $A(\omega_r) \rightarrow +\infty$. Nos problemas reais existe sempre algum amortecimento $\nu \neq 0$, podendo ser pequeno.

7. Considere um oscilador massa-mola submetido a uma força externa periódica, descrito pelo problema de condição inicial

$$y''(t) + 0,4 y'(t) + 9 y(t) = 5 \cos(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- Escreva a solução geral $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, indicando a solução homogênea $y_h(t)$.
- Determine as constantes da solução homogênea, usando as condições iniciais.
- Determine a solução particular $y_p(t)$ da equação.
- Calcule e represente graficamente $y(t)$ para $t \in [0, 10]$. Comente sobre o efeito do amortecimento na amplitude da oscilação.

8. Resolva

$$y'' + 0,4y' + 4y = 5 \cos(2t - \pi/6),$$

encontrando a amplitude e a fase da resposta estacionária. Forneça a expressão para $y_p(t) = C \cos(2t - \varphi)$ e calcule C e φ .

9. Considere a equação (4) com $\omega_0 = 2$, $\nu = 0,25$, $\omega = 1,5$ e $E_0 = 2$. Para as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, determine explicitamente a resposta completa $y(t)$, decompondo-a numa componente transiente e uma componente estacionária. Calcule também o tempo aproximado de decaimento da componente transiente (usando $e^{-\nu t}$ como referência).

10. Considere o oscilador massa-mola com amortecimento e uma força externa

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- Determine a solução geral da equação homogênea.
- Encontre uma solução particular.
- Escreva a solução do problema de condição inicial e descreva o comportamento do movimento ao longo do tempo.

11. Para o sistema massa-mola não amortecido descrito pela equação

$$my'' + ky = 0,$$

considere a **energia total**

$$E(t) = T(t) + V(t) = \frac{1}{2}m(y'(t))^2 + \frac{1}{2}ky^2(t),$$

onde $T(t)$ é a energia cinética e $V(t)$ a energia potencial.

- Mostre que $E(t)$ é **conservada**, ou seja, não depende do tempo.
- Considerando $m = 1$, $k = 9$ e $y(t) = \cos(3t)$, calcule explicitamente $T(t)$, $V(t)$ e $E(t)$ e verifique que a energia total permanece constante.

12. **Circuito RLC (coeficientes constantes).** O circuito RLC é um modelo fundamental em física e engenharia elétrica, utilizado para estudar osciladores elétricos (como rádios, filtros e sensores), fenômenos de ressonância, antenas, sistemas mecânicos e biológicos, bem como o comportamento transiente em circuitos de energia e telecomunicações.

Considere um circuito RLC formado por uma resistência R (em ohms, Ω), um indutor L (em henry, H) e um condensador C (em farads, F), percorrido por uma corrente $i(t)$ (em amperes, A). Denotando por $q(t)$ a carga no condensador (em coulombs, C), temos $i(t) = \dot{q}(t)$. Aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff ao circuito, obtemos

$$V_R + V_L + V_C = 0,$$

onde

$$V_R = Ri, \quad V_L = L \frac{di}{dt}, \quad V_C = \frac{q}{C}.$$

Substituindo $i = \dot{q}$, a equação diferencial fundamental do circuito é

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Dividindo por L e introduzindo os parâmetros usuais do oscilador amortecido,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\nu = \frac{R}{L},$$

obtem-se a forma clássica

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

- (a) Mostre que a equação acima descreve um sistema análogo ao oscilador massa-mola amortecido

$$my'' + cy' + ky = 0,$$

identificando $m \leftrightarrow L$, $c \leftrightarrow R$ e $k \leftrightarrow 1/C$.

- (b) Explique o significado físico de cada termo: q/C como força restauradora do condensador, $R\dot{q}$ como dissipação de energia na resistência e $L\ddot{q}$ como energia magnética armazenada no indutor.
- (c) Defina a energia total do circuito

$$E(t) = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2C}q^2,$$

e mostre que a sua taxa de variação é negativa devido à resistência, isto é,

$$\frac{dE}{dt} = -R\dot{q}^2 \leq 0.$$

- (d) Considere um circuito com $L = 1$ H, $C = 0.25$ F e $R = 1$ Ω . Determine ω_0 e ν , e resolva a equação diferencial para $q(t)$ assumindo condições iniciais $q(0) = 1$ C e $\dot{q}(0) = 0$ A.
- (e) Calcule a energia $E(t)$ para o circuito anterior e descreva qualitativamente a dissipação de energia ao longo do tempo.

Aula 13: Transformadas de Laplace

A transformada de Laplace é um método importante para a solução de problemas que envolvem equações diferenciais, especialmente lineares, e é amplamente utilizada em engenharia, física e matemática aplicada. A teoria geral foi desenvolvida por Oliver Heaviside (1850–1925), que introduziu técnicas operacionais para lidar com equações diferenciais de forma mais prática.

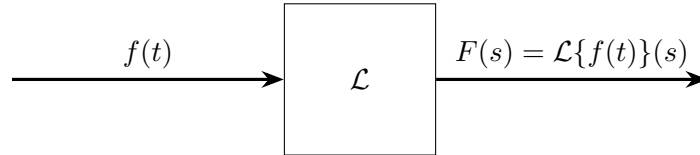
A ideia consiste em resolver equações diferenciais como se fossem equações algébricas. Por exemplo, dada a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 5y = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 4D + 5)y = f(t),$$

seria ótimo que a sua solução fosse dada por algo parecido com

$$y(t) = \frac{f(t)}{D^2 + 4D + 5}.$$

Mas isto não faz qualquer sentido! No entanto, pode fazer sentido *algebrizar* a equação diferencial. A ideia de Pierre-Simon Laplace (1749–1827) foi precisamente essa: definir uma caixa que transforme uma equação diferencial numa equação algébrica.



As principais características que a transformada deve respeitar são: (i) ser linear; (ii) destruir derivadas; ser reversível, isto é, existir a transformada inversa.

Definição de transformada de Laplace

A transformada de Laplace faz parte do grupo das chamadas transformadas integrais. Uma transformada integral é qualquer transformação linear $\mathcal{T}$ da seguinte forma

$$\mathcal{T}[f(t)](s) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)K(t, s) dt.$$

A transformada integral tem como entrada uma função f e o resultado é outra função $F = \mathcal{T}\{f\}$. A cada transformada integral corresponde a uma diferente escolha da função K , que é chamada o núcleo da transformada, e dos limites de integração t_1 e t_2 . A transformada de Laplace (que iremos considerar neste curso) costuma ser mais conveniente para problemas com dependência temporal e a transformada de Fourier mais conveniente para problemas com dependência espacial.

Definição 1 (Transformada de Laplace) Dada uma função $f(t)$ definida no intervalo $[0, +\infty)$, a sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

desde que o integral seja convergente para, pelo menos, um valor de s . O conjunto dos valores $s \in \mathbb{R}$ onde isso é verdadeiro é chamado de domínio de convergência de $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Frequentemente, representa-se a transformada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou simplesmente por $\mathcal{L}\{f\}$.

Nota 1 Também se poderia definir a transformada de Laplace para funções de valores complexos, com a variável $s \in \mathbb{C}$. Contudo, para os objetivos deste curso, basta considerar apenas o caso real. $\square$

Nota 2 O domínio de convergência de $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ é, geralmente, um intervalo da forma $(s_0, +\infty)$, onde $s_0 \in \mathbb{R}$ depende do crescimento de $f(t)$. Para muitas funções usuais, tais como as funções limitadas ou de crescimento polinomial, $s_0 = 0$, e portanto a transformada de Laplace existe para todo $s > 0$. $\square$

Exemplo 1 (Função exponencial) A transformada de Laplace é, normalmente, mais simples que a função. Repare-se, por exemplo, que

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha. \quad \square$$

Exemplo 2 (Funções de Heaviside) A transformada de Laplace é, normalmente, mais regular que a função. Considere-se, as funções de Heaviside (ou de **degrau unitário**)

$$H(t) = H^+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad e \quad H^-(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

e seja, para $a \geq 0$,

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases} \quad e \quad H_a^-(t) = H^-(t-a) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ 1, & t > a. \end{cases}$$

Apesar de serem funções descontínuas, é possível definir a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\}(s) = \mathcal{L}\{H_a^-(t)\}(s) = \int_a^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T e^{-st} dt = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad s > 0, \quad (1)$$

que é uma função contínua em $\mathbb{R}^+$. Para a **função indicatriz**¹ do intervalo $[a, b]$, com $0 \leq a < b < \infty$, definida por

$$H_{[a,b]}(t) = H_a(t) - H_b^-(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b], \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

tem-se que

$$\mathcal{L}\{H_{[a,b]}(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} H_{[a,b]}(t) e^{-st} dt = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}, \quad s > 0. \quad \square$$

Embora muitas funções usuais tenham transformada de Laplace, existem funções para as quais o integral impróprio que define a sua transformada não converge para nenhum valor de s real. Isto pode ocorrer por diferentes motivos. Por exemplo, a função pode não ser integrável próximo de $t = 0$, apresentando uma singularidade que torna o integral divergente, como acontece com $f(t) = \frac{1}{t}$. Outra possibilidade é que a função cresça demasiado rapidamente quando $t \rightarrow \infty$, mais rápido que qualquer exponencial linear da forma $e^{s_0 t}$, impedindo a convergência do integral, como acontece com $f(t) = e^{t^2}$.

No exercício seguinte confirmamos que estas funções que não possuem transformada de Laplace.

¹As notações mais usuais para a função indicatriz são $\chi_{[a,b]}(t)$ (na teoria da medida ou probabilidades) ou $\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ (em aplicações ou análise funcional). Neste curso, usaremos $H_{[a,b]}(t)$ para evidenciar a relação com a função de Heaviside.

Exercício 1. Mostre que as funções $f(t) = \frac{1}{t}$ e $f(t) = e^{t^2}$ não possuem transformada de Laplace.

Resolução:

1. **Função** $f(t) = \frac{1}{t}$. Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^{-1}\}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt, \quad s > 0.$$

Podemos separar o integral em duas partes

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt = \int_0^1 \frac{e^{-st}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-st}}{t} dt. \quad (2)$$

Para o primeiro integral, tem-se que $e^{-st} \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0^+$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$,

$$e^{-st} \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto, por comparação,

$$\int_0^1 \frac{e^{-st}}{t} dt > \int_0^\delta \frac{e^{-st}}{t} dt \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty.$$

Como o primeiro integral em (2) diverge, a soma dos dois integrais também diverge, independentemente do valor do segundo. Portanto, a transformada de Laplace não existe para $f(t) = 1/t$. A transformada de Laplace não existe pois a função não é integrável no intervalo $[0, 1]$.

2. **Função** $f(t) = e^{t^2}$. Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{t^2}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{t^2} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2-st} dt.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t^2-st} = +\infty,$$

o integral diverge e, portanto, a transformada de Laplace de $f(t) = e^{t^2}$ não existe. A transformada de Laplace não existe pois a função cresce mais rapidamente que qualquer exponencial linear. $\square$

Quando é que existe a transformada de Laplace?

Notemos que, de acordo com a definição de transformada de Laplace, a função f não pode crescer mais rápido do que as exponenciais lineares. Se tal acontecer, o integral impróprio é divergente. Nesse sentido, podemos dizer (como vimos no exercício anterior) que nem todas as funções admitem transformada de Laplace.

Definição 2 (Função admissível) Uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada admissível se satisfaz:

1. f é localmente integrável (ou contínua por segmentos) em $[0, +\infty)$;
2. f é de ordem exponencial, isto é, existem constantes $M > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$ e $T \geq 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}, \quad \forall t \geq T.$$

Teorema 1 (Existência da transformada de Laplace) Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função admissível. Então, para todo $s \in \mathbb{R}$, com $s > s_0$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

existe, converge absolutamente, e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 0.$$

Demonstração: Temos que

$$\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt = \int_0^T |f(t) e^{-st}| dt + \int_T^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt.$$

Como f é contínua por segmentos, ela é localmente integrável em $[0, T]$, para todo $T > 0$. Por seu lado, como é de ordem exponencial

$$|f(t) e^{-st}| \leq |f(t)| e^{-st} \leq M e^{-(s-s_0)t}, \quad s > s_0.$$

Então

$$\int_T^{+\infty} |f(t) e^{-st}| dt \leq \int_T^{+\infty} M e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0} e^{-(s-s_0)T} < +\infty, \quad s > s_0,$$

garantindo a convergência absoluta do integral. Portanto, $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe para todo $s > s_0$, e

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}(s)| \leq \int_0^T |f(t) e^{-st}| dt + \frac{M}{s-s_0} e^{-(s-s_0)T} \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow +\infty. \quad \square$$

Exercício 2. Mostre que as funções do tipo

$$t^n, \quad e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

com $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, são admissíveis e, a partir disso, conclua que as soluções de equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes possuem transformada de Laplace.

Resolução:**1. Verificação da admissibilidade de t^n .**

A função t^n é contínua em $[0, \infty)$, pelo que é contínua por segmentos. Para verificar a ordem exponencial, devemos mostrar que existe $s_0 > 0$ tal que $|t^n| \leq M e^{s_0 t}$ para t suficientemente grande, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^{s_0 t}} = 0.$$

Aplicando a regra de L'Hospital n vezes, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^{s_0 t}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n!}{s_0^n e^{s_0 t}} = 0.$$

Portanto, t^n cresce mais lentamente que qualquer exponencial $e^{s_0 t}$ e é de ordem exponencial, ou seja, é admissível.

2. Verificação da admissibilidade de $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

As funções $e^{\alpha t}$, $\cos(\beta t)$ e $\sin(\beta t)$ são contínuas, pelo que os seus produtos também são contínuos por segmentos. Para todo $t \geq 0$, temos

$$|e^{\alpha t} \cos(\beta t)| \leq e^{\alpha t}, \quad |e^{\alpha t} \sin(\beta t)| \leq e^{\alpha t},$$

pelo que ambas as funções são de ordem exponencial e, portanto, admissíveis.

3. Linearidade e soma de funções admissíveis.

A transformada de Laplace é linear, isto é,

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}(s),$$

para quaisquer constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e funções admissíveis f, g . A soma finita de funções admissíveis mantém a continuidade por segmentos e a ordem exponencial. De facto, se $|f(t)| \leq M_1 e^{s_{01} t}$ e $|g(t)| \leq M_2 e^{s_{02} t}$, então

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq M_1 e^{s_{01} t} + M_2 e^{s_{02} t} \leq M e^{s_0 t},$$

com $M = M_1 + M_2$ e $s_0 = \max(s_{01}, s_{02})$.

4. Conclusão para soluções de equações diferenciais homogêneas.

As soluções de equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes têm a forma

$$y(t) = \sum_i P_i(t) e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) + \sum_j Q_j(t) e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t),$$

onde $P_i(t), Q_j(t)$ são polinómios (t^k). Cada termo é admissível, como demonstrado nos passos anteriores, e pela linearidade e soma finita, toda a solução é admissível.

Conclusão: Todas as soluções de equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes possuem transformada de Laplace. $\square$

A seguir apresentamos exemplos de funções que possuem transformada de Laplace (funções admissíveis) e funções que não satisfazem os critérios de admissibilidade.

Funções admissíveis	
Função $f(t)$	Domínio de convergência
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$s > 0$
$e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$	$s > \alpha$
$\sin(\beta t), \omega \in \mathbb{R}$	$s > 0$
$\cos(\beta t), \omega \in \mathbb{R}$	$s > 0$
$H(t - a), a \geq 0$	$s > 0$
Funções não admissíveis	
Função $f(t)$	Motivo de não admissibilidade
e^{t^2}	Cresce mais rápido que exponencial linear
$\tan t$	Discontinuidade infinita em múltiplos de $\pi/2$
$\frac{1}{t}, t \rightarrow 0^+$	Não integrável em $t = 0$

No exercício seguinte pretende-se determinar explicitamente a transformada de Laplace de várias funções usuais, incluindo funções constantes, polinomiais, exponenciais e trigonométricas.

Exercício 3. Determine a transformada de Laplace das seguintes funções

$$f(t) = 1, \quad f(t) = e^{\alpha t}, \quad f(t) = t, \quad f(t) = t^n, \quad f(t) = \cos(\beta t), \quad f(t) = \sin(\beta t),$$

indicar explicitamente a região de convergência em cada caso.

Resolução:

1. **Transformada de $f(t) = 1$.** Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt, \quad s > 0.$$

Então

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-sT}}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

2. **Transformada de $f(t) = e^{\alpha t}, s > \alpha$.** Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt, \quad s > \alpha.$$

Então

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\}(s) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-(s-\alpha)t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)} \right]_0^T = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > \alpha.$$

3. **Transformada de $f(t) = t$.** Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt, \quad s > 0.$$

Integrando por partes

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} t \right]_0^T + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt.$$

Aplicando a regra de L'Hospital

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{e^{sT}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{s e^{sT}} = 0.$$

Então

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

4. **Transformada de $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.** Vamos fazer a prova por indução.

Para $n = 1$ vimos que $\mathcal{L}\{t\}(s) = 1/s^2$. Suponhamos agora, por hipótese de indução, que $\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = (n-1)!/s^n$. Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt, \quad s > 0.$$

Integrando por partes

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} t^n \right]_0^T + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt.$$

Aplicando regra de L'Hospital n vezes,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^n}{e^{sT}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{n!}{s^n e^{sT}} = 0, \quad s > 0,$$

então, usando a hipótese de indução,

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

5. **Transformada de $f(t) = \cos(\beta t)$ e $f(t) = \sin(\beta t)$.** Pela definição da transformada de Laplace

$$I = \mathcal{L}\{\cos(\beta t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\beta t) dt, \quad s > 0,$$

e

$$J = \mathcal{L}\{\sin(\beta t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\beta t) dt, \quad s > 0.$$

Integrando por partes, temos que

$$I = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cos(\beta t) \right]_0^T - \frac{\beta}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(\beta t) dt$$

e

$$J = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \sin(\beta t) \right]_0^T + \frac{\beta}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\beta t) dt.$$

Como as funções trigonométricas são limitadas, sai

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \sin(\beta t) \right]_0^T = -\frac{1}{s} \quad \text{e} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \sin(\beta t) \right]_0^T = 0.$$

Então, ficamos com o sistema em I e J

$$sI = 1 - \beta J, \quad sJ = \beta I,$$

o que permite concluir

$$I = \frac{s}{s^2 + \beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{\cos(\beta t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad s > 0,$$

e

$$J = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{\sin(\beta t)\}(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad s > 0. \quad \square$$

Nota 3 (Relação entre transformada de Laplace e factorial) *Do exercício anterior, temos que, para $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Em particular, tomando $s = 1$, obtém-se

$$\mathcal{L}\{t^n\}(1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!. \quad \square$$

Definição 3 (Função Gama) *Definimos a função Gama $\Gamma(x)$ para $x > 0$ como*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du.$$

Para inteiros $m \in \mathbb{N}$, verifica-se que

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = (n-1)!.$$

Portanto, a função Gamma é uma extensão do factorial para números reais positivos.

Nota 4 (Transformada de Laplace em termos da função Gama) *A partir da definição da função Gama, podemos expressar a transformada de Laplace de t^{x-1} , para $x > 0$, como*

$$\mathcal{L}\{t^{x-1}\}(s) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-st} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $u = st$, $du = s dt$, obtemos

$$\mathcal{L}\{t^{x-1}\}(s) = \frac{1}{s^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(x)}{s^x}, \quad s > 0.$$

Assim, a transformada de Laplace de t^{x-1} pode ser escrita, elegantemente, em termos da função da função Gama

$$\mathcal{L}\{t^{x-1}\}(s) = \frac{\Gamma(x)}{s^x}, \quad s > 0, \quad x > 0.$$

A função Gama permite, assim, generalizar as transformadas de Laplace de potências inteiras para potências reais. $\square$

É possível que funções não admissíveis admitam transformadas de Laplace. Esta situação será ilustrada no exercício seguinte.

Exercício 4. Mostre que, embora não sejam admissíveis no sentido clássico, as funções

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad f(t) = \ln t$$

possuem transformadas de Laplace. Utilize a função Gama para justificar os resultados.

Resolução:

1. **Transformada de Laplace de $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.** Escrevemos $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$.

Pela nota anterior sobre a função Gama, temos, para $x > 0$,

$$\mathcal{L}\{t^{x-1}\}(s) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-st} dt = \frac{\Gamma(x)}{s^x}.$$

Tomando $x = 1/2$ e atendendo a que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, concluímos

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0.$$

Portanto, a transformada de Laplace existe, mesmo que $1/\sqrt{t}$ não seja admissível (não é de ordem exponencial próxima de zero em $t \rightarrow 0^+$).

2. **Transformada de Laplace de $f(t) = \ln t$.** Começamos com a transformada de Laplace de t^x , dada por

$$\mathcal{L}\{t^x\}(s) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-st} dt = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}, \quad x > -1, \quad s > 0.$$

Derivando ambos os lados em relação a x

$$\mathcal{L}\{t^x \ln t\}(s) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \right) = \frac{\Gamma'(x+1) - \Gamma(x+1) \ln s}{s^{x+1}}.$$

Fazendo $x = 0$, temos

$$\mathcal{L}\{\ln t\}(s) = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}, \quad s > 0,$$

com $\gamma \approx 0.5772$ a chamada **constante de Euler-Mascheroni**. Portanto, também $\ln t$ possui transformada de Laplace, apesar de não ser admissível no sentido clássico. $\square$

Transformada inversa de Laplace

Passamos agora a definir a transformada inversa de Laplace, que reconstrói a função original a partir de sua representação no domínio da frequência, expressa pela variável s .

Definição 4 (Transformada inversa de Laplace) *Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de uma função $f(t)$, isto é,*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

A transformada inversa de Laplace é a operação que associa a $F(s)$ a $f(t)$, escrita como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Vamos agora estudar as condições sob as quais a transformada de Laplace possui uma inversa única. Sejam $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções admissíveis tais que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad \forall s > s_0.$$

Então, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$\int_0^{+\infty} (f(t) - g(t)) e^{-st} dt = 0, \quad \forall s > s_0.$$

1. Funções contínuas: se $f - g$ é contínua, o integral ser nulo implica

$$f(t) - g(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = g(t) \quad \text{pontualmente.}$$

2. Funções seccionalmente contínuas: se $f - g$ é apenas seccionalmente contínua, o integral ser nulo implica que

$$f(t) = g(t) \quad \text{quase sempre em } t \geq 0.$$

Definição 5 (Funções iguais quase sempre) *Duas funções f e g dizem-se iguais quase sempre (ou iguais quase por toda a parte) quando*

$$\{t \geq 0 : f(t) \neq g(t)\} \quad \text{tem medida nula.}$$

Escreve-se

$$f \sim g \quad \text{ou} \quad f = g \text{ q.s..}$$

Para qualquer função f , denota-se por

$$[f] = \{g : g \sim f\}$$

a classe de todas as funções que coincidem com f quase sempre. Assim, a inversa da transformada de Laplace identifica não uma função pontual, mas a classe de equivalência

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \quad \Rightarrow \quad f \sim g.$$

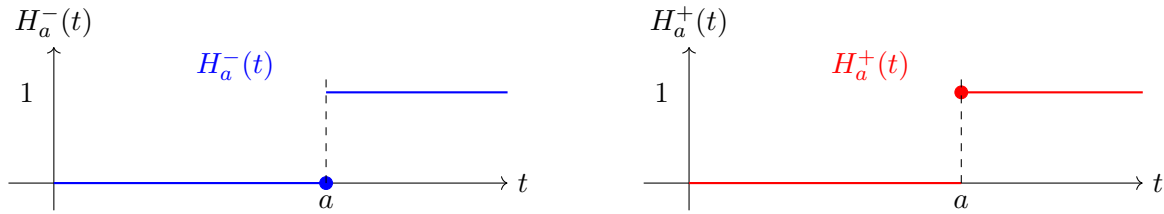
Exemplo 3 (Função degrau unitário) A função degrau unitário é dada por

$$H_a(t) = H_a^+(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

A sua transformada de Laplace é, como vimos, dada por (1). Se alterarmos o valor da função em apenas um ponto $t = a$, por exemplo, considerando

$$H_a^-(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ 1, & t > a, \end{cases}$$

temos $H_a^- \sim H_a^+$ e, como se pode ver facilmente, $\mathcal{L}\{H_a^-(t)\} = \mathcal{L}\{H_a^+(t)\}$.



A transformada inversa identifica a classe $[H_a]$, não um representante pontual. $\square$

De forma geral, a transformada de Laplace é insensível a alterações de uma função em conjuntos de medida nula. Isto significa que todas as funções que diferem apenas em um número finito de pontos, ou nos pontos de descontinuidade de uma função seccionalmente contínua, têm a mesma transformada de Laplace. Por outras palavras, se $f \sim g$ (isto é, f e g coincidem quase sempre), então $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$. Esta propriedade reforça a ideia de que a transformada de Laplace depende apenas da equivalência quase sempre das funções e não de valores isolados ou de descontinuidades pontuais.

Exercícios

1. Demonstre os seguintes resultados.

- Teorema do Valor Inicial.** Se f e f' são funções admissíveis, então existe o limite $f(0^+)$ e verifica-se $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$.
- Teorema do Valor Final.** Se f e f' são funções admissíveis e todos os pólos de $sF(s)$ são negativos (não existem pólos em $s = 0$ nem pólos positivos), então o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s)$.

2. (a) Mostre a **propriedade fundamental da função Gama**:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

(b) Usando a propriedade fundamental da função Gama, mostre que, para $x > 0$,

$$\mathcal{L}\{t^x\}(s) = \frac{x\Gamma(x)}{s^{x+1}}, \quad s > 0.$$

(c) Usando a função Gama, calcule $\mathcal{L}\{t^{1/2}\}(s)$, $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}(s)$, $\mathcal{L}\{t^{3/2}\}(s)$.

3. Calcule as transformadas de Laplace das funções mais comuns encontradas em aplicações de equações diferenciais, física e engenharia e que estão listadas na tabela seguinte.

Função $f(t)$	Transformada $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$t^{x-1}, \quad x > 0$	$\frac{\Gamma(x)}{s^x}, \quad s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad s > 0$
$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad s > 0$
$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}, \quad s > \beta $
$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}, \quad s > \beta $
$H_a(t)$ (Heaviside/degrau unitário)	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$\delta(t - a)$ (delta de Dirac)	$e^{-as}, \quad s \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, \quad s > 0$
$\ln t$	$-\frac{\gamma + \ln s}{s}, \quad s > 0$

4. Verifique se as seguintes funções são admissíveis para a transformada de Laplace:

(a) $f(t) = e^{2t}$; (b) $f(t) = e^{t^2}$; (c) $f(t) = \sin(t) + t^2$; (d) $f(t) = \ln(1 + t)$.

5. Determine as transformadas de Laplace das seguintes funções:

(a) $f(t) = 1 + \sin t$; (b) $f(t) = e^{-2t} \cos(3t)$; (c) $f(t) = t^2 + \cos(2t)$;

(d) $f(t) = e^{2t} + \sin(3t)$; (e) $f(t) = H(t - 2)$; (f) $f(t) = \delta(t - 3)$.

6. Determine as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções:

(a) $F(s) = \frac{1}{s - 4}, \quad s > 4$; (b) $F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}, \quad s > 0$;

(c) $F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}, \quad s > 0$; (d) $F(s) = \frac{6}{s^4}, \quad s > 0$.

Aula 14: Propriedades das transformadas de Laplace

Nesta aula, vamos explorar e demonstrar algumas propriedades essenciais das transformadas de Laplace e das suas inversas.

Teorema 1 (Linearidade) *Sejam f, g funções com transformada de Laplace definida numa região comum de s . Então*

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sejam F e G transformadas de Laplace de funções admissíveis f e g . Então,

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F(s) + c_2 G(s)\}(t) = c_1 f(t) + c_2 g(t) \text{ q.s.,} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: A demonstração resulta imediatamente da definição de transformada de Laplace e da sua inversa. $\square$

Exemplo 1 *Vamos calcular $\mathcal{L}\{3t + 5e^{2t}\}(s)$ e indicar o domínio de convergência. Pelo facto da transformada de Laplace ser linear*

$$\mathcal{L}\{3t + 5e^{2t}\}(s) = 3\mathcal{L}\{t\}(s) + 5\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s-2}.$$

Quanto ao domínio de convergência, temos que $s > 0$ para t e $s > 2$ para e^{2t} . Assim $s > 2$ é necessário para a soma. $\square$

Exercício 1. Calcule:

$$(a) \mathcal{L}\{\cosh(at)\}; (b) \mathcal{L}\{\sinh(at)\}; (c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}; (d) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{s^2+4s+3}\right\}.$$

Resolução: Para as transformadas de funções hiperbólicas e inversas (alíneas (a) e (b)), atendendo a que

$$\cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, \quad \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2},$$

e a que $\mathcal{L}\{e^{bt}\}(s) = \frac{1}{s-b}$, $s > b$, pela linearidade transformada obtemos

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|,$$

e

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|.$$

Para as funções racionais, considera-se a decomposição em fracções simples. Assim, para a alínea (c) temos

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} \Rightarrow 1 = A(s-1) + Bs.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, obtemos $A = -1, B = 1$. Logo

$$\frac{1}{s(s-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\}(t) = -1 + e^t.$$

Para a alínea (d), factorizamos o denominador $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$ e obtemos

$$\frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow 2s+5 = A(s+3) + B(s+1).$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, obtemos $A + B = 2, 3A + B = 5$, o que implica $A = \frac{3}{2}, B = \frac{1}{2}$. Portanto

$$\frac{2s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{3/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{s^2+4s+3}\right\}(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}. \quad \square$$

A seguir apresentamos a propriedade do deslocamento em s , que mostra como multiplicar por uma exponencial em t desloca a sua transformada de Laplace em s . É especialmente útil para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Teorema 2 (Deslocamento em s) Se f é uma função admissível e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad s-a \in D_F,$$

onde D_F é o domínio de definição de $F(s)$.

Demonstração: Pela definição de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t) dt = F(s-a). \quad \square$$

Nota 1 A propriedade anterior também é chamada de **translação no domínio da frequência**. Para além disso, ela também pode ser escrita na forma

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s-a))(t) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s-a))(t) = e^{at}\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t). \quad \square$$

Exemplo 2 Atendendo à propriedade de translação no domínio da frequência, sai imediatamente que

$$\mathcal{L}\{te^{5t}\}(s) = \frac{1}{(s-5)^2} \quad \text{e que} \quad \mathcal{L}\{e^{2t}\cos(3t)\}(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}. \quad \square$$

Exercício 2. Calcule:

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-2s-3}\right\}; \quad (b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+16}\right\}; \quad (c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}.$$

Resolução:

- (a) Completando o quadrado do denominador (também se poderia factorizar)

$$s^2 - 2s - 3 = (s - 1)^2 - 4 = (s - 1)^2 - 2^2.$$

Portanto

$$\frac{5}{s^2 - 2s - 3} = \frac{5}{(s - 1)^2 - 2^2}.$$

Atendendo à transformada de $\sinh(bt)$ (ver tabela),

$$\mathcal{L}\{\sinh(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2 - 2^2},$$

e aplicando o deslocamento em s ($s \mapsto s - 1$), obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2 - 2s - 3}\right\}(t) = \frac{5}{2} e^t \sinh(2t).$$

- (b) Atendendo à transformada de
- $\cos(bt)$
- (ver tabela),

$$\mathcal{L}\{\cos(4t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 16}$$

e aplicando o deslocamento em s ($s \mapsto s + 3$), obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 16}\right\}(t) = e^{-3t} \cos(4t).$$

- (c) Atendendo à transformada de
- t
- (ver tabelas),

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

e aplicando o deslocamento em s ($s \mapsto s + 1$), obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2}\right\}(t) = t e^{-t}. \quad \square$$

A seguir apresentamos a propriedade da transformada de Laplace das derivadas, que permite transformar equações diferenciais em equações algébricas, facilitando significativamente a sua resolução.

Teorema 3 (Primeira e segunda derivadas) *Seja f uma função diferenciável em $(0, \infty)$, com $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Então, se f' é admissível,*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0^+), \quad s \in D_F,$$

com $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t)$ e D_F o domínio de convergência de F . Se, adicionalmente, f'' existe e é admissível, então

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+), \quad s \in D_F.$$

Demonstração: Considerando a definição da transformada de Laplace e integrando por partes, temos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [e^{-st} f(t)]_0^T + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Como f é de ordem exponencial, o termo de fronteira $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} f(T)$ tende a zero, quando $s \in D_F$, enquanto o termo em 0 é $f(0^+)$. Logo,

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0^+), \quad s \in D_F.$$

Para a segunda derivada, aplicando a mesma fórmula a f' , temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) - f'(0^+) = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+), \quad s \in D_F. \quad \square$$

Nota 2 (Derivadas de ordem superior) As fórmulas para a transformada de derivadas podem ser estendidas a derivadas de ordem superior. Se $f^{(n)}$, com $n \geq 1$, existem e forem admissíveis, prova-se que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+), \quad s \in D_F. \quad \square$$

Exercício 3. Determine a solução dos seguintes problemas de condição inicial:

(a) $y' + 3y = 6e^{-2t}$, $y(0) = 1$.

(a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Resolução: Consideram-se dois passos: calcular a transformada $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$; calcular a transformada inversa $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$.

Vamos começar pela alínea (a).

1. **Calcular a transformada de Laplace** $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

Aplicando a transformada de Laplace à equação e usando $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$, temos

$$sY(s) - 1 + 3Y(s) = \frac{6}{s+2} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)} + \frac{1}{s+3}.$$

2. **Calcular a transformada inversa de Laplace** $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$.

Fazendo a decomposição em frações simples

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(s+3) + B(s+2),$$

e usando o método dos coeficientes indeterminados, obtemos $A = 6$, $B = -6$. Assim

$$Y(s) = \frac{6}{s+2} - \frac{5}{s+3} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 6e^{-2t} - 5e^{-3t}.$$

Consideremos agora a alínea (b).

1. **Calcular a transformada de Laplace** $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

Aplicando a transformada de Laplace à equação e usando $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$, $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$, temos

$$\mathcal{L}\{2y'' + y' - y\}(t) = \mathcal{L}\{t\} \Rightarrow s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = 1 + \frac{1}{s+1}.$$

Então

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

2. **Calcular a transformada inversa de Laplace** $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$.

Fazendo a decomposição em frações simples

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

e usando o método dos coeficientes indeterminados, obtemos $A = 1$ e $B = -1$.

Assim

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = e^{-t} - e^{-2t}. \quad \square$$

Se $f(t)$ for suficientemente suave e de crescimento controlado, a transformada de Laplace torna derivadas em produtos algébricos e regulariza funções localmente singulares. Em particular, temos a seguinte propriedade.

Teorema 4 (Diferenciação em s) Se f é uma função admissível e $t^n f(t)e^{-st}$ é integrável para $s \in D_F$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, então,

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s), \quad s \in D_F.$$

Demonstração: Pela definição de transformada de Laplace

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Como $(-t)^n f(t) e^{-st}$ é absolutamente integrável (porque f é admissível), o Teorema da Convergência Dominada¹ garante que se pode trocar a derivada com o integral. Então

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s), \quad s \in D_F. \quad \square$$

Nota 3 Esta propriedade é frequentemente descrita dizendo que a diferenciação em s (domínio da frequência) corresponde a multiplicar por potências de t (no domínio do tempo). Por isso, muitas vezes ela surge na forma

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s \in D_F.$$

Também por isso, se diz que a transformada de Laplace regulariza certos comportamentos da função, tornando-os mais tratáveis no domínio da frequência. $\square$

¹O Teorema da Convergência Dominada garante que, se $|f_n(t)| \leq g(t)$ com g integrável e $f_n \rightarrow f$ ponto a ponto, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(t) dt = \int_0^\infty f(t) dt$. Para a transformada de Laplace, justifica a troca de limite ou derivada com o integral, pois a função original da transformada de Laplace, $f(t)$, é admissível.

Exemplo 3 Queremos calcular $\mathcal{L}\{t^2 \sin t\}(s)$. Atendendo a que (ver tabelas)

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1},$$

pela propriedade anterior (com $n = 2$), sai que

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin t\}(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right).$$

Calculando as derivadas, obtém-se

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin t\}(s) = \frac{2(3s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^3}. \quad \square$$

Nota 4 A propriedade anterior também pode ser usada para calcular transformadas inversas na forma

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}(t) = (-1)^n t^n f(t). \quad \square$$

Exercício 4. Calcule $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \arctan \left(\frac{4}{s} \right) \right\} (t)$.

Resolução: O primeiro passo, consiste em identificar a propriedade a usar. Neste caso, vamos usar a propriedade anterior que diz que, para $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t) = -tf(t).$$

Assim, se conseguirmos derivar $F(s)$, podemos recuperar $tf(t)$. Derivando, temos

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \left(\arctan \left(\frac{4}{s} \right) \right) = \frac{1}{1 + 16/s^2} \left(-\frac{4}{s^2} \right) = -\frac{4}{s^2 + 16}.$$

Da propriedade da derivada em s

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t) = -tf(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{4}{s^2 + 16} \right\}(t).$$

Atendendo a que (ver tabelas)

$$\mathcal{L}\{\sin(4t)\}(s) = \frac{4}{s^2 + 16},$$

concluimos que

$$tf(t) = \sin(4t) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{\sin(4t)}{t}$$

e então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\arctan(4/s)\}(t) = \frac{\sin(4t)}{t}, \quad t > 0. \quad \square$$

A seguir apresentamos a propriedade da transformada de Laplace de um integral. Esta propriedade mostra que integrar uma função em t (domínio do tempo) corresponde a dividir a sua transformada por s (domínio da frequência), simplificando a resolução de equações integrais e diferenciais.

Teorema 5 (Primitiva (integração em t)) Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe para $s \in D_F$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s), \quad s \in D_F.$$

Demonstração: Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ existe, consideremos a função $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Então $g'(t) = f(t)$, e aplicando a transformada da primeira derivada

$$\mathcal{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s) - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s),$$

pois $g(0) = 0$. Como $g'(t) = f(t)$, temos

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}. \quad \square$$

Nota 5 A propriedade anterior também pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad \square$$

Apresentamos, para terminar, a propriedade da **convolução** (ou do **produto de convolução**), que é uma ferramenta fundamental na teoria das transformadas de Laplace. Ao contrário do que se poderia esperar, a transformada de Laplace do produto de duas funções não é igual ao produto das suas transformadas. A convolução surge precisamente para contornar esta limitação: ao definir o produto de convolução de duas funções (no tempo), conseguimos que a transformada de Laplace desse produto seja o produto das transformadas individuais (na frequência). Esta propriedade é particularmente útil na resolução de equações diferenciais com funções do segundo membro complexas.

Teorema 6 (Convolução) Se $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções admissíveis e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, então, para $s \in D_F \cap D_G$, o produto de convolução de f por g é definido por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

e satisfaz

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s).$$

Demonstração: Pela definição de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt.$$

Observemos que, para cada $t \geq 0$, o integral interno varia $\tau \in [0, t]$. Se quisermos trocar a ordem das integrais, devemos cobrir todos os pares (τ, t) na região triangular $\{(\tau, t) : 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$. Como f e g são admissíveis, o integrando $e^{-st} f(\tau) g(t - \tau)$ é absolutamente integrável. Portanto, pelo Teorema de Fubini–Tonelli, podemos trocar a ordem das integrais, obtendo

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_\tau^{+\infty} g(t - \tau) e^{-st} dt \right) d\tau.$$

Fazendo agora a mudança de variável $u = t - \tau$, temos

$$\int_0^{+\infty} f(\tau) \left(\int_0^{+\infty} g(u) e^{-s(u+\tau)} du \right) d\tau = \left(\int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) \left(\int_0^{+\infty} g(u) e^{-su} du \right)$$

e portanto

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s), \quad s \in D_F \cap D_G. \quad \square$$

Exemplo 4 Pretende-se resolver o problema de condição inicial

$$y'' + y = g(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = k.$$

Se a transformada $G(s)$ de $g(t)$ existir para $s > 0$, então a transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é dada por

$$Y(s) = \frac{k + G(s)}{s^2 + 1} = \frac{k}{s^2 + 1} + \frac{G(s)}{s^2 + 1}.$$

Então

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + 1} \right\} (t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s^2 + 1} \right\} (t) = k \sin t + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s^2 + 1} \right\} (t).$$

O segundo integral pode ser visto como a convolução $f * g$, com $f(t) = \sin t$. Assim,

$$y(t) = k \sin t + \sin t * g(t) = k \sin t + \int_0^t \sin \tau g(t - \tau) d\tau. \quad \square$$

Exercício 5. Usando a convolução, determine a solução do problema de condição inicial

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-t} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Resolução: Vamos efectuar os mesmos passos do Exercício 3 (b).

1. **Calcular a transformada de Laplace** $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

Como vimos,

$$Y(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 2)^2} = \frac{1}{(s + 2)^2} + \frac{1}{(s + 1)(s + 2)^2}.$$

2. **Calcular a transformada inversa de Laplace** $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$.

Usando convolução para a segunda fracção (a primeira pode ser obtida por deslocamento em s), obtemos

$$y(t) = t e^{-2t} + \int_0^t e^{-\tau} (t - \tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau = t e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t \tau e^{\tau} d\tau = e^{-t} - e^{-2t}. \quad \square$$

Exercícios

1. Determine as transformadas de Laplace:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $f(t) = t^2 + 6t - 3$; | (f) $f(t) = t^{\frac{5}{2}}$; |
| (b) $f(t) = 5t^2 + \cos(2t)$; | (g) $f(t) = \cos^2(3t)$; |
| (c) $f(t) = t(e^t + e^{2t})^2$; | (h) $f(t) = \sin(5t) \cos(2t)$; |
| (d) $f(t) = e^{3t} \cos(2t)$; | (i) $f(t) = t^3 e^{-t}$; |
| (e) $f(t) = t^2 \sin t$; | (j) $f(t) = t e^{2t} \cos(3t)$. |

2. (a) Se $F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)$ e $\frac{f(t)}{t}$ tem limite quando $t \rightarrow 0$, prove que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(u) du.$$

(b) Determine:

$$(i) \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}; \quad (ii) \mathcal{L}\left\{\frac{\cos(at) - 1}{t}\right\}; \quad (iii) \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{t}\right\}.$$

3. Calcule:

- | | |
|--|--|
| (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$; | (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}$; |
| (b) $\mathcal{L}^{-1}\{(s-2)^{-2}\}$; | (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$; |
| (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2 - 4}\right\}$; | (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2 - s - 6}\right\}$; |
| (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-5}{s^2+4}\right\}$; | (h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$. |

4. Use o operador transformada de Laplace para determinar a solução do problema de valor inicial:

- $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;
- $y'' + 6y - 7 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;
- $2y'' + y' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
- $y'' - y' - 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$;
- $y'' - 2y' + 5y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;
- $y'' - 9y' = 5e^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$;
- $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$;
- $y'' + 4y = 9t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$;
- $y'' + y = \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$;
- $y'' + y' - 2y = 5e^{-t} \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$;
- $y''' - 4y' = \sinh t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$;
- $y^{(iv)} - 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$.

5. Utilizando o operador transformada de Laplace, determine a solução geral de cada uma das seguintes equações:

- $y' + 2y = e^t$;
- $y'' + 4y' + 3y = 0$.

6. Usando a transformada de Laplace, resolva o problema

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

Sugestão: faça uma mudança de variável conveniente.

7. Determine a solução do problema

$$ty'' - ty' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

8. Determine a solução de cada um dos seguintes problemas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u) \, du = \sin t, \\ y(0) = 1; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} y'(t) = \sin t + \int_0^t y(t-u) \cos u \, du, \\ y(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

9. Usando a transformada de Laplace, calcule o valor do seguinte integral

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} \cos(2x) \, dx.$$

10. Prove as propriedades seguintes do operador de convolução.

- (a) **Comutatividade:** Para quaisquer funções f e g ,

$$(f * g)(t) = (g * f)(t).$$

- (b) **Distributividade:** Para quaisquer funções f , g e h ,

$$(f * (g + h))(t) = (f * g)(t) + (f * h)(t).$$

- (c) **Associatividade:** Para quaisquer funções f , g e h ,

$$(f * (g * h))(t) = ((f * g) * h)(t).$$

- (d) **Convolução com a função nula:** Para qualquer função f ,

$$(f * 0)(t) = 0.$$

Aula 15: Aplicações das transformadas de Laplace

Em muitas aplicações (análise de fluxo de corrente em circuitos eléctricos ou em vibrações de sistemas mecânicos), encontramos situações modeladas por equações diferenciais da forma

$$L[y](t) = f(t), \quad (1)$$

com L um operador linear de coeficientes constantes e onde a função f apresenta uma **descontinuidade do tipo salto** em um ou mais pontos. Por exemplo, uma partícula pode estar se movendo sob a influência de uma força $f_1(t)$ e, de repente, no instante t_1 , uma força adicional $f_2(t)$ é aplicada à partícula.

Nesta aula, mostramos como lidar com esses problemas pelo método das transformadas de Laplace. Começamos calculando a transformada de Laplace de várias funções descontínuas simples.

Função degrau de Heaviside

Quando trabalhamos com funções do tipo salto, a fim de facilitar os cálculos das transformadas, utilizamos funções e Heaviside (ou de degrau unitário), definidas no Exemplo 2 da Aula 13,

$$H_{t_0}(t) = H(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1, & t \geq t_0, \end{cases}$$

onde t_0 é o instante em que ocorre o salto. Funções mais gerais podem ser construídas combinando múltiplos degraus unitários, por exemplo

$$f(t) = f_1(t) H(t - t_1) + f_2(t) H(t - t_2),$$

onde cada termo representa a translação da função para a direita de uma quantidade correspondente à constante que sugere na função de Heaviside. O uso das **transformadas de Laplace** permite tratar tais funções de forma sistemática, convertendo equações diferenciais com descontinuidades em equações algébricas no domínio s .

A seguir apresentamos a propriedade da **translação (de Heaviside) no domínio do tempo**, que mostra como deslocar uma função no tempo afeta a sua transformada de Laplace. Esta propriedade é útil para tratar funções que são ativadas a partir de $t = t_0 > 0$, como acontece quando usamos a função degrau unitário.

Teorema 1 (Deslocamento em t (ou de Heaviside)) Se f é uma função admissível com transformada $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, então, para $t_0 \geq 0$,

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0) H(t - t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} F(s),$$

onde $H(t)$ é a função degrau unitário. De forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-t_0 s} F(s)\}(t) = H(t - t_0) f(t - t_0).$$

Demonstração: Pela definição,

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0) H(t - t_0)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t - t_0) H(t - t_0) dt.$$

Como $H(t - t_0) = 0$ para $t < t_0$ e 1 para $t > t_0$, o integral reduz-se a

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t - t_0) dt.$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = t - t_0$ (quando $t = t_0$ temos $\tau = 0$), obtemos

$$\int_0^{\infty} e^{-s(\tau+t_0)} f(\tau) d\tau = e^{-t_0 s} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-t_0 s} F(s). \quad \square$$

Exemplo 1 Pela propriedade do deslocamento de Heaviside, sai imediatamente que

$$\mathcal{L}\{(t - 3)H(t - 3)\}(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2} \quad \text{e que} \quad \mathcal{L}\{H(t - t_0)\}(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{s}.$$

Também se conclui facilmente que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\}(t) = H(t - 1)(t - 1) \quad \text{e que} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{1 + s^2}\right\}(t) = H(t - \pi) \sin(t - \pi). \quad \square$$

Vejamos como esta propriedade pode ser usada no contexto da **resolução de equações diferenciais**. Consideremos a equação diferencial de primeira ordem de coeficientes constantes

$$y'(t) + y(t) = H_{[0,b]}(t), \quad y(0) = 0, \quad (b > 0), \quad (2)$$

onde $H_{[a,b]}(t)$ é a função indicatriz¹

$$H_{[0,b]}(t) = H(t) - H_b^-(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, b], \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomando a transformada de Laplace, e considerando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, temos que

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = sY(s) - f(0) + Y(s) = \mathcal{L}\{H_{[0,b]}(t)\}(s).$$

Tendo em conta a condição inicial e a transformada de Laplace da função indicatriz (ver Exemplo 2 da Aula 13), temos que

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} \mathcal{L}\{H_{[0,b]}(t)\}(s) = \frac{1 - e^{-bs}}{s(s + 1)}. \quad (3)$$

Para calcular a transformada inversa, vamos considerar a propriedade do deslocamento de Heaviside. Consideremos

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + 1)}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-bs}}{s(s + 1)}\right\}(t).$$

A primeira parcela é calculada usando frações simples

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + 1)}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\}(t) = 1 - e^{-t}.$$

A segunda é obtida pela propriedade do deslocamento de Heaviside

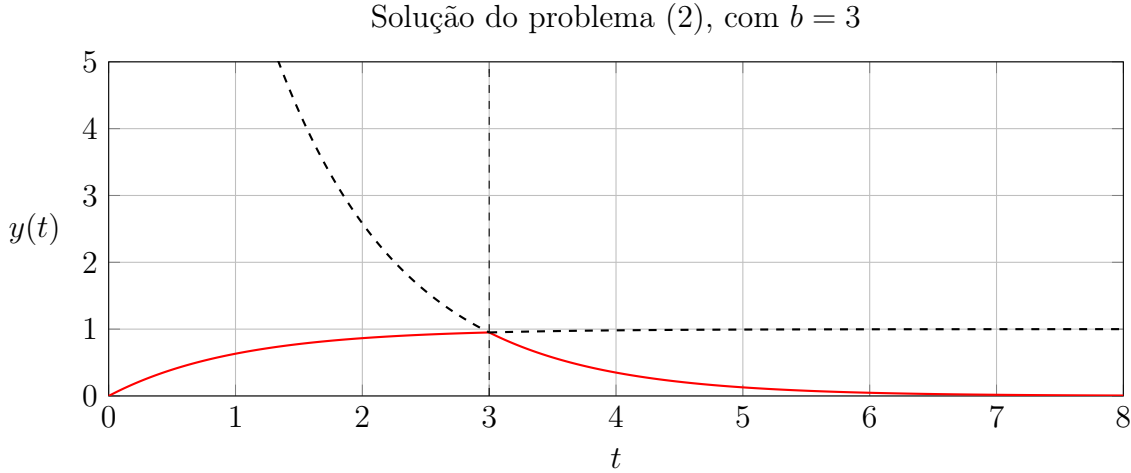
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-bs}}{s(s + 1)}\right\}(t) = H_b(t)(1 - e^{-(t-b)}).$$

¹Como $\mathcal{L}\{H_{t_0}(t)\} = \mathcal{L}\{H_{t_0}^-(t)\}$, a função indicatriz é muitas vezes escrita na forma $H_{[a,b]}(t) = H_a(t) - H_b(t)$.

Então, a solução da equação diferencial é

$$y(t) = 1 - e^{-t} - H_b(t)(1 - e^{-(t-b)}) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t \in [0, b], \\ e^{-(t-b)} - e^{-t}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4)$$

Note-se que solução é crescente para $0 < t \leq b$ e decrescente para $t > b$, tendendo para 0, conforme se pode ver na figura seguinte.



Nota 1 Vamos verificar que (4) é solução de (2) trabalhando diretamente na equação. Para $0 \leq t \leq b$, tem-se $H_{[0,b]}(t) = 1$ e o problema de condição inicial fica

$$y' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad (t \geq b)$$

que pode ser resolvido facilmente, obtendo-se

$$y(t) = 1 - e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq b,$$

e portanto $y(b) = 1 - e^{-b}$. Para $t > b$, tem-se $H_{[0,b]}(t) = 0$ e o problema de condição inicial a resolver é

$$y' + y = 0, \quad y(b) = 1 - e^{-b}, \quad (t \geq b)$$

o qual se resolve facilmente: a solução geral de $y' + y = 0$ é $y(t) = C e^{-t}$, com a constante $C = e^b - 1$, obtida pela condição inicial $y(b) = 1 - e^{-b}$. Em conclusão, a solução da equação é, de facto, dada por (4). $\square$

Vale a pena notar que a solução (4) do problema (2) é contínua (basta verificar em $t = b$), mas não é diferenciável em $t = b$, porque a derivada à esquerda é e^{-b} enquanto a derivada à direita é $e^{-b} - 1$. Neste caso, $y(t)$ é uma **solução generalizada** da equação, no sentido de que satisfaz a equação diferencial para todo $t \neq b$. Isto era expectável, uma vez que o termo do segundo membro tem uma descontinuidade em $t = b$.

Mais geralmente, consideremos a equação diferencial

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t),$$

onde f é contínua, possivelmente com a exceção de um número finito de pontos $S = \{t_1, \dots, t_m\}$. Dizemos que uma função contínua $y(t)$ é uma **solução generalizada** da equação se for continuamente diferenciável em $\mathbb{R} \setminus S$ e satisfizer a equação para todo $t \in \mathbb{R} \setminus S$. Poderíamos considerar classes mais gerais de soluções generalizadas, mas isso está fora do âmbito deste curso.

Nota 2 A transformada inversa de (3) também poderia ser calculada pela convolução. Assim

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \mathcal{L}\{H_{[0,b]}(t)\}(s) \right\} (t) = e^{-t} * H_{[0,b]}(t) = \int_0^t e^{t-\tau} H_{[0,b]}(\tau) d\tau.$$

Para calcular o integral, consideramos os casos $0 \leq t \leq b$ e $t > b$. Para o primeiro caso, $0 \leq \tau \leq t \leq b$, temos

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)} H_{[0,b]}(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

Para $t > b$, temos

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)} H_{[0,b]}(\tau) d\tau = \int_0^b e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^b e^{\tau} d\tau = e^{-t} (e^b - 1) = e^{-(t-b)} - e^{-t}.$$

Assim, concluímos que a solução é dada por (4). $\square$

Nota 3 (Convolução com a função degrau unitário) Se f for uma função seccionalmente contínua e $t_0 > 0$,

$$H_{t_0}(t) * f(t) = \int_0^t H_{t_0}(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(t-\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

e $H_{t_0}(t) * f(t) = 0$ para $t < t_0$. Então

$$H_{t_0}(t) * f(t) = H_{t_0}(t) \int_{t_0}^t f(t-\tau) d\tau = H_{t_0}(t) \int_0^{t-t_0} f(u) du.$$

Por linearidade, também se pode concluir que, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^+$,

$$(\alpha H_{t_0}(t) + \beta H_{t_1}(t)) * f(t) = \alpha H_{t_0}(t) \int_0^{t-t_0} f(u) du + \beta H_{t_1}(t) \int_0^{t-t_1} f(u) du$$

e que, para f_1 e f_2 seccionalmente contínuas,

$$H_{t_0}(t) * (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = H_{t_0}(t) \left(\alpha \int_0^{t-t_0} f_1(u) du + \beta \int_0^{t-t_0} f_2(u) du \right). \quad \square$$

Exemplo 2 (Circuito RC) Um circuito RC combina uma Resistência (R) e um Condensador (C), sendo fundamental para filtrar, atrasar ou temporizar sinais elétricos. Considere um circuito RC em regime linear com entrada $H(t - t_0)$. A equação diferencial que determina a tensão no condensador é

$$RC \frac{dv}{dt} + v(t) = H_{t_0}(t), \quad v(0) = 0,$$

onde a constante RC indica o tempo característico com que o condensador carrega/descarrega, determinando a rapidez da resposta do circuito a mudanças de tensão, crucial em filtros passa-baixa/alta, temporizadores e outras aplicações eletrônicas.

Tomando transformadas e denotando $V(s) = \mathcal{L}\{v\}(s)$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, tem-se

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 4\mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{H_{t_0}\}(s) \Rightarrow sRCV(s) - 0 + V(s) = \mathcal{L}\{H_{t_0}(t)\}(s).$$

Então

$$Y(s) = \frac{1}{RCs + 1} \mathcal{L}\{H_{t_0}(t)\}(s).$$

Aplicando a transformada inversa via convolução, e lembrando que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{RCs + 1}\right\}(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} = g(t),$$

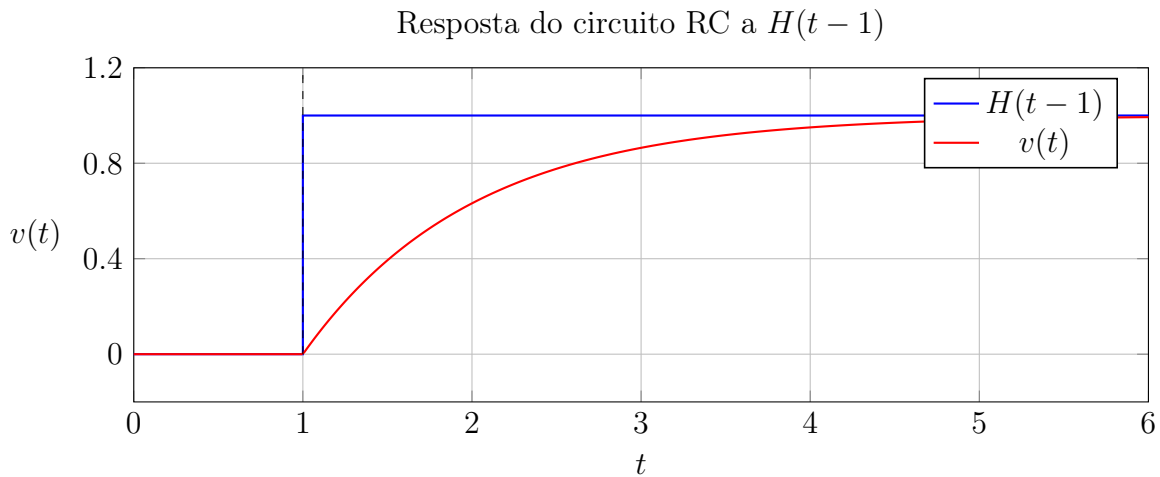
A resposta do circuito é dada por

$$v(t) = H_{t_0}(t) * g(t)$$

o que, atendendo à nota anterior, é igual a

$$v(t) = H_{t_0}(t) \int_0^{t-t_0} \frac{1}{RC} e^{-\tau/(RC)} d\tau = H_{t_0}(t) (1 - e^{-(t-t_0)/(RC)}).$$

Este resultado mostra que a carga do condensador só se inicia em $t = t_0$. A figura seguinte evidencia esse atraso. $\square$



Exercício 1. Calcule a solução do problema de condição inicial

$$y'(t) + 2y = f(t), \quad y(0) = 1,$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 2 \sin t, & t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Resolução: Usando a função degrau de Heaviside podemos escrever

$$f(t) = 2 \sin t H(t - \frac{\pi}{2}) = 2 \sin t H_{\pi/2}(t).$$

Tomando as transformadas e denotando $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, tem-se

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = F(s) \Rightarrow sY(s) - 1 + 2Y(s) = F(s).$$

Então

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{F(s)}{s+2}.$$

Vamos determinar a transformada inversa por dois processos distintos.

1. Determinar a solução $y(t)$ pela propriedade do deslocamento de Heaviside. Escrevendo $\sin t = \cos(t - t_0)$ obtemos

$$f(t) = 2 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) H_{\pi/2}(t).$$

Pela propriedade do deslocamento de Heaviside

$$F(s) = \mathcal{L}\{2 \cos(t - \frac{\pi}{2}) H_{\pi/2}(t)\}(s) = e^{-s\pi/2} \frac{2s}{s^2 + 1}.$$

Então, voltando a usar a propriedade do deslocamento,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s\pi/2} \frac{2s}{s^2 + 1}\right\}(t) \\ &= e^{-2t} + H_{\pi/2}(t) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 2)}\right\}\left(t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{2s}{(s^2 + 1)(s + 2)} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s + 2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s^2 + 1},$$

conclui-se

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-2t} + \frac{1}{5} H_{\pi/2}(t) \left(-4 e^{-2(t-\pi/2)} + 4 \cos(t - \frac{\pi}{2}) + 2 \sin(t - \frac{\pi}{2})\right) \\ &= e^{-2t} + \frac{1}{5} H_{\pi/2}(t) (4 \sin t - 2 \cos t - 4 e^{-2(t-\pi/2)}). \end{aligned} \quad (5)$$

Portanto, como função por ramos, a solução é

$$y(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ e^{-2t} + \frac{1}{5}(4 \sin t - 2 \cos t - 4 e^{-2(t-\pi/2)}), & t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. Determinar a solução $y(t)$ pela convolução.

Da expressão

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{F(s)}{s+2}$$

e atendendo a que $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+2)\} = e^{-2t}$, sai

$$y(t) = e^{-2t} + \int_0^t f(\tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} + 2 \int_0^t H_{\pi/2}(\tau) \sin \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau.$$

Mas, pelo que vimos

$$\int_0^t H_{\pi/2}(\tau) \sin \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau = H_{\pi/2}(t) \int_{\pi/2}^t \sin \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

Fazendo primitivação por partes, tem-se que

$$\int_{\pi/2}^t \sin \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{5} (2 \sin t - \cos t - 2 e^{-2(t-\pi/2)}).$$

Portanto a solução é dada por (5). $\square$

Consideremos agora alguns exemplos com equações diferenciais de segunda ordem.

Exemplo 3 (Sistema massa-mola amortecido) Considere um sistema massa-mola com um coeficiente de amortecimento c , descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = H(t - a), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Dividindo por m , obtemos a chamada equação do oscilador harmónico amortecido

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega_0^2 x = H(t - a)/m,$$

onde $\nu = c/(2m)$ é o coeficiente de amortecimento absoluto e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a frequência natural do sistema.

Tomando transformadas e denotando $X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s)$, tem-se

$$s^2 X(s) + 2\nu s X(s) + \omega_0^2 X(s) = \mathcal{L}\{H_{t_0}(t)\}(s)/m.$$

Então

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\nu s + \omega_0^2} \mathcal{L}\{H_{t_0}\}(s)/m.$$

Aplicando a transformada inversa via convolução, e lembrando que, no caso subamortecido ($\nu < \omega_0$)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2\nu s + \omega_0^2}\right\}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-2\nu t} \sin(\omega_d t) = g(t),$$

com $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \nu^2}$ a frequência angular amortecida, tem-se que Assim,

$$x(t) = H_{t_0}(t)/m * g(t) = H_{t_0}(t) \int_0^{t-t_0} \frac{1}{m\omega_d} e^{-2\nu\tau} \sin(\omega_d\tau) d\tau.$$

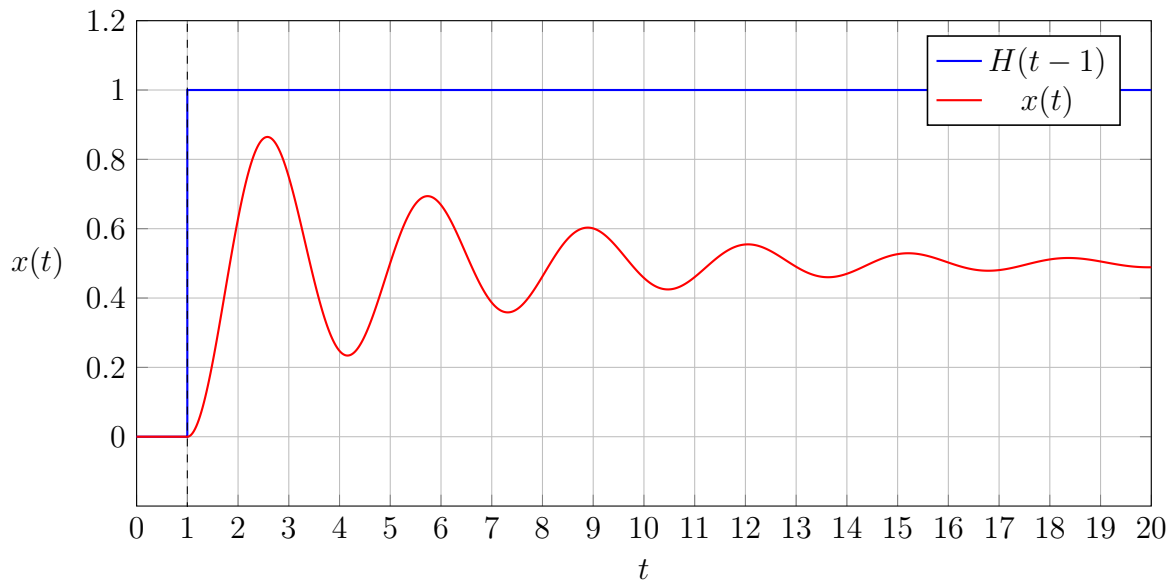
ou seja

$$x(t) = H_{t_0}(t) \frac{1}{m(4\nu^2 + \omega_d^2)} \left(1 - R e^{-2\nu(t-t_0)} \sin(\omega_d(t-t_0) - \phi)\right),$$

onde $R = \sqrt{1 + (2\nu/\omega_d)^2}$ é a amplitude ajustada pelo amortecimento e $\phi = \arctan(2\nu/\omega_d)$ a fase de deslocamento.

Na figura seguinte vê-se que a resposta permanece nula para $t < a$, ativando-se apenas após o atraso temporal. $\square$

Resposta do sistema massa-mola amortecido a $H(t - 1)$



Exercício 2. Calcule a solução do problema de condição inicial

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde a entrada $f(t)$ apresenta dois saltos em instantes distintos:

$$f(t) = 3H(t-1) - 2H(t-5),$$

com $H(t)$ sendo o degrau unitário de Heaviside.

Resolução: Com as notações usuais $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, tem-se

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 4\mathcal{L}\{y\}(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad s^2Y(s) - 0 + 4Y(s) = F(s).$$

Então

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 4}.$$

Aplicando a transformada inversa via convolução, e lembrando que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\}(t) = \frac{\sin(2t)}{2} = g(t),$$

tem-se que

$$y(t) = f(t) * g(t) = 3H_1(t) \int_0^{t-1} \frac{\sin(2\tau)}{2} d\tau - 2H_5(t) \int_0^{t-5} \frac{\sin(2\tau)}{2} d\tau.$$

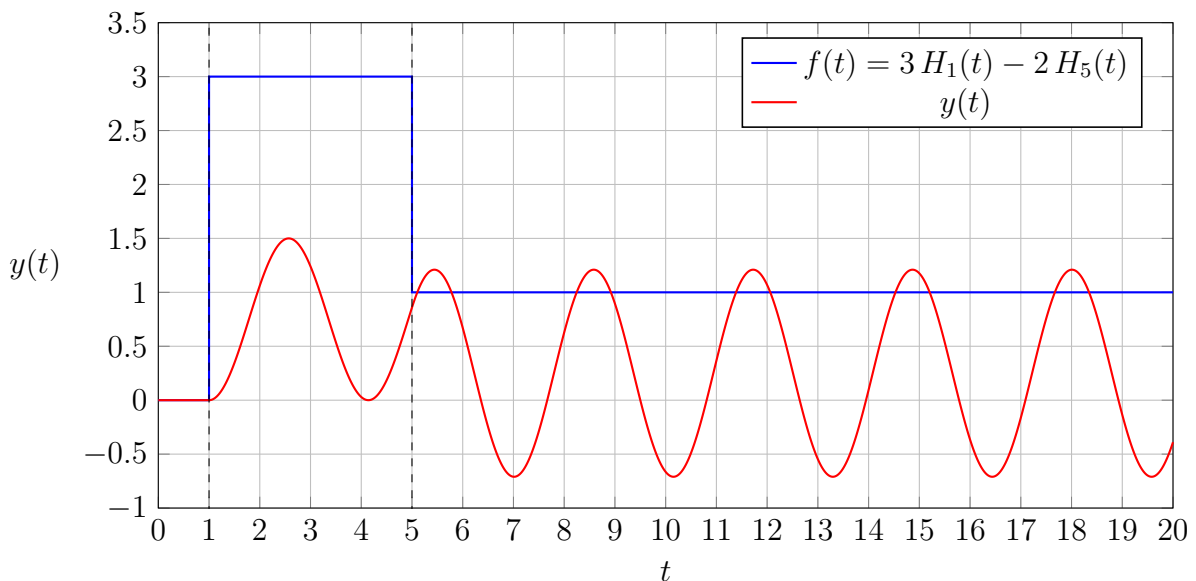
Como

$$\int_0^t \frac{\sin(2\tau)}{2} d\tau = \frac{1 - \cos(2t)}{4},$$

tem-se que

$$y(t) = \frac{3}{4}(1 - \cos(2(t-1)))H_1(t) - \frac{1}{2}(1 - \cos(2(t-5)))H_5(t). \quad \square$$

Resposta do sistema a $f(t) = 3H_1(t) - 2H_5(t)$



Impulso de Dirac (Delta de Dirac)

Uma situação diferente surge quando queremos determinar a resposta de um sistema que recebe uma pancada seca no instante $t = t_0$. Podemos modelar essa situação por uma equação do tipo (1), onde $f(t)$ é grande durante um pequeno intervalo e tempo que contém t_0 , digamos $[t_0, t_0 + \varepsilon]$, e nula fora desse intervalo.

O integral

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

é a medida da intensidade da força aplicada. No caso de um sistema mecânico, este integral é chamado **impulso** total da força f . Se estivermos a considerar a situação ter temos um circuito eléctrico, o integral é chamado a **voltagem** total imposta ao circuito.

O conceito de **impulso instantâneo** pode ser entendido como aquele em que a força é aplicada num determinado instante. Antes e depois daquele instante a força é zero. Isso sugere a introdução de uma **função generalizada**, designada por $\delta(t)$, para expressar esse facto no caso de um impulso unitário no instante $t_0 = 0$. Essa função generalizada é chamada de **delta de Dirac**.

Um tratamento rigoroso da função delta de Dirac exigiria tópicos mais avançados, como a Teoria das Distribuições, e não pode ser abordado neste curso. No entanto, a sua importância nas aplicações torna conveniente apresentar pelo menos um esboço heurístico deste tópico.

Consideremos a função (esboce o seu gráfico)

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{H(t + \varepsilon) - H(t - \varepsilon)}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Tomando o limite dentro do integral (num sentido generalizado adequado), *definimos* a função (generalizada) δ por

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$$

com as seguintes características

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \text{ para } t \neq 0, \quad “\delta(0) = +\infty”.$$

As aspas são justificadas pois não há nenhuma função que possa ser definida com essa condição. Paul Dirac (1902–1984, prémio Nobel da Física em 1953, introduziu a função delta ($\delta(t)$) de forma intuitiva, mas foi o matemático francês Laurent Schwartz (1915–2002) quem, mais tarde, desenvolveu a rigorosa teoria matemática das distribuições, que formalizou e deu base rigorosa ao conceito intuitivo de Dirac, permitindo um tratamento mais profundo e abrangente, essencial para a física moderna e para a engenharia.

A propriedade fundamental da função Delta de Dirac é

$$(\delta * f)(s) = (f * \delta)(s) = f(s) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0), \quad (6)$$

para funções f seccionalmente contínuas. De facto, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\varepsilon}(t - t_0) f(t) dt = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f(t) dt = \frac{1}{2\varepsilon} (f(c_{\varepsilon}) 2\varepsilon) = f(c_{\varepsilon}), \quad c_{\varepsilon} \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon),$$

e, tomando limites (no tal sentido generalizado adequado), conclui-se (6).

Nos casos práticos, interessa considerar a **função impulso unitário** $\delta(t - t_0)$ e as propriedades:

1. $\delta(t - t_0) = 0, t \neq t_0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$.

Nota 4 (Transformada de Laplace da função impulso unitário) A transformada de Laplace da função impulso unitário $\delta(t - t_0)$, com $t_0 \geq 0$, é dada por

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}(s) = \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0},$$

e, de forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-st_0}\}(t) = \delta(t - t_0), \quad \mathcal{L}^{-1}\{1\}(t) = \delta(t). \quad \square$$

Exemplo 4 Temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s+3}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{2}{s+3}\right\}(t) = \delta(t) - 2e^{-3t}. \quad \square$$

Nota 5 (Convolução com a função impulso unitário) Temos que, se f for uma função seccionalmente contínua e $t_0 \geq 0$,

$$\delta(t - t_0) * f(t) = \int_0^t \delta(\tau - t_0) f(t - \tau) d\tau.$$

Então

$$\int_0^t \delta(\tau - t_0) f(t - \tau) d\tau = 0, \quad t < t_0,$$

e

$$\int_0^t \delta(\tau - t_0) f(t - \tau) d\tau = f(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

o que implica

$$\delta(t - t_0) * f(t) = H_{t_0}(t) f(t - t_0). \quad \square$$

Nota 6 (Primitiva generalizada da função impulso unitário) Se, na nota anterior, considerássemos $f(t) = 1$, concluíamos que

$$\int_0^t \delta(\tau - t_0) d\tau = 0, \quad t < t_0, \quad e \quad \int_0^t \delta(\tau - t_0) d\tau = f(t - t_0), \quad t \geq t_0,$$

ou seja,

$$\int_0^t \delta(\tau - t_0) d\tau = H_{t_0}(t).$$

Podemos assim dizer que, no sentido generalizado, $H_{t_0}(t)$ é a primitiva de $\delta(\tau - t_0)$, ou seja, $H'_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$. Note-se ainda que

$$\mathcal{L}\{H'_{t_0}(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{H_{t_0}(t)\}(s) = e^{-t_0 s},$$

que é exactamente a transformada de Laplace de $\delta(t - t_0)$. $\square$

Exemplo 5 (Circuito RC) Considere um circuito RC série com resistência R e condensador C , sujeito a uma tensão de entrada composta por dois impulsos unitários,

$$v_{in}(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2),$$

onde $t_1, t_2 > 0$ e $\delta(t - t_i)$ denota o impulso de Dirac aplicado no instante t_i . Pretende-se determinar a tensão no condensador, $v_C(t)$, assumindo que $v_C(0^-) = 0$.

A equação diferencial que descreve o circuito é

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = v_{in}(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2), \quad v_C(0^-) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace e usando $V_C(s) = \mathcal{L}\{v_C(t)\}(s)$, obtém-se

$$RC s V_C(s) + V_C(s) = e^{-st_1} + e^{-st_2}, \quad \Rightarrow \quad V_C(s) = \frac{e^{-st_1} + e^{-st_2}}{RC s + 1}.$$

Atendendo a que

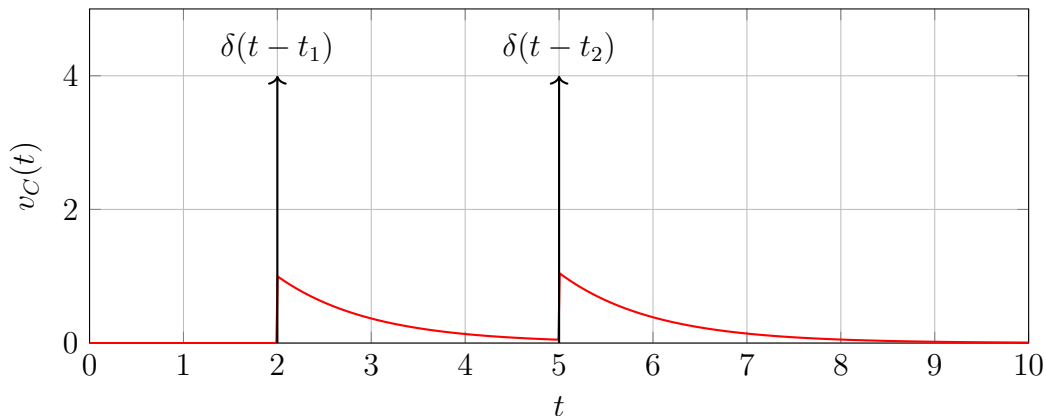
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{RC s + 1}\right\}(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} = g(t),$$

a tensão no condensador é dada por

$$v_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-(t-t_1)/(RC)} u(t - t_1) + \frac{1}{RC} e^{-(t-t_2)/(RC)} u(t - t_2)$$

ou seja, cada impulso eleva instantaneamente a tensão no condensador e esta decai exponencialmente com constante de tempo $\tau = RC$. O figura seguinte mostra a resposta cumulativa no condensador a dois impulsos unitários. $\square$

Resposta de um circuito RC a múltiplos impulsos unitários



Exemplo 6 (Dosagem de um medicamento) Um paciente recebe doses intravenosas periódicas de um medicamento a cada τ horas, de modo que a concentração plasmática $y(t)$ obedece à equação

$$\frac{dy}{dt} = -ky(t) + D \sum_{i=0}^{n-1} \delta(t - i\tau), \quad y(0^-) = 0,$$

onde $k > 0$ é a taxa de eliminação (constante de decaimento exponencial), $D > 0$ é a quantidade de medicamento por dose, n é o número total de doses e τ é o intervalo entre doses.

Considerando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ e lembrando que $\mathcal{L}\{\delta(t - t_i)\}(s) = e^{-st_i}$, temos que, aplicando Laplace à equação diferencial,

$$sY(s) = -kY(s) + D \sum_{i=0}^{n-1} e^{-si\tau} \Rightarrow Y(s) = \frac{D}{s+k} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-si\tau}.$$

Sabendo que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+k} \right\} (t) = e^{-kt} = g(t)$$

e usando o teorema do deslocamento no tempo (ou a convolução) sai que

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta(t - i\tau) * g(t) = \sum_{i=0}^{n-1} D e^{-k(t-i\tau)} H(t - i\tau).$$

Assim, cada impulso gera um aumento súbito da concentração seguido de um decaimento exponencial. Quando o intervalo entre doses τ é pequeno comparado à meia-vida do fármaco, $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$, observa-se acumulação da concentração. Cada impulso produz uma concentração inicial D em $t = a^+$, que decai exponencialmente com taxa k_e . Para regimes periódicos com $\tau < t_{1/2}$, a concentração plasmática aproxima-se de um estado estacionário, informação fundamental para o planejamento de esquemas de dosagem seguros e eficazes. $\square$

Exercício 3. Resolva a equação diferencial com impulso de Dirac

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2\delta(t - \pi),$$

com condições iniciais

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde δ é a delta de Dirac e $t \geq 0$.

Resolução: Tomando a transformada de Laplace em ambos os membros, e usando a notação usual $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, temos

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = 2e^{-\pi s} \Rightarrow Y(s) = \frac{2e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}.$$

Factorizando o denominador $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$, e atendendo a que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right\} (t) = e^{-t} \sin t = g(t),$$

sai que

$$y(t) = 2\delta(t - \pi) * g(t) = 2H(t - \pi) e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi). \quad \square$$

Função de Green

Consideremos a equação de segunda ordem

$$y'' + py' + qy = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Considerando transformadas de Laplace, e usando a notação habitual, obtemos

$$s^2Y + psY + qY = F(s),$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Resolvendo para $Y(s)$ tem-se que

$$Y(s) = F(s)G(s),$$

com

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q}$$

a chamada a **função de transferência do sistema homogêneo**. Usando a propriedade da convolução para calcular a transformada inversa, obtemos a solução na forma

$$y(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau,$$

denominada **fórmula de Green**, onde a função

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t) \tag{7}$$

é a chamada **resposta ao impulso unitário (ou função peso)**. A **função de Green**, em homenagem ao matemático e físico inglês George Green (1793–1841), é definida por

$$G(t, \tau) = g(t - \tau).$$

Note-se que cada uma destas funções depende apenas do operador $L[y]$, e não da entrada $f(t)$; uma vez calculadas, a solução do problema de condição inicial pode ser imediatamente escrita através da fórmula de Green, sendo aplicável a diferentes funções de entrada $f(t)$.

A resposta ao impulso unitário $g(t)$ deve o seu nome ao facto de ser solução única de qualquer um dos seguintes problemas

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= 0, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1, \\ y'' + py' + qy &= \delta(t), & y(0) &= 0, & y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

É um exercício simples de transformada de Laplace mostrar que $g(t)$ satisfaz ambos os problemas.

Vejamos a forma de usar a função de Green para calcular a solução particular de uma problema de condição inicial.

Exemplo 7 Consideremos

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Tomando a transformada de Laplace em ambos os membros, e usando a notação usual $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, temos

$$s^2Y(s) + 4Y(s) - s - 1 = F(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{s+1}{s^2+4} + \frac{F(s)}{s^2+4}.$$

Note-se que a primeira parcela não depende da função f e, como tal, corresponde à solução homogénea da equação. A segunda parcela corresponde à solução particular.

A resposta ao impulso unitário (ou função peso) é dada por

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 4} \right\} (t) = \frac{\sin(2t)}{2},$$

e, como tal, a solução pela fórmula de Green (com $G(t, \tau) = g(t - \tau)$)

$$y_p(t) = (f * g)(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\sin(2(t - \tau))}{2} f(\tau) d\tau.$$

Para determinar a solução homogénea, note-se que

$$y_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2 + 4} \right\} (t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} (t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 4} \right\} (t) = \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t).$$

A solução geral é

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \underbrace{\cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(2t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\sin(2(t - \tau))}{2} f(\tau) d\tau}_{\text{particular via função de Green}}. \quad \square$$

Nota 7 (Equações com coeficientes variáveis) Na Aula 9 vimos que, pelo método da variação dos parâmetros, uma solução particular do problema linear de coeficientes variáveis

$$L[y](t) = y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0,$$

pode ser escrita na forma (ver equação (5) da Aula 9)

$$y_p(t) = -y_1(t) \int_0^t \frac{y_2(\tau) f(\tau)}{W(y_1, y_2)(\tau)} d\tau + y_2(t) \int_0^t \frac{y_1(\tau) f(\tau)}{W(y_1, y_2)(\tau)} d\tau,$$

com $\{y_1, y_2\}$ um sistema fundamental de soluções da equação homogénea. Esta solução pode ser escrita na forma

$$y_p(t) = \int_0^t f(\tau) G(t, \tau) d\tau,$$

com a função de Green

$$G(t, \tau) = \frac{y_2(t)y_1(\tau) - y_1(t)y_2(\tau)}{W(y_1, y_2)(\tau)}.$$

Ao contrário dos problemas com coeficientes constantes, a função de Green neste caso não se pode expressar na forma (7), para alguma função peso g . Isto deve-se ao facto de que, ao contrário do que sucede nos problemas de coeficientes constantes, o operador linear L que define a equação não é invariante por translações. $\square$

Exercícios

1. Calcule

(a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)} \right\};$

(b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 16} \right\};$

(c) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-s}}{s(s+1)} \right\}.$

2. Calcule:

(a) $\mathcal{L}\{(t-3)^2 H(t-3)\};$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-2(t-1)} H(t-1)\};$

(c) $\mathcal{L}\{H(t-1) - H(t-2)\};$

(d) $\mathcal{L}\{\delta(t-1)\};$

(e) $\mathcal{L}\{2\delta(t-2) + 3\delta(t-4)\}.$

3. **Derivada da transformada de Laplace e função degrau unitário.** Mostre que

$$\mathcal{L}\{tH_a(t)\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-as}}{s} \right).$$

4. Determine a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

(a)
$$\begin{cases} y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4, \\ 0, & t \geq 4, \end{cases} \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 2; \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} y'' + y = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3, \\ 3t - 7, & t \geq 3, \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y'' + y = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi, \\ \cos t, & t \geq \pi, \end{cases} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0; \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2(t-3)H(t-3), \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2, \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2\delta(t-\pi), \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0; \end{cases}$$

(g) $y'(t) + y(t) = H_2(t), \quad y(0) = 0;$

(h) $y'' + 4y = H(t-\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

5. Determine a solução de cada um dos seguintes problemas:

(a)
$$\begin{cases} y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u) du = \sin t, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y'(t) = \sin t + \int_0^t y(t-u) \cos u du, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

6. Use a transformada de Laplace para determinar as soluções dos seguintes sistemas de equações diferenciais que satisfazem as condições iniciais dadas

$$(a) \begin{cases} y_1' + y_2 = 0, \\ y_2' + y_1 = 0, \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x'' - 6y' - 7x = 0, \\ y'' + x = 3, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' + 4x + 3y = 0, \\ y' + 3x + 4y = 2e^t, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y' + 2y + z = \sin t, \\ z' - 4y - 2z = \cos t, \\ y(0) = 0, \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 5y' + z'' + 4z = \sin t, \\ y'' + 2z' + y = 0, \\ y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0. \end{cases}$$

7. Sabendo que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^{k+1}} \right\} (t) = \frac{t^k e^{at}}{\Gamma(k+1)}, \quad s > a,$$

com $\Gamma(t)$ a função Gama, mostre que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)\sqrt{s}} \right\} (t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}),$$

onde

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

é a chamada **função erro (de Gauss)**.

8. Usando transformadas de Laplace, mostre que a solução de

$$y' + py = q(t), \quad y(0) = y_0,$$

é dada (como na Aula 4) pela fórmula da variação das constantes

$$y(t) = g(t)y_0 + \int_0^t q(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

com $g(t) = e^{-pt}$ a resposta ao impulso unitário.

Aula 16: Introdução aos sistemas de equações diferenciais

Em muitos processos biológicos, é necessário acompanhar a evolução de múltiplos fatores ou espécies. Por exemplo, o sistema predador-presa envolve duas variáveis dependentes: a população de presas e a de predadores. Nesses casos, em vez de estudar apenas uma quantidade como numa equação diferencial isolada, acompanhamos simultaneamente várias variáveis e as suas interações. Tal modelação exige a utilização de **sistemas de equações diferenciais ordinárias**.

O problema geral consiste em encontrar $y_1, \dots, y_n \in C^1(I)$, com $I \subset \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ \vdots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ y_1(t_0) = y_0^1, \dots, y_n(t_0) = y_0^n, \end{cases} \quad (1)$$

onde $f_1, \dots, f_n$ são funções reais de $n + 1$ variáveis. Este problema pode ser escrito de forma **vetorial**: encontrar $Y \in C^1(I)$ tal que

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)), \\ Y(t_0) = Y_0, \end{cases} \quad (2)$$

onde $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem componentes $f_1, \dots, f_n$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Nota 1 (Equações diferenciais de ordem superior) *Um problema definido por uma equação diferencial ordinária de ordem $n > 1$*

$$\begin{cases} z^{(n)}(t) = f(t, z(t), z'(t), \dots, z^{(n-1)}(t)), \\ z(t_0) = z_0, \quad z'(t_0) = z_0^1, \dots, z^{(n-1)}(t_0) = z_0^{n-1}, \end{cases}$$

é equivalente a um problema vetorial da forma (2), através das mudanças de variável

$$y_1 = z, \quad y_2 = z', \quad \dots, \quad y_n = z^{(n-1)},$$

com

$$F(t, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_0^1 \\ \vdots \\ z_0^{n-1} \end{bmatrix}. \quad \square$$

Nota 2 (Existência e unicidade de solução) *O teorema de Picard-Lindelöf garante existência e unicidade para o sistema (1). Basta que $f_1, \dots, f_n$ sejam contínuas e Lipschitz em $y_1, \dots, y_n$ numa vizinhança da condição inicial. Na forma vetorial (2), se $F : D \subset I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em D e localmente Lipschitziana em Y , existe uma vizinhança V de (t_0, Y_0) e uma constante $L > 0$ tal que, para todo $(t, Y_1), (t, Y_2) \in V$,*

$$\|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| \leq L\|Y_1 - Y_2\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Nessas condições, o problema tem solução única. $\square$

Sistemas autónomos de equações diferenciais

Muitos fenómenos do mundo real evoluem no tempo de acordo com leis que não dependem explicitamente do instante em que observamos o sistema, mas apenas do estado atual das variáveis. Exemplos incluem a dinâmica de populações biológicas, reações químicas, propagação de doenças e circuitos eléctricos. Em tais situações, o comportamento futuro do sistema é determinado apenas pelo estado presente, sem dependência direta do tempo. Este tipo de sistemas é chamado de **autónomo**.

Matematicamente, um **sistema autónomo de n equações diferenciais de primeira ordem** é escrito na forma

$$\frac{dY}{dt} = F(Y), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

onde $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suficientemente suave (contínua e com derivadas parciais contínuas). Aqui, cada variável y_i representa uma quantidade dinâmica do sistema, como a população de uma espécie, a concentração de um reagente químico, ou o número de indivíduos infectados.

Vamos destacar algumas das mais relevantes aplicações práticas dos sistemas autónomos: **interação de populações, redes de reações bioquímicas e propagação de doenças contagiosas**.

Modelo Predador-Presa (Lotka–Volterra)

O estudo de modelos matemáticos para descrever a evolução de populações de espécies que interagem remonta aos trabalhos de A.J. Lotka e V. Volterra, no início do século XX. Um exemplo clássico é o sistema *predador-presa*, em que uma população de presas serve de alimento para uma população de predadores. Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as populações de presas e predadores, respetivamente, no instante t .

Assumimos que as presas têm alimento suficiente, de modo que seu crescimento natural é proporcional ao número de indivíduos, representado por $\alpha x_1(t)$, com $\alpha > 0$. No entanto, a interação com os predadores reduz a população de presas. Cada encontro entre predador e presa provoca a morte de uma presa, e a frequência desses encontros é proporcional ao produto das populações $x_1 x_2$, levando ao termo $-\beta x_1(t)x_2(t)$, com $\beta > 0$.

A população de predadores depende da disponibilidade de presas para se alimentar e se reproduzir. O aumento dos predadores é proporcional ao número de encontros com presas, dado por $\delta x_1(t)x_2(t)$, com $\delta > 0$, enquanto a mortalidade natural dos predadores reduz a sua população, representada por $-\gamma x_2(t)$, com $\gamma > 0$.

Com estas hipóteses, a dinâmica do sistema é descrita pelo clássico sistema de Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} x'_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t), \\ x'_2(t) = \delta x_1(t)x_2(t) - \gamma x_2(t). \end{cases} \quad (4)$$

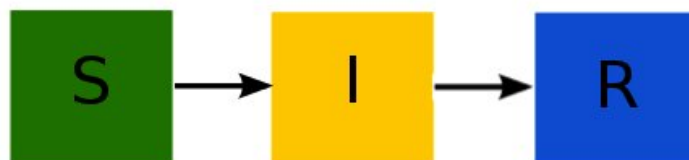
Cada termo tem interpretação direta: o crescimento natural das presas é dado por αx_1 , a perda de presas por predação por $-\beta x_1 x_2$, a mortalidade natural dos predadores por $-\gamma x_2$ e o ganho populacional dos predadores pela alimentação por $\delta x_1 x_2$. Como as equações estão acopladas, não é possível resolver uma sem considerar a outra, tornando o sistema dependente de métodos analíticos e numéricos para análise detalhada.

Propagação de doença contagiosa (Modelo SIR)

Considere uma população de tamanho total N , dividida em três grupos: suscetíveis $S(t)$, infectados $I(t)$ e recuperados $R(t)$, de modo que $S(t) + I(t) + R(t) = N$. O modelo SIR descreve a propagação de uma doença transmissível por contacto direto, assumindo que cada indivíduo suscetível pode ser infectado ao entrar em contacto com um infectado e que cada indivíduo infectado recupera-se a uma taxa $\gamma > 0$, passando a imune ou removido da cadeia de transmissão. A população total N é considerada constante, sem natalidade nem mortalidade natural significativa durante o período da epidemia.

A taxa à qual os suscetíveis se tornam infectados é proporcional ao número de contactos entre suscetíveis e infectados, sendo $\beta > 0$ o coeficiente de transmissão por contacto. Como cada contacto relevante depende da fração de infectados na população, a taxa de novos infectados é proporcional a $\beta SI/N$.

Esquema da propagação da doença no modelo SIR



A dinâmica do modelo é então descrita pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$

O termo dS/dt representa a diminuição dos suscetíveis devido à infeção, dI/dt combina o aumento por novos infectados e a diminuição por recuperação, e dR/dt descreve o crescimento dos recuperados. A divisão por N garante que a taxa de contacto seja proporcional à fração de infectados, tornando o modelo independente da escala populacional.

O número básico de reprodução $R_0 = \beta/\gamma$ determina a propagação da doença. Se a fração de suscetíveis S/N for inferior a $1/R_0$, a epidemia não se propaga. Em termos absolutos, o valor crítico de suscetíveis é dado por

$$S_c = \frac{\gamma}{\beta}N,$$

abaixo do qual a epidemia pode ser controlada. Caso $S > S_c$, a doença pode espalhar-se rapidamente pela população.

Reacções bioquímicas (*)

Uma célula pode ser vista como um grande sistema dinâmico com milhares de componentes em interação. Para prever a evolução temporal de tal sistema e o seu estado de equilíbrio, formulam-se equações diferenciais que descrevem cada componente. Cada variável de estado x representa a concentração de uma espécie química X , podendo também corresponder a densidade ou número de moléculas.

Em muitas situações, é necessário considerar múltiplos componentes e compartimentos, como citoplasma e núcleo. Nesse caso, em vez de uma única variável x , consideramos várias variáveis de estado x_i , $i = 1, \dots, n$, correspondendo às espécies X_i . Cada $x_i(t)$ evolui devido à síntese, degradação, reacções químicas ou transferência entre compartimentos, sendo descrita genericamente por

$$\frac{dx_i}{dt} = \text{síntese} - \text{degradação} \pm \text{reacções químicas} \pm \dots$$

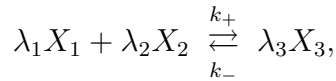
Os valores de todas as variáveis x_i em um dado instante definem o estado do sistema. Quando as taxas de ganho e perda se equilibram, $\frac{dx_i}{dt} = 0$, indicando que o sistema atingiu um ponto de equilíbrio ou estado estacionário. As equações estão acopladas, pois as taxas dependem das concentrações das demais espécies:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Para uma reacção irreversível simples, como $X + Y \rightarrow Z$, com constante $k > 0$, pela **Lei da Acção das Massas**¹ o sistema reduz-se a

$$\frac{dx}{dt} = -kxy, \quad \frac{dy}{dt} = -kxy, \quad \frac{dz}{dt} = kxy,$$

onde x, y, z representam as concentrações das espécies X, Y, Z . Como exemplo um pouco mais complexo, considere a reacção química reversível



onde λ_i são os coeficientes estequiométricos e k_+, k_- as constantes de velocidade determinadas experimentalmente. Pela Lei da Acção de Massas, a taxa da reacção directa é

$$v_+ = k_+ x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}, \quad \text{e a da inversa é } v_- = k_- x_3^{\lambda_3},$$

sendo x_i a concentração da espécie X_i . O sistema de equações diferenciais correspondente é

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -v_+ + v_-, \\ \frac{dx_2}{dt} = -v_+ + v_-, \\ \frac{dx_3}{dt} = v_+ - v_-, \end{cases}$$

com condições iniciais adequadas para cada concentração $x_i(0)$. Estas equações descrevem a evolução temporal das concentrações e constituem a base para modelação de redes químicas complexas, que podem ser resolvidas analiticamente ou numericamente.

Nota 3 (Aplicação do teorema de Picard-Lindelöf) *O teorema de Picard-Lindelöf garante a existência e unicidade de soluções para sistemas autónomos de equações diferenciais de primeira ordem, desde que a função F seja localmente Lipschitziana em todos os seus argumentos.*

¹A Lei da Acção das Massas (ou Lei de Guldberg-Waage) estabelece que a velocidade de uma reacção química é directamente proporcional ao produto das concentrações molares dos reagentes, cada uma elevada a uma potência determinada experimentalmente.

No modelo predador-presa, $F(x, y) = (\alpha x - \beta xy, \delta xy - \gamma y)$ é polinomial, pelo que é contínuo e localmente Lipschitz. Assim, existe uma solução única para qualquer condição inicial (x_0, y_0) . No modelo SIR, $F(S, I, R) = (-\beta SI/N, \beta SI/N - \gamma I, \gamma I)$ também é polinomial em (S, I, R) , garantindo a existência de uma solução única localmente para qualquer condição inicial (S_0, I_0, R_0) . Na reação química reversível, $F(x_1, x_2, x_3) = (-v_+ + v_-, -v_+ + v_-, v_+ - v_-)$, com $v_{\pm}$ monômios das concentrações, é contínuo e localmente Lipschitz, assegurando solução única para qualquer condição inicial positiva (x_1^0, x_2^0, x_3^0) . $\square$

Estes exemplos ilustram como situações reais podem ser traduzidas em sistemas de equações diferenciais autônomas, com cada termo representando um processo específico da realidade. Os sistemas autônomos oferecem uma estrutura natural para compreender a dinâmica de sistemas complexos, permitindo prever comportamentos como estabilidade, ciclos periódicos, convergência a estados estacionários e limites máximos das variáveis, a partir do próprio conhecimento das equações que descrevem as taxas de variação.

Pontos de equilíbrio em sistemas autônomos

No estudo dos sistemas autônomos, torna-se fundamental identificar os estados em que o sistema deixa de evoluir. Esses pontos, conhecidos como pontos de equilíbrio, fornecem informações essenciais sobre o comportamento a longo prazo, possibilitam avaliar a estabilidade e determinam os limites naturais de populações, concentrações ou números de indivíduos. Além disso, permitem orientar a análise qualitativa do sistema sem a necessidade de obter soluções explícitas das equações diferenciais.

Considere um sistema autônomo (3), onde $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suficientemente suave, isto é, contínua e com derivadas parciais contínuas. Para cada variável y_i , definimos a **nulclina de y_i** como o conjunto de pontos onde a taxa de variação de y_i se anula:

$$\mathcal{N}_i = \{Y \in \mathbb{R}^n : f_i(Y) = 0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Em $\mathcal{N}_i$, a variável y_i permanece constante no tempo, enquanto as restantes podem ainda variar. O estudo das nulclinas ajuda a localizar regiões onde o sistema tem comportamentos qualitativamente diferentes.

Definição 1 (Ponto de Equilíbrio) *Um ponto de equilíbrio (ou ponto crítico, ou estado estacionário) é um ponto $Y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ em $\mathbb{R}^n$ onde todas as taxas de variação se anulam simultaneamente, isto é*

$$f_i(Y^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por outras palavras, os pontos de equilíbrio correspondem exatamente à interseção de todas as nulclinas

$$Y^* \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \cap \dots \cap \mathcal{N}_n.$$

Fisicamente, atingir um ponto de equilíbrio significa que todas as variáveis do sistema permanecem constantes no tempo. Por exemplo, em modelos biológicos, um ponto de equilíbrio indica populações que não variam; em modelos químicos, concentrações estacionárias; e em modelos epidemiológicos, uma situação onde o número de suscetíveis, infectados e recuperados não muda.

Exemplo 1 (Modelo Predador-Presa) O sistema de Lotka–Volterra é dado por

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Os pontos de equilíbrio resolvendo $x' = 0, y' = 0$ são

$$(x^*, y^*) = (0, 0) \quad e \quad (x^*, y^*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

O primeiro ponto corresponde à extinção de ambas as populações, enquanto o segundo indica uma coexistência estacionária de presas e predadores.

Exemplo 2 (Modelo SIR) O sistema SIR clássico é

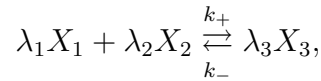
$$\begin{cases} S' = -\beta SI/N, \\ I' = \beta SI/N - \gamma I, \\ R' = \gamma I, \end{cases}$$

com $\beta, \gamma > 0$. O ponto de equilíbrio é dado por $S', I', R' = 0$, implicando

$$I^* = 0, \quad S^* \geq 0, \quad R^* = N - S^*,$$

onde $N = S + I + R$ é o tamanho total da população. O valor crítico $S_c = \gamma/\beta$ indica que, se $S < S_c$, a epidemia não se propaga.

Exemplo 3 (Reacção química reversível) Para a reacção



as concentrações x_1, x_2, x_3 satisfazem

$$\begin{cases} x'_1 = -v_+ + v_- = -k_+ x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + k_- x_3^{\lambda_3}, \\ x'_2 = -v_+ + v_- = -k_+ x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} + k_- x_3^{\lambda_3}, \\ x'_3 = v_+ - v_- = k_+ x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} - k_- x_3^{\lambda_3}. \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio satisfazem

$$v_+ = v_- \quad \Rightarrow \quad k_+ x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} = k_- x_3^{\lambda_3},$$

correspondendo à situação em que as reacções direta e inversa se equilibram.

Exemplo 4 (Competição entre duas espécies) Considere

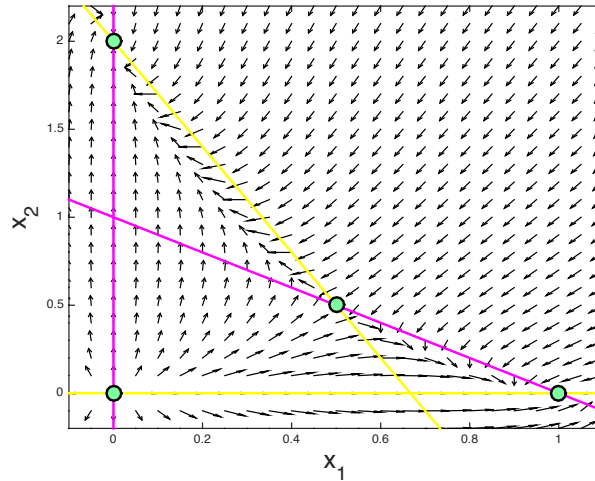
$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - x_1) - x_1 x_2, \\ x'_2 = 2x_2(1 - x_2/2) - 3x_1 x_2. \end{cases} \quad (5)$$

Os pontos de equilíbrio resolvendo $x'_1 = x'_2 = 0$ são dados por

$$\begin{cases} x_1(1 - x_1) - x_1 x_2 = 0 \\ 2x_2(1 - x_2/2) - 3x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \quad \text{or} \quad 1 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \quad \text{or} \quad 2 - 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, os pontos de equilíbrio são $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(0.5, 0.5)$.

Nulclinas e pontos de equilíbrio para um sistema (5)



Nota 4 Ao longo da nulclina x_1 (rosa), os vectores de velocidade são verticais, enquanto ao longo da nulclina x_2 (amarela) são horizontais. Se nos deslocarmos ao longo de uma nulclina sem atravessar um ponto de equilíbrio, a direcção do vector de velocidade mantém-se; ao atravessar um ponto de equilíbrio, a direcção pode mudar.

Antes de apresentar os exercícios, é útil salientar que o comportamento de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes pode ser inteiramente analisado através dos valores próprios da matriz que define o sistema autónomo linear correspondente. Esta abordagem permite estudar estabilidade, oscilação e crescimento exponencial das soluções sem necessidade de resolvê-las explicitamente, estabelecendo uma ligação direta entre a equação de segunda ordem e o sistema de primeira ordem equivalente. Em particular, a equação característica da matriz do sistema fornece todas as informações necessárias sobre a natureza das soluções, quer sejam reais ou complexas, exponenciais ou oscilatórias.

Exercício 1. Converta a equação diferencial linear de coeficientes constantes $p, q \in \mathbb{R}$ de segunda ordem

$$y'' + py' + qy = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0,$$

num sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

Resolução: Introduzindo a variável $v = y'$, consideramos o vector de estado

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}.$$

O sistema de primeira ordem correspondente é

$$Y' = AY, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica da matriz A é

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

idêntica à equação característica da EDO de segunda ordem original. Assim, os valores próprios $\lambda_{1,2}$ de A determinam o comportamento da solução $y(t)$: se reais, a solução é exponencial; se complexos conjugados, a solução é oscilatória. $\square$

Exercício 2. Converta o sistema linear de primeira ordem de dimensão dois

$$Y' = AY, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

numa equação diferencial de segunda ordem para y_1 .

Resolução: Escrevendo o sistema explicitamente,

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2, \\ y_2' = cy_1 + dy_2, \end{cases}$$

derivando a primeira equação e substituindo $y_2 = (y_1' - ay_1)/b$, obtemos

$$y_1'' = (a + d)y_1' + (ad - bc)y_1,$$

ou, na forma padrão,

$$y_1'' - \text{tr}(A)y_1' + \det(A)y_1 = 0,$$

onde $\text{tr}(A) = a + d$ e $\det(A) = ad - bc$. $\square$

Nota 5 A equação característica do sistema é

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica da EDO de segunda ordem correspondente:

$$r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1r_2 = 0.$$

Verifica-se que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A), \quad \lambda_1\lambda_2 = \det(A),$$

confirmando que os valores próprios de A determinam completamente o comportamento das soluções. Este método evidencia a estreita relação entre sistemas autónomos lineares e equações diferenciais de segunda ordem, permitindo analisar estabilidade, crescimento e oscilação de forma sistemática. $\square$

Compreender pontos de equilíbrio e suas características de estabilidade permite prever o comportamento a longo prazo do sistema sem resolver explicitamente as equações diferenciais. A análise no espaço de fase revela padrões de comportamento, ciclos, convergência ou divergência, fornecendo uma visão qualitativa essencial para interpretar modelos biológicos, epidemiológicos ou químicos.

A próxima etapa consiste em estudar a **estabilidade linear dos pontos de equilíbrio**, classificar o **tipo de cada ponto** (nó, sela, foco, centro) e desenhar o espaço de fase aproximado, ligando rigor matemático à interpretação dos fenómenos reais.

Exercícios

1. Determine os pontos de equilíbrio dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - y, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y; \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy^2 - x, \\ \frac{dy}{dt} = x \sin(\pi y); \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x-1)(y-1), \\ \frac{dy}{dt} = (x+1)(y+1); \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x^2-y^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(1-x^2-y^2). \end{cases}
 \end{array}$$

2. Crescimento de populações

- Considere uma população de presas que cresce logisticamente na ausência de predadores, com taxa intrínseca $r > 0$ e capacidade de suporte $K > 0$. Suponha que os predadores reduzem a população de presas de forma proporcional ao produto do número de presas e predadores. Assuma ainda que os predadores dependem exclusivamente das presas para sobreviver. Formule um sistema autónomo que modele esta situação, identifique os pontos de equilíbrio e interprete o seu significado biológico. Discuta em que condições podem ocorrer oscilações sustentadas nas populações.
- Estude um modelo de competição entre duas espécies que utilizam o mesmo recurso, assumindo que cada espécie seguiria uma dinâmica logística na ausência da outra. Modele a interação entre as espécies através de termos de competição que reduzem a taxa de crescimento de cada população. Determine as condições para coexistência, exclusão competitiva e estabilidade dos equilíbrios.
- Considere duas espécies com interação cooperativa (mutualismo). Suponha que, isoladamente, cada espécie teria crescimento logístico, mas que a presença da outra aumenta a taxa de crescimento. Formule um sistema que modele este fenómeno, determine os equilíbrios e discuta a possibilidade de crescimento ilimitado ou de equilíbrios positivos estáveis.
- Um ecossistema contém uma espécie presa que se reproduz logisticamente e duas espécies predadoras que competem apenas indiretamente através das presas. Formule o sistema e determine os equilíbrios. Discuta cenários possíveis: coexistência das duas espécies predadoras, extinção de uma delas ou oscilações.

3. Propagação de doenças infecciosas

- Partindo da descrição verbal de uma doença transmitida por contacto direto entre indivíduos suscetíveis e infetados, construa o modelo SIR clássico. Analise os pontos de equilíbrio, determine quando existe epidemia e discuta o significado biológico do número básico de reprodução R_0 .
- Suponha que uma doença confere imunidade temporária e que indivíduos recuperados se tornam de novo suscetíveis após um tempo médio $1/\alpha$. Formule um modelo SIRS e estude os pontos de equilíbrio. Analise como a estabilidade do equilíbrio livre de infeção depende dos parâmetros.
- Estude um modelo SEIR em que um período de incubação precede o estado infeccioso. Formule o sistema, determine os equilíbrios e discuta o papel do período de latência na propagação da doença.

- (d) Considere um modelo SIR com vacinação contínua a uma taxa $v > 0$, em que indivíduos suscetíveis são transferidos para recuperados sem passar pelo estado de infecção. Formule o sistema e determine condições para a eliminação da doença. Interprete biologicamente o valor crítico da taxa de vacinação.
- (e) Num modelo SIR, suponha que a taxa de contacto varia sazonalmente, por exemplo $\beta(t) = \beta_0(1 + \varepsilon \cos(\omega t))$. Embora o sistema deixe de ser autónomo, considere o sistema correspondente com β constante igual à média temporal e discuta por que razão este modelo autónomo pode não reproduzir ciclos epidémicos observados.

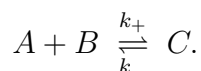
4. Reacções químicas (*)

- (a) Considere a reação elementar $A + B \rightarrow C$ obedecendo à lei de acção de massas. Suponha que não existem outras reacções. Modele as concentrações $[A](t)$, $[B](t)$ e $[C](t)$ através de um sistema autónomo. Determine conservações do sistema e reduza a dimensão quando possível. Resolva analiticamente o sistema reduzido.
- (b) Estude o mecanismo de reação em cadeia



Assuma que as duas reacções têm constantes cinéticas k_1 e k_2 . Formule o sistema correspondente para $[A](t)$, $[B](t)$ e $[C](t)$. Identifique quantidades conservadas e discuta condições para a ocorrência de crescimento autocatalítico de C .

- (c) Considere o mecanismo reversível



Construa o sistema de equações e determine todas as quantidades conservadas. Analise os equilíbrios e mostre que o sistema admite um equilíbrio químico. Discuta a estabilidade deste equilíbrio.

- (d) Em cinética enzimática (modelo de Michaelis–Menten), considere o mecanismo



Formule as equações diferenciais completas do sistema. Identifique o parâmetro pequeno que leva à aproximação quasi-estacionária e discuta a validade dessa aproximação.

Aula 17: Análise qualitativa de sistemas de equações

Nesta aula desenvolvemos a teoria qualitativa para sistemas autónomos de duas equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

com condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$. Assumimos que f , g e as suas derivadas parciais são contínuas numa região aberta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, garantindo, pelo teorema de Picard-Lindelöf, a existência e unicidade da solução para qualquer condição inicial $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Cada solução

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (2)$$

define uma curva paramétrica no plano xy . Essa curva, acompanhada de uma seta que indica o sentido temporal, é chamada **órbita** ou **trajectória**. O plano xy é denominado **plano de fase**, e o esboço das órbitas de todas as soluções é chamado **retrato de fase**. O sentido das órbitas é dado pelo **campo vectorial** $(f(x, y), g(x, y))$: em cada ponto $(x(t), y(t))$, a órbita é tangente ao vetor do campo e a seta indica a orientação do movimento.

Nota 1 (Invariância por translações temporais) *Como o sistema (1) é autónomo, as equações diferenciais não dependem explicitamente do tempo t . Esta independência implica invariância por translações temporais: se $(x(t), y(t))$ é solução, então para qualquer $t_1 \in \mathbb{R}$ a função trasladada*

$$x_1(t) = x(t - t_1), \quad y_1(t) = y(t - t_1)$$

é também solução. De facto,

$$x_1'(t) = x'(t - t_1) = f(x(t - t_1), y(t - t_1)) = f(x_1(t), y_1(t)),$$

e o mesmo vale para $y_1(t)$.

Esta propriedade permite adoptar, sem perda de generalidade, o instante inicial $t_0 = 0$ ao estudar o sistema, simplificando a análise das soluções e das suas órbitas. $\square$

Nota 2 *Seguem-se duas consequências geométricas imediatas da unicidade de solução garantida pelo teorema de Picard-Lindelöf para o sistema autónomo.*

1. As órbitas não se intersectam no plano de fase.

Se duas soluções distintas $(x(t), y(t))$ e $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ se intersectassem num ponto $(x(t_0), y(t_0)) = (\tilde{x}(t_0), \tilde{y}(t_0))$, teríamos duas soluções diferentes com a mesma condição inicial. Isto contradiz a unicidade garantida pelo Teorema de Picard-Lindelöf. Assim, cada condição inicial determina uma órbita única no plano de fase.

2. Órbitas fechadas correspondem a soluções periódicas.

Uma órbita fechada consiste numa trajectória que regressa ao ponto inicial após um certo período $T > 0$. A unicidade da solução implica que a trajectória deve repetir-se indefinidamente a partir desse instante, logo a solução é periódica, com período T . Dizemos então que o sistema possui uma órbita periódica. $\square$

Estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema autónomo

Consideremos agora o sistema autónomo (1), em geral não linear, e seja (x^*, y^*) um ponto de equilíbrio, isto é,

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0.$$

Pretendemos agora generalizar a noção de estabilidade introduzida na Aula 2 para o caso de sistemas autónomos de primeira ordem. Embora a definição seja apresentada para sistemas bidimensionais, ela estende-se sem dificuldade a sistemas de dimensão arbitrária.

Definição 1 (Estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade) Um ponto de equilíbrio (x^*, y^*) do sistema diz-se:

- **estável** se as soluções que começam suficientemente perto de (x^*, y^*) permanecem próximas desse ponto para todos os tempos futuros. Formalmente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- **assintoticamente estável** se é estável e, além disso, as soluções iniciadas perto do equilíbrio convergem para ele, isto é

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| = 0;$$

- **instável** se não é estável, isto é, se existe $\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$, se pode encontrar uma condição inicial satisfazendo

$$\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| \geq \varepsilon \text{ para algum } t \geq 0.$$

Depois de introduzido o conceito de estabilidade para pontos de equilíbrio, surge naturalmente a questão prática: *como determinar se um ponto de equilíbrio é estável, assintoticamente estável ou instável?* Para sistemas não lineares, resolver explicitamente as equações diferenciais é geralmente impossível. No entanto, quando o interesse é o comportamento *local* perto de um ponto de equilíbrio, a dinâmica pode muitas vezes ser descrita com grande precisão através de uma aproximação linear obtida por *linearização*.

Seja $X^* = (x^*, y^*)$ um ponto de equilíbrio de (1) com $F = (f, g)$ nas condições do teorema de Picard-Lindelöf. Usando o fórmula de Taylor na vizinhança do equilíbrio obtemos

$$F(X) = F(X^*) + J_F(X^*)(X - X^*) + R_2(X),$$

onde $X = (x, y)$ e termo correspondente ao resto de ordem 2, $R_2 = \mathcal{O}((X - X^*)^2)$, satisfaz $\|R_2\| \leq C\|X - X^*\|^2$ para uma certa constante $C > 0$, e

$$J_F(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}.$$

é a **matriz Jacobiana** de F em $X^* = (x^*, y^*)$.

Desprezando os termos do resto e atendendo a que $F(X^*) = 0$, obtemos a aproximação

$$X' \approx J_F(X^*)(X - X^*),$$

que corresponde ao sistema linearizado

$$Z' = J_F(X^*)Z, \quad Z = X - X^*.$$

Isto significa que, suficientemente perto do equilíbrio, a dinâmica do sistema não linear é bem aproximada pela do sistema linear.

O comportamento do sistema linearizado nem sempre fornece a informação essencial sobre a estabilidade do ponto equilíbrio. No entanto, para **pontos de equilíbrio hiperbólicos**, isto é, para pontos de equilíbrio onde todos os valores próprios da matriz jacobiana associada tiverem parte real não nula, o estudo do sistema não linear pode ser feito por linearização, como estabelece o teorema de Hartman–Grobman, que apresentamos sem demonstração.

Teorema 1 (Hartman–Grobman) *Se X^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema autónomo $dX/dt = F(X)$, então existe uma vizinhança de X^* em que o sistema não linear é topologicamente equivalente à sua linearização. Isto significa que, embora a dinâmica possa ser distorcida (esticada, comprimida ou inclinada) pela ação de uma transformação contínua e invertível (homeomorfismo), a estrutura qualitativa do sistema (como o comportamento das trajetórias) é preservada em comparação com o sistema linear aproximado*

Nota 3 *Se algum valor próprio da matriz jacobiana tiver parte real igual a zero, o equilíbrio deixa de ser hiperbólico e a linearização já não permite concluir acerca da estabilidade. Nesses casos podem surgir fenómenos mais subtis, como centros, ciclos limite ou bifurcações, exigindo técnicas mais avançadas, como funções de Lyapunov, formas normais ou expansões de ordem superior.*

Vamos considerar o sistema linear

$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Se a matriz A for não singular, o único estado estacionário do sistema (3) é a origem $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.

Como vimos na aula passada, este a equação característica do sistema (3) é

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

que corresponde às equação característica da equação diferencial de segunda ordem

$$x_1'' - \text{tr}(A)x_1' + \det(A) = 0,$$

cujas raízes são, precisamente, os valores próprios de A

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)} \right).$$

Nota 4 (Matrizes semelhantes e valores próprios) *Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existir uma matriz invertível P tal que $A = PBP^{-1}$. É importante notar que matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios, o mesmo traço (que é, por*

definição, a soma dos elementos que figuram na diagonal principal da matriz) e o mesmo determinante. Uma matriz diz-se diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal. Neste caso, os elementos que figuram na diagonal desta matriz diagonal são justamente os valores próprios de A .

Note-se ainda que, se A é semelhante a B , a mudança de variável $Y = P^{-1}X$ permite concluir que

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = BY,$$

ou seja, permite passar do sistema diferencial (3) para o sistema $Y' = BY$. Assim, se soubermos determinar a solução Y a solução de (3) é $X = PY$. $\square$

Vamos analisar os três vários casos que podem surgir consoante o sinal do discriminante $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$.

Caso 1: Valores próprios reais distintos ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Neste caso, temos que $\Delta > 0$ a matriz A é diagonalizável, isto é, existe uma matrix invertível P tal que

$$A = PBP^{-1}, \quad \text{com} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz P são os vectores próprios v_1 e v_2 (linearmente independentes) associados aos valores próprios λ_1 e λ_2 , respectivamente.

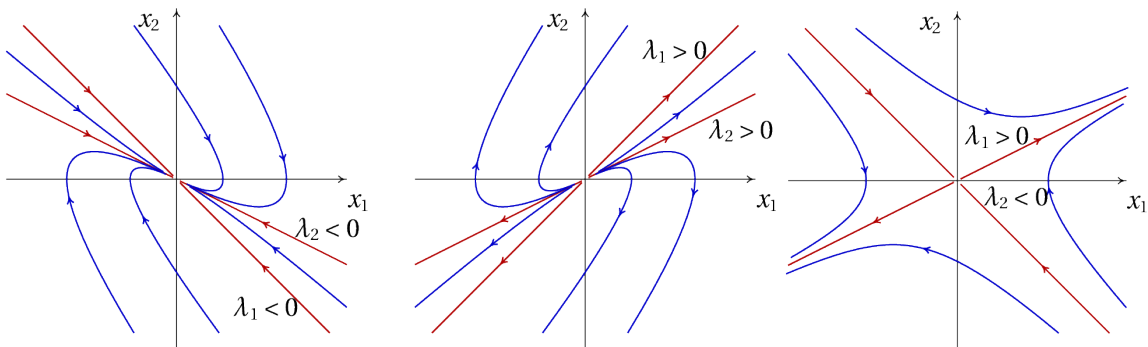
Então, com a mudança de variável $Y = P^{-1}X$, estudar a estabilidade de (3) é equivalente a estudar a estabilidade de $Y' = BY$. Como B é diagonal, o sistema separa-se em duas equações escalares $y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t)$ e $y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t)$, cuja solução geral é

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

e a solução de (3) é

$$X(t) = PY(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Se os dois valores próprios λ_1 e λ_2 são positivos, então as soluções divergem do ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Se os dois valores próprios são negativos então a solução converge para o estado estacionário $(0, 0)$. Se os valores próprios têm sinais opostos, digamos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, então x_1 cresce exponencialmente e x_2 decresce. No primeiro caso o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ diz-se um **nó estável**, ou **nó atractivo** (gráfico do lado esquerdo da figura da página seguinte), no segundo um **nó instável**, ou **nó repulsivo**, (gráfico do centro da figura da página seguinte) e no terceiro um **ponto de sela** (gráfico do lado direito da figura da página seguinte), que é um ponto de equilíbrio instável.



Caso 2: Valores próprios reais iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Neste caso, temos que $\Delta = 0$ e podemos ter duas situações.

1. **A matriz A é diagonalizável.** Neste caso a multiplicidade algébrica de λ é 2 e existem dois vectores próprios v_1 e v_2 linearmente independentes. Então, A é semelhante à matriz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e, como tal, solução de (3) é (ver caso anterior)

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} v_1 + C_2 e^{\lambda t} v_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. **A matriz A não é diagonalizável** Neste caso a multiplicidade algébrica de λ é 1 e não existem dois vectores próprios linearmente independentes; existe apenas v_1 . Recorrendo à **forma de Jordan**, temos que

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad (A - \lambda I)v_2 = v_1 \quad (v_2 \text{ é um vector próprio generalizado})$$

e, considerando P a matriz (invertível) cujas colunas são v_1 e v_2 , temos que A é semelhante a uma matriz triangular

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução de $Y' = BY$ é (prove!)

$$Y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

e a solução de (3) é

$$X(t) = PY(t) = C_1 e^{\lambda t} v_1 + C_2 t e^{\lambda t} v_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Em ambos os casos, a análise da estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é feita como no caso dos valores próprios reais distintos: se $\lambda < 0$ o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é um **nó estável**; se $\lambda > 0$ o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é um **nó instável**.

Caso 3: Valores próprios complexos ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$). Neste caso, temos que $\Delta < 0$ e a matriz A é semelhante a

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Então, a solução de $Y' = BY$ é

$$Y(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

com

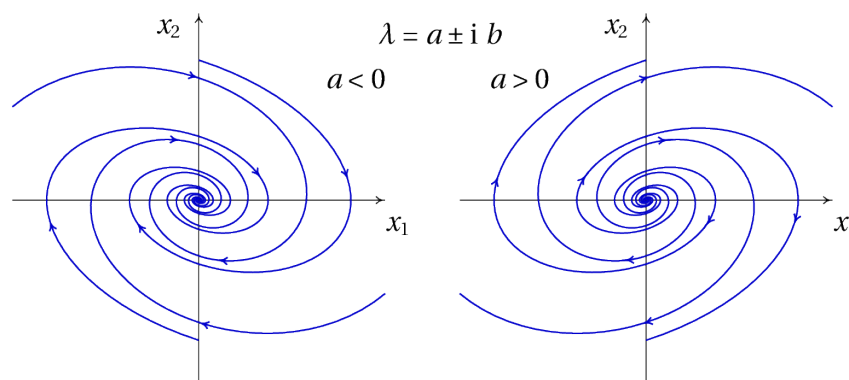
$$Y_1(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{bmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

A solução de (3) é

$$X(t) = C_1 Y^{(1)}(t) v_r + C_2 Y^{(2)}(t) v_i, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

com v_r e v_i as partes reais e imaginárias do vector próprio v de A .

Se $\alpha = 0$ então os valores próprios são imaginários puros. Nesse caso, as soluções são periódicas e as trajectórias são órbitas fechadas em torno do estado estacionário. Se $\alpha < 0$ então as trajectórias são espirais que se aproximam do estado estacionário. No caso $\alpha > 0$ as trajectórias são espirais que se afastam de $(0, 0)$. No primeiro caso o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ diz-se um **centro**, no segundo um **foco instável**, ou **foco repulsivo** (gráfico do lado esquerdo da figura da página seguinte), e no terceiro um **foco estável**, ou **foco atractivo** (gráfico do lado direito da figura da página seguinte).



Nos casos estudados, as soluções convergem para o estado estacionário $(0, 0)$ se ambos os valores próprios tiverem parte real negativa. Quando as soluções convergem para o estado estacionário dizemos que o estado estacionário é assintoticamente estável.

Teorema 2 *O sistema linear (3) tem em $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se e só se todos os valores próprios da matriz tiverem parte real negativa.*

Nota 5 (Classificação dos pontos de equilíbrio) *De acordo com o que foi visto, dado o ponto de equilíbrio $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ do sistema (3), a sua classificação de acordo com a estabilidade é a seguinte.*

- **Estável (nó ou foco assintoticamente estável):** se $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, ou seja,

$$\text{tr}(A) < 0 \quad \text{e} \quad \det(A) > 0.$$

- **Instável (nó ou foco instável):** se $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, ou seja,

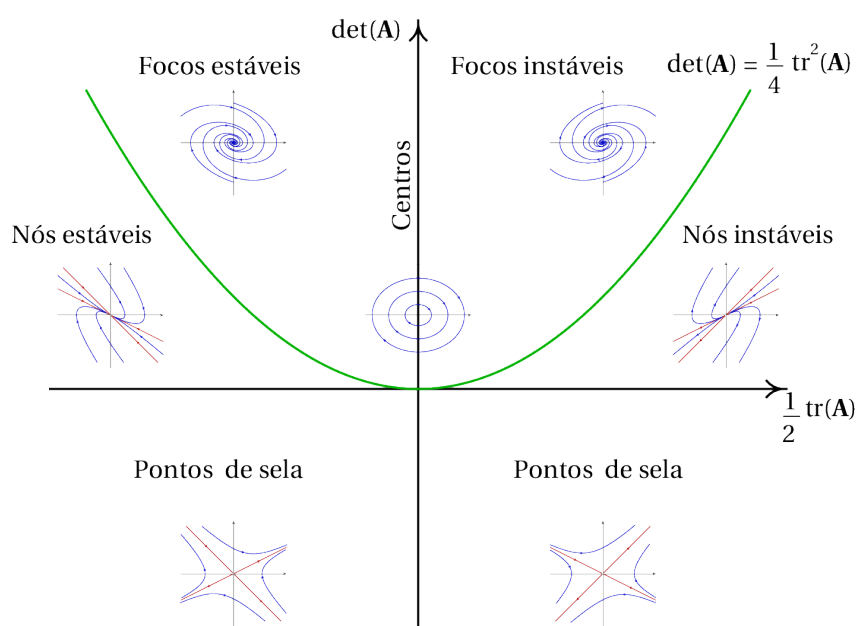
$$\text{tr}(A) > 0 \quad \text{e} \quad \det(A) > 0.$$

- **Sela:** se $\det(A) < 0$, os valores próprios têm sinais opostos, e o ponto de equilíbrio é instável.
- **Centro:** se $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$, os valores próprios são imaginários puros, e o ponto de equilíbrio é estável, mas não assintoticamente.

Podemos concluir que a estabilidade do ponto de equilíbrio $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ depende apenas do traço e determinante da matriz A : o ponto é assintoticamente estável se $\text{tr}(A) < 0$ e $\det(A) > 0$, instável se $\det(A) < 0$, e possui comportamento oscilatório (centro) se $\text{tr}(A) = 0$ e $\det(A) > 0$. $\square$

A figura e a tabelas seguintes resumem o que acabámos de analisar.

Δ	$\det(A)$	$\text{tr}(A)$	Tipo de ponto	Valores próprios
+	–		Ponto de sela	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
+	+	–	Nó estável	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
+	+	+	Nó instável	$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
0	+	–	Nó (degenerado) estável	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$
0	+	+	Nó (degenerado) instável	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$
–	+	0	Centro	$\lambda = \pm \beta i$
–	+	–	Foco/espiral estável	$\lambda = \alpha \pm \beta i, \alpha < 0$
–	+	+	Foco/espiral instável	$\lambda = \alpha \pm \beta i, \alpha > 0$



Da análise local à compreensão global (*)

Após termos estudado a estabilidade linear dos pontos de equilíbrio, percebemos que essa análise fornece informações valiosas sobre o comportamento das soluções nas vizinhanças imediatas desses pontos. Contudo, muitas vezes queremos compreender o que acontece globalmente: como se comportam as soluções ao longo do tempo, para além de pequenas perturbações, e que tipos de padrões persistentes podem surgir. Por exemplo, em ecologia, podemos querer saber se populações oscilam indefinidamente, atingem um equilíbrio ou divergem; em química, se concentrações atingem estados estacionários ou ciclos periódicos; em epidemiologia, se surtos desaparecem ou tornam-se periódicos.

É aqui que a análise global entra em cena. Para sistemas autónomos bidimensionais, mesmo conhecendo todos os pontos de equilíbrio e a sua estabilidade, ainda não sabemos se existem órbitas fechadas, ciclos limite ou comportamentos mais complexos no plano. O **teorema de Poincaré–Bendixson** é a ferramenta central que nos permite fazer esta ligação entre análise local e comportamento global, restringindo drasticamente as possibilidades para soluções limitadas em regiões compactas do plano.

Definição 2 (Ciclo limite) *Um ciclo limite é uma solução periódica isolada de um sistema autônomo, tal que qualquer outra solução suficientemente próxima se aproxima desse ciclo quando $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Ciclos limite representam comportamentos periódicos persistentes que não dependem de condições iniciais muito específicas.*

Teorema 3 (Poincaré–Bendixson) *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada, fechada e positivamente invariável para o sistema*

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ou seja, qualquer solução que entra em D permanece em D para todo $t \geq 0$. Se D contém apenas um número finito de pontos de equilíbrio, então qualquer solução que permanece em D para $t \rightarrow +\infty$ satisfaz uma das seguintes alternativas:

1. *converge para um ponto de equilíbrio;*
2. *converge para um ciclo limite.*

Este teorema oferece uma compreensão qualitativa poderosa do comportamento global:

- Em regiões limitadas do plano sem equilíbrios infinitos, as soluções não podem divergir nem apresentar comportamentos caóticos; o limite final é sempre um ponto de equilíbrio ou um ciclo limite.
- Ciclos limite explicam oscilações persistentes em sistemas naturais, como populações predador-presa ou reações químicas oscilantes.
- A análise local (estabilidade de pontos críticos) combinada com o teorema de Poincaré–Bendixson fornece uma visão completa do espaço de fase sem resolver explicitamente o sistema.

Exemplo 1 (Modelo Lotka–Volterra) *Consideremos o sistema predador-presa*

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. O sistema possui dois pontos de equilíbrio: $(0, 0)$ e $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Se a solução permanecer no primeiro quadrante positivo e não convergir para $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, o teorema de Poincaré–Bendixson garante que a solução tenderá a um ciclo limite, explicando o comportamento oscilatório típico das populações. Assim, embora a análise linear indique estabilidade local, o teorema fornece a previsão global: as populações não explodem nem desaparecem, mas oscilam de forma periódica em torno do ponto de equilíbrio. $\square$

O teorema de Poincaré–Bendixson estabelece uma ponte entre a análise local e a compreensão global de sistemas autônomos bidimensionais. Permite prever ciclos e padrões qualitativos sem necessidade de soluções explícitas, sendo uma ferramenta essencial em biologia, química, epidemiologia e qualquer área onde sistemas oscilatórios surgem naturalmente.

Exercícios

1. Estude a estabilidade do estado estacionário $(x^*, y^*) = (0, 0)$ para cada um dos sistemas seguintes e esboce o plano de fase em torno do ponto de equilíbrio;

$$(a) \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = x - y; \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y; \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x' = -4x + 2y, \\ y' = 3x - 2y; \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = x - 2y - xy, \\ y' = -x - y + xy; \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = -y. \\ y' = 2x - 4y; \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x' = -x - xy, \\ y' = -x - 2y + xy. \end{cases}$$

2. Transforme a equação do oscilador harmónico

$$my'' + \mu y' + ky = 0$$

num sistema de equações no plano de fase (y, v) , e estude os tipos de singularidades que ocorrem, relacionando-as com as noções de amortecimento forte, crítico e oscilatório.

3. Considere o sistema

$$x'_1 = -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2), \quad x'_2 = x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2),$$

com $\mu \in \mathbb{R}$.

- (a) Estude a estabilidade do estado estacionário $(0, 0)$.
 (b) Considere a mudança de variável para coordenadas polares

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

e obtenha o sistema

$$r' = r(\mu - r^2), \quad \theta' = 1.$$

- (c) Trace o retrato fase para os casos $\mu < 0$ e $\mu > 0$.
 4. (*) Considere o sistema $\frac{du}{dt} = f(u)$, com $f(u) = (u_1 + u_2 - u_1^3, -u_1)$. Mostre que a solução u se aproxima de uma órbita periódica quando $t \rightarrow \infty$, para qualquer condição inicial não nula.
 5. Considere o modelo de propagação da malária

$$\frac{dv_1}{dt} = \alpha_1 v_2 (1 - v_1) - v_1, \quad \frac{dv_2}{dt} = c (\alpha_2 v_1 (1 - v_2) - v_2),$$

onde v_1 e v_2 representam, respectivamente, a proporção de humanos e mosquitos infectados pela doença, α_1, α_2 e c são constantes positivas.

- (a) Prove que o estado estacionário de coexistência (v_1^*, v_2^*) existe se e só se $\alpha_1 \alpha_2 > 1$.
 (b) Estude a estabilidade dos estados estacionários $(0, 0)$ e (v_1^*, v_2^*) .

6. Considere o seguinte modelo presa-predador de Lotka-Volterra modificado

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u(1 - \epsilon u - v), \\ \frac{dv}{dt} &= av(u - 1),\end{aligned}$$

onde $u(t)$ e $v(t)$ representam a densidade da presa e do predador, respetivamente, e $a > 0$, $\epsilon > 0$.

- Mostre que o ponto estacionário de não coexistência, $(u^*, v^*) = (1/\epsilon, 0)$, é estável quando ϵ é suficientemente pequeno e positivo.
 - Faça um esboço do plano de fases, indicando os pontos estacionários e as trajetórias qualitativas.
7. Considere o seguinte modelo presa-predador de Lotka-Volterra em que é considerada a existência de um refúgio para a espécie de presas

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u - (u - k)v, \\ \frac{dv}{dt} &= av(u - k - 1).\end{aligned}$$

- Faça uma interpretação deste modelo.
 - Estude a estabilidade dos estados estacionários.
8. Considere o modelo predador-presa de Leslie

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= au - bu^2 - cuv, \\ \frac{dv}{dt} &= dv - e\frac{v^2}{u},\end{aligned}$$

onde a, b, c, d e e são parâmetros positivos.

- Faça um esboço do plano fase do modelo.
 - Estude o comportamento das soluções.
9. Considere o seguinte modelo de propagação de uma doença

$$\frac{du}{dt} = \frac{b}{\gamma + b}(q - u) - R_0 uv, \quad \frac{dv}{dt} = (R_0 u - 1)v,$$

onde u e v correspondem, respectivamente, às populações de indivíduos susceptíveis e infectados. Os parâmetros b, γ, q e R_0 são positivos.

- Mostre que o estado estacionário correspondente à ausência de doença é estável se $q < 1/R_0$.
- Existe um estado estacionário de endemia?

Aula 18: Modelos de populações que interagem

O modelo mais simples que podemos considerar é do tipo Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_1 x_2, \\ x'_2 = \gamma x_2 + \delta x_1 x_2, \end{cases} \quad (1)$$

onde x e y representam a concentração ou o número de indivíduos de duas populações. Os termos lineares αx e γy descrevem a evolução das populações quando isoladas. Os termos não lineares βxy e δxy estão relacionados com interação das duas populações.

α	β	γ	δ	Modelo
-	+	+	-	Predador (x_1) - presa (x_2)
-	+	-	+	Mutualismo ou simbiose
+	-	-	-	Competição

Os pontos de equilíbrio de (1) são dados por

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_1 x_2 = 0 \\ \gamma x_2 + \delta x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = -\frac{\alpha}{\beta} \\ x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = -\frac{\gamma}{\delta} \end{cases}$$

ou seja, $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = \left(-\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Para estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, considera-se a linearização é dada por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha + \beta x_2^* & \beta x_1^* \\ \delta x_2^* & \gamma + \delta x_1^* \end{bmatrix}}_{J_F(x^*)} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

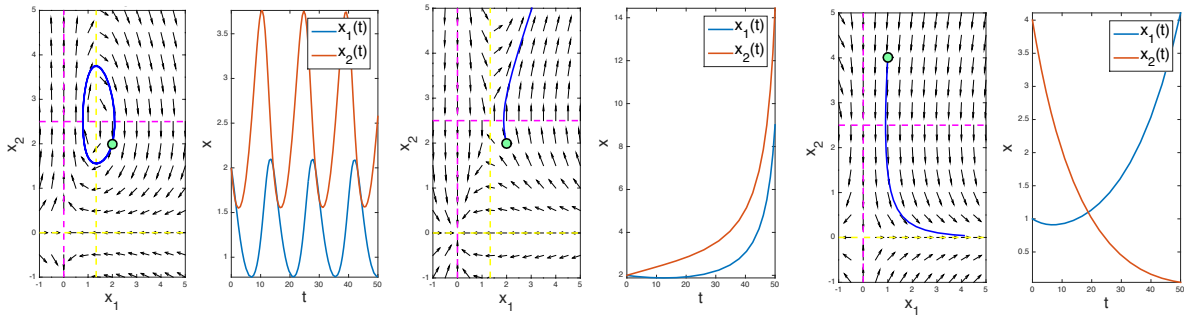
Os valores próprios de $J_F(P_1)$ são $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = \gamma$; os valores próprios de $J_F(P_2)$ são $\lambda_j = \pm\sqrt{\alpha\gamma}$, $j = 1, 2$.

Exemplo 1 (Modelo predador/presa) Para P_1 os valores próprios são $\lambda_1 = \alpha < 0$ e $\lambda_2 = \gamma > 0$ o que implica que P_1 é um **ponto de sela**. Para P_2 (verifique se é biologicamente relevante) os valores próprios são $\lambda_j = \pm i\sqrt{|\alpha\gamma|}$, $j = 1, 2$ o que implica que P_2 é um **centro**. $\square$

Exemplo 2 (Modelo de mutualismo) Para P_1 os valores próprios são $\lambda_1 = \alpha < 0$ e $\lambda_2 = \gamma < 0$ o que implica que P_1 é um **nó estável**. Para P_2 (verifique que é biologicamente relevante) os valores próprios são $\lambda_j = \pm\sqrt{\alpha\gamma}$, $j = 1, 2$ o que implica que P_2 é um **ponto de sela**. $\square$

Exemplo 3 (Modelo de competição) Para P_1 os valores próprios são $\lambda_1 = \alpha > 0$ e $\lambda_2 = \gamma < 0$ o que implica que P_1 é um **ponto de sela**. O equilíbrio P_2 não é biologicamente relevante ($-\gamma/\delta < 0$). $\square$

Retrato de fase e trajectórias: predador/presa; mutualismo; competição



Duas espécies a competir pelo mesmo recurso

Consideremos que as duas espécies quando isoladas evoluem de acordo com a equação logística

$$\begin{cases} x_1' = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) \\ x_2' = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) \end{cases} \quad (2)$$

em que $r_i, K_i, i = 1, 2$, denotam respectivamente o factor de crescimento e a capacidade de suporte do meio.

Se a espécie x_2 se alimenta do mesmo recurso, então a penalização que x_1 sofre depende da densidade de x_2 e ainda da sua relação com o recurso K_1 . Deste modo, na penalização não temos apenas x_1/K_1 mas também x_2/K_1 afectado de um coeficiente b_{12} . Assim a primeira equação de (2) é substituída por

$$x_1' = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} - b_{12} \frac{x_2}{K_1}\right).$$

A espécie x_1 tem uma influência análoga na espécie x_2 . Atendendo às considerações anteriores, o modelo (2) dá lugar a

$$\begin{cases} x_1' = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1} - b_{12} \frac{x_2}{K_1}\right), \\ x_2' = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2} - b_{21} \frac{x_1}{K_2}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Considerando

$$u_1 = \frac{x_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{x_2}{K_2}, \quad \tau = r_1 t, \quad \rho = \frac{r_2}{r_1}, \quad a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2}.$$

obtemos o sistema adimensional (onde as derivadas são em relação a τ)

$$\begin{cases} u_1' = u_1 (1 - u_1 - a_{12} u_2), \\ u_2' = \rho u_2 (1 - u_2 - a_{21} u_1). \end{cases} \quad (4)$$

O sistema diferencial (4) tem os seguintes estados estacionários (assumindo $a_{12} a_{21} \neq 1$)

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12} a_{21}}, \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12} a_{21}} \right).$$

Relativamente à estabilidade dos estados de equilíbrio anteriores notamos que a linearização de (4) no estado de equilíbrio (u_1^*, u_2^*) tem a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 - 2u_1^* - a_{12}u_2^* & -a_{12}u_1^* \\ -\rho a_{21}u_2^* & \rho(1 - 2u_2^* - a_{21}u_1^*) \end{bmatrix}.$$

Logo:

- $(0, 0)$ é instável (v.p. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \rho$);
- $(1, 0)$ é estável se $a_{21} > 1$ e é instável se $a_{21} < 1$ (v.p. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \rho(1 - a_{21})$);
- $(0, 1)$ é estável se $a_{12} > 1$ e é instável se $a_{12} < 1$ (v.p. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \rho(1 - a_{12})$);
- O estado estacionário de coexistência é estável se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$ e instável se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$. Fica como exercício a averiguação da estabilidade nos restantes casos.

Notamos que se $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$, então existe apenas um ponto crítico estável e todas as trajectórias tendem para este ponto. Por outro lado, se $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$, então $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são os únicos estados estáveis e, neste caso, cada ponto crítico tem um **domínio de atracção**. O plano fase é dividido em duas partes por uma curva que passa pelo ponto crítico instável.

Vejamos algumas implicações ecológicas da análise qualitativa anterior. No primeiro caso existe um estado de equilíbrio em que as duas espécies em competição podem coexistir. Em relação ao parâmetros primitivos, a situação anterior corresponde a

$$b_{12}\frac{K_2}{K_1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_{12}K_2 - K_1 < 0 \quad \text{e} \quad b_{21}\frac{K_1}{K_2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_{21}K_1 - K_2 < 0.$$

Se admitirmos que os factores que traduzem a capacidade do meio para cada espécie são sensivelmente iguais, então os factores que traduzem a influência das espécies não são significativos. Deste modo as duas espécies convivem no meio não sendo a competição agressiva. Na segunda situação considerada, se a capacidade do meio são, para cada espécie, iguais, então os coeficientes de influência são superiores à unidade. Neste caso os três estados de equilíbrio existem, mas apenas $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são estáveis. Assim, a evolução do sistema depende fortemente do estado de partida de cada espécie podendo evoluir para um dos dois estados estáveis consoante está no domínio de atracção de um ou outro estado. Esperamos então a extinção de uma das espécies.

Escolha dos parâmetros (*)

G.S. Gause, em 2003, relatou dados para o seguinte experiência. Em dois recipientes contendo o mesmo meio, crescem populações de *Paramecium caudatum* e *Paramecium aurelia*. As duas populações são medidas uma vez por dia. Além disso, num recipiente maior, as duas populações são misturadas e deixadas crescer juntas. Nesta situação, as duas populações competem pelos mesmos recursos. Novamente, as populações são medidas uma vez por dia. Os dados da causa são mostrados na tabela seguinte, onde os dados entre parêntesis foram os obtidos na situação de competição.

Dia	Densidade média (número de indivíduos por $\text{cm}^3/2$)	
	<i>Paramecium aurelia</i>	<i>Paramecium caudatum</i>
0	2 (2)	2 (2)
1	-	-
2	14 (10)	10 (10)
3	34 (21)	10 (11)
4	56 (58)	11 (29)
5	94 (92)	21 (50)
6	189 (202)	56 (88)
7	266 (163)	104 (102)
8	330 (221)	137 (124)
9	416 (293)	165 (93)
10	507 (236)	194 (80)
11	580(303)	217(66)
12	610(302)	199 (83)
13	513 (340)	201 (55)
14	593 (387)	182 (67)
15	557 (335)	192 (52)
16	560 (363)	179 (55)
17	522 (323)	190 (40)
18	565 (358)	206 (48)
19	517 (308)	209 (47)
20	500 (350)	196 (50)
21	585 (330)	195 (40)
22	500 (350)	234 (20)
23	495 (350)	210 (20)
24	525 (330)	210 (35)
25	510 (350)	180 (20)

O modelo da competição entre as duas espécies pode ser dado por (3). O desafio agora consiste em o ajustar aos dados da tabela. Por outras palavras, o objectivo consiste em determinar os parâmetros $r_1, r_2, K_1, K_2, b_{12}, b_{21}$ por forma a que os resultados obtidos pelo modelo se ajustem aos dados fornecidos. Para além disso, pretende-se prever sobre a viabilidade a longo prazo das populações: ambas sobreviverão ou uma população será extinta?

A determinação dos parâmetros pode ser feita recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Suponhamos que temos um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma $x' = f(x; p)$, com $x(t_0) = x_0$, onde x é a solução da equação diferencial e $p = (p_1, \dots, p_n)$ um conjunto de parâmetros desconhecidos. Pretende-se determinar os parâmetros de modo que a solução $x(t; p)$ – que escrevemos desta forma para evidenciar que depende dos parâmetros – se ajuste aos dados obtidos experimentalmente,

$\{(t_0, x_0), (t_1, x_1), \dots, (t_m, x_m)\}$, onde x_i é a observação efectuada no instante t_i , $i = 1, \dots, m$, e $m \gg n$. O objectivo consiste determinar o conjunto de parâmetros p que melhor se ajusta aos dados de forma a minimizar o erro quadrático total

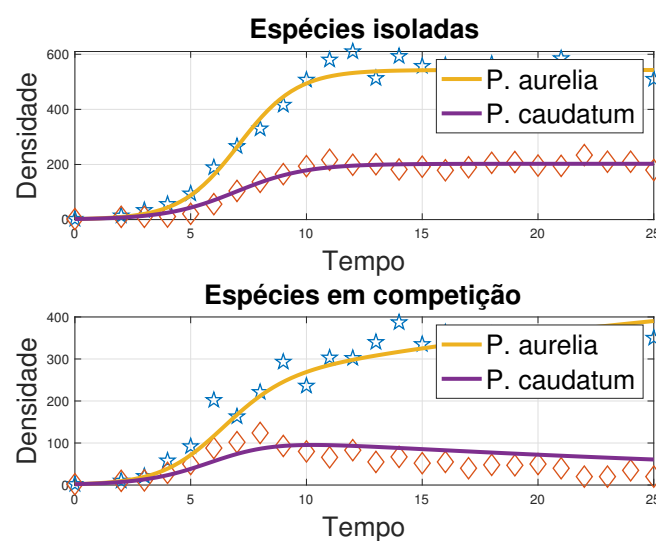
$$E(p) = \sum_{i=0}^m (x_i - x(t_i; p))^2.$$

Esse processo pode ser descrito pelo seguinte código em MATLAB, exemplificado para um conjunto das 10 primeiras observações em situação de isolamento para a *Paramecia aurelia* e se considera o modelo logístico

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0.$$

```
t = [0;2;3;4;5;6;7;8;9;10]; % instantes de tempo
dados = [2;14;34;56;94;189;266;330;416;507]; % observacoes
r = 1; K = 500; kappa0 = [r K]; % valores iniciais dos parametros
kappa = lsqcurvefit(@fun,kappa0,t,dados); % minimos quadrados
tfit = linspace(min(t),max(t)); xfit = fun(kappa,tfit);
plot(t,dados,'o',tfit,xfit);
function x = fun(kappa,t) % resolve a EDO
    r = kappa(1); K = kappa(2);
    logistica = @(t,x) r*x.*(1 - x/K);
    x0 = 2; % condicao inicial
    [t,x]=ode45(logistica,t,x0);
end
```

Para o problema em causa, o processo pode ser efectuado em duas fases. Na primeira fase, estimam-se os valores de r_1, r_2, K_1 e K_2 pelo ajuste do modelo logístico aos dados experimentais obtidos em situação de isolamento. Procedendo dessa forma, obtiveram-se os seguintes valores: $r_1 = 0,791$, $r_2 = 0,662$, $K_1 = 542,939$ e $K_2 = 202,497$. Posteriormente, determinam-se os valores de b_{12} e b_{21} por ajuste do modelo (3) aos dados experimentais obtidos em situação de competição. Obtiveram-se assim os valores $b_{12} = 2,355$ e $b_{21} = 0,390$. Os gráficos da figura seguinte ilustram os resultados obtidos.



Apesar dos dados experimentais darem a entender que a população de *Paramecia caudatum* tende para a extinção, a análise qualitativa do modelo pode permitir provar a coexistência entre ambas as espécies.

Exercícios (*)

1. Certas reacções químicas podem ser modeladas por equações diferenciais não lineares. Algumas dessas equações possuem soluções periódicas (como é o caso da reacção de Belousov-Zhabotinsky) e têm importantes aplicações na interpretação de fenómenos biológicos.

O modelo de Lefever e Nicolis (1971), chamado Brusselator por ter sido proposto pelo grupo de Ilya Prigogine em Bruxelas, supõe a existência de seis substâncias A , B , D , E , X , Y que reagem entre si de acordo com as seguintes equações:

Reacção molecular	Taxa
$A \longrightarrow X$	k_1
$B + X \longrightarrow Y + D$	k_2
$2X + Y \longrightarrow 3X$	k_3
$X \longrightarrow E$	k_4

Se denotarmos por $A(t)$, $B(t)$, ... as concentrações de A , B , ... como funções do tempo t , as reacções químicas anteriores podem ser descritas pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
 A' &= -k_1 A \\
 B' &= -k_2 B X \\
 D' &= k_2 B X \\
 E' &= k_4 X \\
 X' &= k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X \\
 Y' &= k_2 B X - k_3 X^2 Y.
 \end{aligned}$$

As equações para D e E não irão ser consideradas visto não interferir com as restantes. Para além disso, vamos supor que as taxas de reacção são constantes e iguais a 1 e que A e B possuem concentrações constantes. As equações para produtos da reacção $u(t) := X(t)$ e $v(t) := Y(t)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 u' &= A + u^2 v - (B + 1)u \\
 v' &= B u - u^2 v.
 \end{aligned}$$

- (a) Mostre que o sistema diferencial anterior possui um único ponto crítico $u = A$, $v = B/A$ e que a equação linearizada na vizinhança desse ponto é instável se e só se $B > A^2 + 1$.
- (b) Estude o comportamento dinâmico do sistema diferencial. Trace a evolução temporal e o espaço de fase com o campo de vectores para três situações: um caso estável ($A = 1$ e $B = 1$); um caso quase instável ($A = 1$ e $B = 2$); um caso instável ($A = 1$ e $B = 3$).

Aula 19: Sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem

Nesta aula vamos considerar sistemas de equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem, cujo estudo constitui uma base fundamental em matemática aplicada, física e engenharia. O tratamento será matricial, de modo a unificar a escrita e simplificar os argumentos.

Um **sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem** nas funções incógnitas (reais) $y_1(t), \dots, y_n(t)$, com $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, é dado por

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t),$$

onde $Y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T$ é o vector incógnita, $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujos coeficientes dependem, em geral, de t , e $b(t)$ é um vector coluna. Assim, a dependência em Y é exclusivamente linear, podendo a não-linearidade entrar apenas através da dependência temporal de $A(t)$ e $b(t)$.

Uma função $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada **solução do sistema** se é diferenciável e verifica a identidade anterior para todo o t no intervalo I .

Nota 1 (Equações diferenciais de ordem superior) *Qualquer equação diferencial linear de ordem n da forma*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

pode ser escrita como um sistema de primeira ordem. Para isso, definimos o vector

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

O sistema equivalente é então

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t),$$

onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Esta transformação torna possível estender à resolução de equações diferenciais de ordem superior todas as técnicas que iremos introduzir para o estudo de sistemas lineares de primeira ordem. □

Quando é prescrita uma condição inicial $Y(t_0) = Y_0$, $t_0 \in I$ fala-se de um **problema de condição (ou valor) inicial**

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases}$$

Se as funções $A(t)$ e $b(t)$ são contínuas, os teoremas clássicos de existência e unicidade asseguram que, para cada condição inicial, existe uma solução única $Y(t) \in C^1(I)$. Esta propriedade é fundamental para a interpretação física e geométrica dos sistemas.

Sistemas homogêneos e matriz fundamental

Um papel importante é desempenhado pela distinção entre sistemas homogêneos e não homogêneos. No caso homogêneo tem-se $b(t) = 0$ e o sistema reduz-se a

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad (1)$$

com $A(t)$ uma matriz $n \times n$ contínua em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Como $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ é um espaço vectorial e a aplicação $Y \mapsto Y'(t) - A(t)Y(t)$ é linear, conclui-se que o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo forma um subespaço vectorial de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. O princípio da superposição garante que qualquer combinação linear de soluções também é uma solução, e este espaço tem dimensão n . Assim, as soluções do sistema homogêneo desempenham o mesmo papel que o espaço de soluções de uma equação diferencial linear de ordem n .

Nota 2 (Solução trivial) A solução trivial $Y(t) \equiv 0$ desempenha um papel especial nos sistemas lineares homogêneos. Ela existe sempre e fornece uma referência natural para estudar propriedades fundamentais do sistema, como a unicidade de soluções: se a condição inicial é $Y(t_0) = 0$, a solução trivial é a única solução correspondente, o que caracteriza a linearidade homogênea. $\square$

Definição 1 (Matriz fundamental) Uma matriz fundamental $\Phi(t)$ do sistema (1) é uma matriz $n \times n$ cujas colunas $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ são soluções linearmente independentes do sistema, isto é, uma matriz da forma

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) & \dots & Y_n(t) \end{bmatrix}, \quad Y_i'(t) = A(t)Y_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

A matriz fundamental desempenha o mesmo papel que um conjunto de soluções fundamentais de uma equação diferencial linear de ordem n , fornecendo uma base do espaço de soluções do sistema homogêneo. Cada coluna da matriz fundamental $\Phi(t)$ fornece uma solução linearmente independente, de modo que qualquer solução do sistema linear homogêneo pode ser escrita como combinação linear dessas colunas

$$Y(t) = \Phi(t)C, \quad C \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Consideremos agora o problema de condição inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) = Y_0. \end{cases} \quad (3)$$

com $t_0 \in I$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ o vector inicial. A sua solução é dada por (2), onde a constante C é determinada resolvendo

$$\Phi(t_0)C = Y_0 \quad \Rightarrow \quad C = \Phi(t_0)^{-1}Y_0.$$

Como a matriz $\Phi(t)$ é invertível para todo t , pois suas colunas são linearmente independentes, a solução do problema (3) é dada por

$$Y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}Y_0.$$

Nota 3 (Função de Green) A matriz $G(t, t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$ é chamada a função de Green do sistema homogêneo. Veremos mais tarde que ela permite escrever diretamente a solução do sistema não homogêneo

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$$

na forma

$$Y(t) = G(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t G(t, s)b(s) ds. \quad \square$$

Um caso particular onde é relativamente simples de calcular a matriz fundamental é dado pelos sistemas de equações diferenciais homogêneos de coeficientes constantes. Nas próxima aula voltaremos a este caso para o estudar de forma mais sistemática.

Consideremos o sistema linear homogêneo de coeficientes constantes

$$Y'(t) = AY(t),$$

onde A é uma matriz real $n \times n$ constante. Um método para obter a sua matriz fundamental e, por conseguinte, para descrever as suas soluções, consiste em relacionar este sistema com os valores e vectores próprios da matriz A .

Recorde-se que um número $\lambda \in \mathbb{C}$ diz-se um **valor próprio** de A se existir um vector não nulo $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av = \lambda v$. Um vector $v \neq 0$ nessas circunstâncias denomina-se **vector próprio** associado a λ .

Mostremos agora que a existência de um valor próprio conduz directamente à construção de uma solução do sistema diferencial.

Exercício 1. Mostre que se λ é um vector próprio de A com vector próprio associado $v \neq 0$, então a função

$$Y(t) = e^{\lambda t}v$$

é solução do sistema homogêneo de coeficientes constantes $Y'(t) = AY(t)$.

Resolução: Seja

$$Y(t) = e^{\lambda t}v.$$

Derivando em relação a t , obtemos

$$Y'(t) = \lambda e^{\lambda t}v.$$

Por outro lado, utilizando a definição de vector próprio,

$$AY(t) = A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av = e^{\lambda t}\lambda v = \lambda e^{\lambda t}v.$$

Logo,

$$Y'(t) = AY(t),$$

isto é, Y satisfaz o sistema diferencial, concluindo a demonstração. $\square$

Nota 4 O exercício anterior mostra que cada valor próprio de A origina, pelo menos, uma solução do sistema. Assim, se a matriz A possuir n valores próprios distintos e n vectores próprios linearmente independentes, então obtemos n soluções linearmente independentes da forma

$$Y_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

que formam uma base do espaço das soluções. Neste caso dizemos que A é diagonalizável e a descrição das soluções é particularmente simples. $\square$

Exemplo 1 Considere o sistema linear homogéneo de primeira ordem

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) = y_1(t) + 2y_2(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em forma matricial escreve-se

$$Y'(t) = AY(t), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

1. Cálculo dos valores e dos vectores próprios

Os valores próprios de A obtêm-se resolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Tem-se

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

pelo que $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

Calculemos agora os vectores próprios. O vector próprio associado a $\lambda_1 = 3$ é obtido por

$$(A - 3I)v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{1,1} = v_{1,2}.$$

Logo, podemos escolher

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O vector próprio associado a $\lambda_2 = 1$ é obtido por

$$(A - I)v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{2,1} = -v_{2,2}.$$

Escolhemos, por exemplo,

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Construção das soluções independentes e matriz fundamental

As soluções linearmente independentes são então

$$Y_1(t) = e^{3t}v_1 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y_2(t) = e^t v_2 = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Estas soluções são linearmente independentes e constituem uma base do espaço das soluções. Assim, uma matriz fundamental é formada por estas soluções como colunas

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix}.$$

3. Solução geral do sistema homogêneo

Qualquer solução do sistema pode ser obtida por sobreposição, ou seja, pode ser escrita como

$$Y(t) = \Phi(t)C, \quad C \in \mathbb{R}^2,$$

e a condição inicial $Y(0) = Y_0$ determina C resolvendo $\Phi(0)C = Y_0$.

$$Y(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo componente a componente:

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t, \\ y_2(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^t. \end{cases}$$

4. Problema de condição inicial

Impondo a condição inicial $Y(0) = [2, 0]^T$, a constante $C = [c_1, c_2]^T \in \mathbb{R}^2$ é obtida resolvendo

$$\Phi(0)C = Y_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a solução do problema de condição inicial é

$$Y(t) = \Phi(t)C = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} + e^t \\ e^{3t} - e^t \end{bmatrix}. \quad \square$$

Nota 5 (Sistemas de dimensão 2) O conjunto de soluções do sistema homogêneo forma um espaço vectorial de dimensão 2, gerado pelas soluções independentes Y_1 e Y_2 . A condição inicial escolhe uma única combinação linear desses vetores, identificando uma única trajetória no espaço de fase. $\square$

Exercícios

1. Escreva os sistemas seguintes na forma matricial e mostre que as funções dadas são soluções do respectivo sistema ($y = [y_1, y_2]^T$).

(a) $\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 \\ y'_2 = -y_1 + y_2 \end{cases} ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 - 2e^{2t} \\ 1 + 2e^{2t} \end{bmatrix};$

(b) $\begin{cases} y'_1 = y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases} ; \quad y(t) = e^t \begin{bmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{bmatrix};$

(c) $\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_1 + \frac{3}{2}e^{2t} \end{cases} ; \quad y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

2. Escreva cada uma das equações diferenciais seguintes como um sistema de equações diferenciais equivalente.

(a) $y'' + 3y' + 2y = 0;$

(d) $y'' + 10y = 1 - 2\cos t;$

(b) $y'' + 6y' + 4y = \sin t;$

(c) $y'' + y' = 0;$

(e) $y''' + y'' = 0.$

3. Considere a equação diferencial $y'' + \omega^2 y = 0$.

(a) Encontre a solução geral da equação dada;

(b) Encontre um sistema de equações diferenciais equivalente;

(c) Use a resposta à alínea (a) para determinar a solução geral do sistema encontrado em (b).

Aula 20: Exponencial de uma matriz

Passamos agora ao estudo dos sistemas em que a matriz de coeficientes não depende do tempo. Trata-se de sistemas da forma

$$Y'(t) = AY(t), \quad (1)$$

em que A é uma matriz real $n \times n$ constante. Estes sistemas constituem o núcleo da teoria, tanto pela sua simplicidade estrutural como pela sua importância na modelação matemática.

Uma ferramenta central é o conceito de matriz fundamental. Diz-se que uma matriz $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema se as suas colunas são soluções linearmente independentes do sistema. Em linguagem matricial tal condição pode ser escrita como

$$\Phi'(t) = A\Phi(t),$$

com o determinante de $\Phi(t)$ não nulo, para todo o $t \in \mathbb{R}$. Entre todas as matrizes fundamentais destaca-se uma especialmente simples: aquela que verifica $\Phi(0) = I$, a matriz identidade. Essa matriz é a exponencial de matriz e^{At} , que definiremos nesta aula. Assim,

$$\Phi(t) = e^{At}$$

constitui a **matriz fundamental canónica** do sistema.

A exponencial de uma matriz

O conceito de exponencial de matriz permite resolver, de forma sistemática, sistemas de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes da forma (1). Tal como a função exponencial de números reais ou complexos, a exponencial de uma matriz transforma operações lineares em soluções contínuas ao longo do tempo.

Definição 1 (Exponencial de uma matriz) *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A exponencial da matriz A é definida pela série de potências*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots,$$

onde I é a matriz identidade de ordem n e A^k a k -ésima potência de A . A série é absolutamente convergente para qualquer matriz A , e portanto a exponencial de matrizes está sempre bem definida.

De acordo com a definição anterior, podem provar-se as propriedades seguintes.

Exponencial da matriz nula: $e^0 = I$. A demonstração é imediata.

Exponencial da matriz identidade:

$$e^I = I + I + \frac{I^2}{2} + \cdots + \frac{I^k}{k!} + \cdots = I \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) = I e.$$

Exponencial da soma de matrizes: Se A e B comutam ($AB = BA$), então

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

A demonstração desta propriedade não é imediata e fica ao cuidado do aluno. No caso geral, se $AB \neq BA$, esta propriedade não se verifica.

Inversa da exponencial de uma matriz: $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Esta propriedade resulta imediatamente das anteriores: $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I$.

Vamos calcular, explicitamente, a exponencial de matrizes para vários exemplos importantes.

Exemplo 1 (Matriz diagonal) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$. Neste caso

$$A^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{bmatrix},$$

e portanto

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{bmatrix}.$$

Assim, para matrizes diagonais, a exponencial obtém-se exponenciando cada elemento da diagonal. $\square$

Exemplo 2 (Matriz nilpotente) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Começemos por calcular as potências de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, A é nilpotente de ordem 2, isto é, $A^2 = 0$. Como todas as potências acima da segunda se anulam,

$$A^k = 0 \quad \text{para } k \geq 2,$$

a série da exponencial reduz-se a um número finito de termos

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots = I + A.$$

Então,

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Exemplo 3 (Matriz de rotação-simetria) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Primeiro calculamos as potências

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

e daí

$$A^3 = A^2 A = I A = A, \quad A^4 = A^2 A^2 = I = A^2, \quad \text{etc.}$$

Portanto

$$A^{2k} = I, \quad A^{2k+1} = A.$$

Substituindo na série da exponencial,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \right) I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \right) A.$$

Reconhecemos agora as séries de $\cosh(1)$ e $\sinh(1)$,

$$\cosh(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}, \quad \sinh(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!},$$

concluimos que

$$e^A = \cosh(1) I + \sinh(1) A.$$

Escrevendo explicitamente a matriz,

$$e^A = \begin{bmatrix} \cosh(1) & 0 \\ 0 & \cosh(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sinh(1) \\ \sinh(1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{bmatrix}. \quad \square$$

Exemplo 4 (Matriz de Jordan) Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Escrevemos a matriz A como soma de uma parte diagonal e uma matriz nilpotente

$$A = I + N, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que N é nilpotente de ordem 2, isto é,

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^k = 0 \text{ para } k \geq 2.$$

Além disso, I e N comutam, logo podemos usar a identidade

$$e^{I+N} = e^I e^N.$$

Então,

$$e^A = e^{I+N} = e^I e^N = e e^N.$$

Resta calcular e^N . Como N é nilpotente, como vimos no Exemplo 2,

$$e^N = I + N,$$

e então

$$e^A = e(I + N) = eI + eN = e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix}. \quad \square$$

Solução de sistemas homogêneos de coeficientes constantes

O seguinte teorema prova que a exponencial de uma matriz é uma matriz fundamental de um sistema de equações lineares homogêneas de coeficientes constantes.

Teorema 1 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A matriz*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

é uma matriz fundamental do sistema linear de coeficientes constantes (1). Consequentemente, a solução do problema de valor inicial

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (2)$$

é dada por

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0. \quad (3)$$

Demonstração: A série que define a matriz exponencial converge absolutamente, para todo $t \in \mathbb{R}$, o que garante que operações termo a termo, como diferenciação ou multiplicação por escalar, são válidas. Diferenciando termo a termo, obtemos

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = A e^{At}.$$

Portanto, e^{At} satisfaz a equação matricial (1) e, como tal, é uma matriz fundamental do sistema.

Como vimos na aula passada, a solução geral do sistema linear homogêneo (1) pode ser escrita em função da matriz fundamental

$$Y(t) = e^{At}C, \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

Aplicando a condição inicial em (2), e atendendo a que a matriz e^{At} é invertível, para todo t , temos

$$Y(t_0) = e^{At_0}C = Y_0 \quad \Rightarrow \quad C = e^{-At_0}Y_0.$$

Concluimos, então, que a solução do problema de condição inicial (2) é

$$Y(t) = e^{At} e^{-At_0}Y_0 = e^{A(t-t_0)}Y_0,$$

como indicado em (3). $\square$

Nota 1 (Função de Green) A matriz $G(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$ é chamada de função de Green do sistema homogêneo. Na próxima aula, veremos que ela permite expressar diretamente a solução do sistema não homogêneo

$$Y'(t) = AY(t) + b(t)$$

na forma

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s) ds = G(t - t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t G(t - s)b(s) ds. \quad \square$$

Nota 2 No caso particular em que a condição inicial é $Y(0) = Y_0$, frequentemente utilizada na prática, a solução do problema (2) simplifica-se para $Y(t) = e^{At}Y_0$. $\square$

Cálculo da matriz fundamental: caso diagonalizável

O comportamento qualitativo e a forma explícita das soluções do sistema linear homogêneo (1) dependem, de modo crucial, dos valores próprios e respectivos vectores próprios da matriz A . Em particular, quando a matriz é diagonalizável o cálculo explícito de e^{At} simplifica-se enormemente.

Exercício 2. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ duas matrizes semelhantes, ou seja, existe uma matriz invertível P tal que $A = PBP^{-1}$. Mostre que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{At} = P e^{Bt} P^{-1}.$$

Resolução: Como $A = PBP^{-1}$, temos

$$(At)^k = (PBP^{-1}t)^k = PB^kP^{-1} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

que pode ser provado por indução. Substituindo na série

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PB^kP^{-1}t)^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^k}{k!} \right) P^{-1} = P e^{Bt} P^{-1},$$

o que prova o pretendido. $\square$

Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **diagonalizável**, ou seja, existe uma matriz invertível P tal que

$$A = PDP^{-1},$$

com $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ uma matriz diagonal cujos elementos λ_i são os valores próprios de A , então a exponencial de A pode ser escrita como

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}),$$

onde cada coluna de P corresponde a um vector próprio $v_1, \dots, v_n$ de A .

As soluções de (1) são combinações lineares de soluções do tipo

$$Y_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i,$$

ou seja, no caso diagonalizável com valores próprios reais simples, todas as soluções são combinações lineares de exponenciais escalares multiplicadas pelos respectivos vectores próprios, isto é,

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i.$$

Exemplo 5 (Valores próprios reais distintos) Consideremos o sistema linear

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A resolução segue os seguintes passos.

1. Calcular os valores e vectores próprios (diagonalização de A)

Os valores próprios são obtidos através da equação característica na forma

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.$$

Os vectores próprios correspondentes são (prove!):

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ para } \lambda_1 = 3, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ para } \lambda_2 = 2.$$

Então,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = PDP^{-1}.$$

2. Exponencial da matriz

Temos que

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Calculando $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e multiplicando podemos obter e^{At} explicitamente.

3. Solução do problema de condição inicial

A solução do problema de condição inicial é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = P e^{Dt} P^{-1}Y_0.$$

Calculando $P^{-1}Y_0$,

$$P^{-1}Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando pela exponencial diagonal,

$$e^{Dt}(P^{-1}Y_0) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$Y(t) = P \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}. \quad \square$$

Cálculo da matriz fundamental: caso não diagonalizável

Vamos começar por considerar alguns exemplos.

Exemplo 6 (Valores próprios reais) *Consideremos o sistema*

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A resolução segue os seguintes passos.

1. *Determinar os valores e vectores próprios*

Os valores próprios são obtidos através da equação característica na forma

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \text{ com multiplicidade } 2.$$

O (único) vector próprio correspondente é (prove!)

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, A não é diagonalizável.

2. *Exponencial da matriz*

Temos que

$$A = 2I + N, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = 0.$$

Logo

$$e^{At} = e^{2t} e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. *Solução do problema de condição inicial*

Considerando a condição inicial $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, concluímos que a solução do problema de condição inicial é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Nota 3 Para matrizes não diagonalizáveis, a exponencial gera termos $t^k e^{\lambda t}$, onde k reflete a multiplicidade do valor próprio. $\square$

Exemplo 7 (Valores próprios complexos conjugados) *Consideremos o sistema*

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A resolução segue os seguintes passos.

1. Determinar os valores e vectores próprios

Os valores próprios são obtidos através da equação característica na forma

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

A matriz é diagonalizável apenas em $\mathbb{C}$, mas vamos trabalhar com a forma real directamente.

2. Exponencial da matriz

Começamos por definir

$$B = A - \alpha I = A - I = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I = -\beta^2 I.$$

Então

$$e^{Bt} = I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \frac{(Bt)^3}{3!} + \frac{(Bt)^4}{4!} + \dots,$$

onde os termos pares $(B^0, B^2, B^4, \dots)$ são múltiplos de I ,

$$I - \frac{(\beta t)^2}{2!}I + \frac{(\beta t)^4}{4!}I - \dots = \cos(\beta t)I,$$

e os termos ímpares $(B^1, B^3, B^5, \dots)$ são múltiplos de B ,

$$Bt - \frac{B(\beta^2 t^3)}{3!} + \frac{B(\beta^4 t^5)}{5!} - \dots = \frac{\sin(\beta t)}{\beta} B.$$

Portanto

$$e^{Bt} = \cos(\beta t)I + \frac{\sin(\beta t)}{\beta} B,$$

o que permite concluir,

$$e^{At} = e^{\alpha t} e^{Bt} = e^t \left(\cos(\sqrt{2}t)I + \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} B \right) = e^t \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}.$$

3. Solução do problema de condição inicial

Considerando a condição inicial $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a solução do problema de condição inicial é dada por

$$Y(t) = e^{At} Y_0 = e^t \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}. \quad \square$$

Nota 4 Para o caso em que a matriz A tem valores próprios complexos conjugados, a exponencial da matriz gera combinações de $\cos(\beta t)$ e $\sin(\beta t)$ multiplicadas por $e^{\alpha t}$, reflectindo o comportamento oscilatório do sistema real. $\square$

Exercício 1. Mostre que a solução do problema de condição inicial

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

é dada por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Resolução: A resolução segue os seguintes passos.

1. Determinar os valores e vectores próprios

Os valores próprios são obtidos através da equação característica na forma

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

A matriz é diagonalizável apenas em $\mathbb{C}$, mas vamos trabalhar com a forma real directamente.

2. Exponencial da matriz

Seja $\alpha = 0$ a parte real dos valores próprios, $\beta = 1$ a parte complexa e

$$B = A - \alpha I = A.$$

Como $B^2 = -I$, temos que

$$e^{At} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t)I + \frac{\sin(\beta t)}{\beta} B \right) = \cos t I + \sin t A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

3. Solução do problema de condição inicial

Considerando a condição inicial $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a solução do problema de condição inicial é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

o que prova o pretendido. $\square$

Forma canónica de Jordan (*)

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada que não é diagonalizável. Então, pela **forma canónica de Jordan** existe uma matriz invertível P tal que

$$A = PJP^{-1},$$

onde J é a *forma de Jordan* de A , composta por blocos de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

A exponencial da matriz A é então

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_m t} \end{bmatrix},$$

e cada bloco de Jordan $J_k = \lambda_k I + N_k$, com N_k nilpotente ($N_k^{s_k} = 0$, com s_k a multiplicidade de λ_k), satisfaz

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k t} \left(I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 + \cdots + \frac{t^{s_k-1}}{(s_k-1)!} N^{s_k-1} \right).$$

Assim, para qualquer problema de valor inicial $Y'(t) = AY(t)$, $Y(t_0) = Y_0$, a solução é dada por

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)} Y_0 = P e^{J(t-t_0)} P^{-1} Y_0,$$

e cada bloco de Jordan gera termos do tipo $t^k e^{\lambda_k t}$, onde $0 \leq k \leq s_k - 1$.

Nota 5 Este resultado mostra que, sempre que uma matriz não seja diagonalizável mas admita forma de Jordan (as matrizes quadradas admitem sempre uma forma de Jordan), a exponencial da matriz contém polinómios em t multiplicados por exponenciais. $\square$

Resumo completo de sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas

Considere o sistema

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = Y_0, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

O resumo seguinte cobre todos os casos possíveis para sistemas lineares 2×2 , indicando como calcular e^{At} , escrever a solução em função de Y_0 e classificar o ponto crítico de acordo com os valores próprios.

1. Valores próprios reais distintos

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e A é diagonalizável, $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) P^{-1}$, então

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1}, \quad Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

Tipo de ponto crítico: (i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: nó estável; (ii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: nó instável; (iii) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$: ponto de sela.

2. Valores próprios reais iguais, diagonalizável

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e A é diagonalizável, então

$$e^{At} = e^{\lambda t} I, \quad Y(t) = c_1 v_1 + c_2 v_2.$$

Tipo de ponto crítico: (i) $\lambda < 0$: nó estável; (ii) $\lambda > 0$: nó instável.

3. Valores próprios reais iguais, não diagonalizável

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e A não é diagonalizável, então escrevemos $A = \lambda I + N$, com $N^2 = 0$, e

$$e^{At} = e^{\lambda t}(I + Nt), \quad Y(t) = e^{\lambda t}(I + Nt)Y_0.$$

Tipo de ponto crítico: (i) $\lambda < 0$: nó (degenerado) estável ; (ii) $\lambda > 0$: nó (degenerado) instável.

4. Valores próprios complexos conjugados

Se $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, então

$$e^{At} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t)I + \frac{\sin(\beta t)}{\beta}(A - \alpha I) \right), \quad Y(t) = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t)I + \frac{\sin(\beta t)}{\beta}(A - \alpha I) \right) Y_0.$$

Tipo de ponto crítico: (i) $\alpha < 0$: foco/espiral estável; (ii) $\alpha > 0$: foco/espiral instável; (iii) $\alpha = 0$: centro (órbitas fechadas).

Exponencial de matrizes via transformada de Laplace

A exponencial de uma matriz pode ser calculada, de forma alternativa, usando transformadas de Laplace. Esta abordagem é especialmente útil no caso em que a matriz não é diagonalizável.

Considerando transformadas de Laplace,

$$\mathcal{L}\{e^{At}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^\infty \frac{(At)^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-st} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!} \mathcal{L}\{t^k\}(s).$$

Usando a fórmula da transformada de Laplace de t^k ,

$$\mathcal{L}\{t^k\}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad s > 0,$$

concluimos que

$$\mathcal{L}\{e^{At}\}(s) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{k!}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{s^{k+1}}.$$

Atendendo a que estamos na presença de uma série geométrica (de matrizes),

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{A}{s} \right)^k = \frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right)^{-1} = (sI - A)^{-1}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{e^{At}\}(s) = (sI - A)^{-1}.$$

Tomando a inversa da transformada de Laplace, concluimos que

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}(t).$$

Nota 6 Quando A é de ordem 2 ou 3, a matriz $(sI - A)^{-1}$ pode ser calculada facilmente usando a fórmula da inversa

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}.$$

No caso 2×2 ,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \text{desde que } ad - bc \neq 0. \quad \square$$

Exemplo 8 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}, \quad \det(sI - A) = s^2 + 1.$$

A inversa é

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}.$$

Aplicando a transformada inversa termo a termo, sai que

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right\} (t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \quad \square$$

Exemplo 9 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Então

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

Tomando a transformada inversa de cada elemento obtém-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}. \quad \square$$

Provar a convergência uniforme (*)

Vamos provar que a série que define a exponencial de uma matriz converge absolutamente, qualquer que seja matriz A . Para isso, comecemos por definir norma matricial.

Definição 2 (Norma matricial) Uma **norma matricial** é uma função

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

que satisfaz, para quaisquer matrizes A, B e qualquer escalar α , as seguintes propriedades:

1. $\|A\| \geq 0$, e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (desigualdade triangular).

Uma norma matricial $\|\cdot\|$ diz-se **submultiplicativa** se, além das propriedades anteriores, satisfaz

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

para quaisquer matrizes A, B compatíveis. As normas comuns que são submultiplicativas incluem:

- Norma-1 (máxima coluna): $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$;
- Norma-infinito (máxima linha): $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$;
- Norma euclidiana (norma espectral): $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$.

Estamos, agora, em condições de provar o seguinte teorema.

Teorema 2 (Convergência uniforme da série exponencial de matrizes)

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para qualquer intervalo compacto $t \in [0, T]$, a série

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

converge uniformemente em t em $[0, T]$.

Demonstração: Definimos o k -ésimo termo da série

$$T_k(t) = \frac{(At)^k}{k!}.$$

Escolhemos uma norma submultiplicativa $\|\cdot\|$, temos que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\|T_k(t)\| = \frac{\|(At)^k\|}{k!} \leq \frac{(|t| \|A\|)^k}{k!} \leq \frac{(\|A\|T)^k}{k!} = M_k.$$

A série escalar

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\|T)^k}{k!} = e^{\|A\|T}$$

é convergente. Logo, pelo Critério de Weierstrass para séries de funções, a série de matrizes

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)$$

converge uniformemente em $t \in [0, T]$.

Como todas as normas de matrizes são equivalentes, cada entrada da matriz e^{At} converge uniformemente. Logo, e^A está bem definida. $\square$

Exercícios

1. Determine e^{At} , sendo $t \in \mathbb{R}$ e A a matriz quadrada dada a seguir.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}; & \text{(e)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; & \text{(d)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; & \text{(f)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

2. Determine a solução geral de cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais lineares:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \begin{cases} y'_1 = 4y_1 - y_2, \\ y'_2 = -4y_1 + 4y_2; \end{cases} & \text{(e)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = 2y_3, \\ y'_3 = 4y_1 - 6y_2 + 6y_3; \end{cases} & \text{(h)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ y'_2 = y_2 + 3y_3, \\ y'_3 = 3y_2 + y_3; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = 2y_1 + y_2; \end{cases} & & \text{(i)} \quad \begin{cases} y'_1 = -y_1 - 4y_2, \\ y'_2 = y_1 + 3y_2, \\ y'_3 = y_3; \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -4y_1 + 4y_2; \end{cases} & \text{(f)} \quad \begin{cases} y'_1 = 3y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 + 2y_2 + y_3, \\ y'_3 = y_1 + 3y_2; \end{cases} & \text{(j)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_1, \\ y'_2 = -y_2; \end{cases} \\ \text{(d)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_1, \\ y'_3 = y_1 - y_2 + y_3; \end{cases} & \text{(g)} \quad \begin{cases} y'_1 = y_2 - 7y_1, \\ y'_2 = 2y_1 + 5y_2; \end{cases} & \text{(k)} \quad \begin{cases} y'_1 = -y_2, \\ y'_2 = y_1. \end{cases} \end{array}$$

3. Resolva os seguintes problemas de condição inicial ou de Cauchy:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad Y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} Y, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \\ \text{(b)} \quad Y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; & \end{array}$$

4. Para o sistema de equações diferenciais $Y' = AY$, sabe-se que

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^t & -te^t \\ 3e^t & 3te^t - e^t \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental.

- Determine e^{At} .
- Determine a matriz A dos coeficientes.

5. Nos casos indicados a seguir, resolva o problema de condição inicial

$$Y'(t) = AY, \quad Y(0) = Y_0 :$$

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}; \quad (b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Considere

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{at} & \frac{b}{d-a}(e^{dt} - e^{at}) \\ 0 & e^{dt} \end{bmatrix}, \quad a \neq d.$$

7. (a) Mostre, usando a definição de exponencial de uma matriz, que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At},$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n .

- (b) Determine a matriz fundamental do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = I,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. Considere o seguinte problema de valor inicial (ou de Cauchy):

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = -3x(t) + 2y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(1) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

- (a) Reescreva o problema na forma matricial

$$X'(t) = AX(t), \quad X(t_0) = X_0.$$

- (b) Determine e^{At} .

- (c) Calcule, justificadamente, a solução do problema de Cauchy.

9. Deduza a seguinte fórmula, conhecida por **Fórmula de Rodrigues**, para a exponencial de uma matriz anti-simétrica de ordem 3:

$$\exp(tA) = I_3 + \frac{A}{k} \sin(kt) + \frac{A^2}{k^2} (1 - \cos(kt)), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\|a\| = k$ e $a = [a_1, a_2, a_3]^T$.

10. (a) Determine uma matriz fundamental do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$Y'(t) = AY(t),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (b) Mostre que

$$(e^{At})^T = e^{A^T t},$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n .

11. (a) Determine uma matriz fundamental do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem

$$Y'(t) = AY(t),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Mostre que

$$A e^{At} = e^{At} A,$$

onde A é uma qualquer matriz quadrada de ordem n .

12. (a) Mostre que se $AB = BA$ então as funções matriciais $e^{t(A+B)}$ e $e^{tA} e^{tB}$ satisfazem o sistema diferencial $Y' = (A + B)Y$ e a condição inicial $Y(0) = I$.

- (b) Que conclusões pode tirar da alínea anterior?

Aula 21: Fórmula da variação dos parâmetros

Na aula anterior estudámos sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes. Nesta aula vamos a considerar o sistema não homogêneo

$$Y'(t) = AY(t) + b(t), \quad Y(t_0) = Y_0,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz constante e $b(t)$ é um termo fonte contínuo. Para resolver este problema vamos recorrer ao **método da variação dos parâmetros**.

Procuramos uma solução escrita em função da matriz fundamental do sistema homogêneo associado, isto é,

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}U(t),$$

onde $U(t)$ é uma função vectorial a determinar. Diferenciando, obtemos

$$Y'(t) = A e^{A(t-t_0)}U(t) + e^{A(t-t_0)}U'(t).$$

Igualando a $AY + b(t)$, temos

$$A e^{A(t-t_0)}U(t) + e^{A(t-t_0)}U'(t) = A e^{A(t-t_0)}U(t) + b(t),$$

o que implica

$$e^{A(t-t_0)}U'(t) = b(t) \quad \Rightarrow \quad U'(t) = e^{-A(t-t_0)}b(t).$$

Integrando entre t_0 e t ,

$$U(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s-t_0)}b(s) \, ds.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s) \, ds.$$

Esta é a chamada **fórmula da variação de parâmetros**, que generaliza a solução escalar para sistemas lineares.

A matriz $G(t-s) = e^{A(t-s)}$ é a **função de Green** do sistema linear, isto é, a resposta do sistema a uma entrada unitária aplicada no instante s . Com esta função, a solução pode ser escrita como

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = G(t-t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t G(t-s)b(s) \, ds,$$

ou seja, a solução particular $Y_p(t)$ da equação não homogênea é a convolução da função de Green com o termo fonte $b(t)$. Este formalismo evidencia que cada componente de $b(t)$ é propagada pelo sistema através da matriz exponencial $G(t-s)$, generalizando o conceito clássico de funções de Green para sistemas de equações diferenciais vectoriais.

Nota 1 Para sistemas com $b(t) = \delta(t-s_0)v$ (impulso), a solução é exatamente $Y(t) = G(t-s_0)v$, reforçando a interpretação de G como função de Green. A formulação via Green é particularmente útil em problemas de controlo, física e engenharia, onde $b(t)$ representa entradas externas ou forças aplicadas ao sistema. $\square$

Exemplo 1 Considere o sistema linear

$$Y'(t) = AY(t) + b(t), \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

A resolução do problema segue os seguintes passos.

1. Solução da equação homogênea

O sistema homogêneo é

$$Y'_h(t) = AY_h(t), \quad Y_h(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para determinar a sua solução vamos começar por determinar os valores e vectores próprios de A . Temos que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Os vectores próprios são

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como A é diagonalizável,

$$A = PDP^{-1}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então

$$e^{At} = P e^{Dt} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} & -e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} & e^t + e^{3t} \end{bmatrix}.$$

A solução da equação homogênea é

$$Y_h(t) = e^{At} Y_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} & -e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} & e^t + e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ -e^t + e^{3t} \end{bmatrix}.$$

2. Solução particular da equação não homogênea

O cálculo da solução particular

$$Y_p(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} s \\ e^s \end{bmatrix} ds$$

é obtido por integração termo a termo, podendo-se concluir

$$y_{p,1}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t ((e^{t-s} + e^{3(t-s)})s + (-e^{t-s} + e^{3(t-s)})e^s) ds = t - 1 + e^t;$$

$$y_{p,2}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t ((-e^{t-s} + e^{3(t-s)})s + (e^{t-s} + e^{3(t-s)})e^s) ds = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) - e^t.$$

Então

$$Y_p(t) = \begin{bmatrix} t - 1 + e^t \\ 0.5 e^{2t} - e^t + 0.5 \end{bmatrix}.$$

3. Solução da equação completa

A solução geral da completa é

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = \begin{bmatrix} t - 1 + 1.5 e^t + 0.5 e^{3t} \\ -0.5 e^t + 0.5 e^{3t} + 0.5 e^{2t} - e^t + 0.5 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Exercício 1. Resolva o problema de valor inicial

$$Y'(t) = AY(t) + b, \quad Y(0) = Y_0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Vamos determinar a solução pela fórmula da variação dos parâmetros

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = e^{At}Y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b ds.$$

A resolução do problema segue os seguintes passos.

1. Solução da equação homogênea

Vamos considerar transformadas de Laplace para calcular

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.$$

Calculamos então

$$sI - A = \begin{bmatrix} s - 1 & 1 \\ -1 & s - 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante é $\det(sI - A) = (s - 1)^2 + 1 = s^2 - 2s + 2$. Logo,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 - 2s + 2} \begin{bmatrix} s - 1 & -1 \\ 1 & s - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} \begin{bmatrix} s - 1 & -1 \\ 1 & s - 1 \end{bmatrix}.$$

Usamos as transformadas inversas conhecidas

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1}\right\} = e^t \cos t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 1)^2 + 1}\right\} = e^t \sin t,$$

concluimos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}.$$

Temos então

$$Y_h(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 4 \cos t - \sin t \\ 4 \sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

2. Solução particular da equação não homogênea

Temos que

$$Y_p(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} b \, ds = \int_0^t e^{t-s} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ \sin(t-s) \end{bmatrix} ds.$$

Calculando o integral obtém-se

$$Y_p(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t(\cos t + \sin t) - 1 \\ e^t(\sin t - \cos t) + 1 \end{bmatrix}.$$

3. Solução da equação completa

A solução geral da completa é

$$\begin{aligned} Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) &= \begin{bmatrix} e^t(4 \cos t - \sin t) + \frac{1}{2}(e^t(\cos t + \sin t) - 1) \\ e^t(4 \sin t + \cos t) + \frac{1}{2}(e^t(\sin t - \cos t) + 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t \left(\frac{9}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \right) - \frac{1}{2} \\ e^t \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{9}{2} \sin t \right) + \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Sistemas lineares com coeficientes constantes

Consideremos agora um processo alternativo de resolver um sistema de equações diferenciais lineares não homogêneo com coeficientes constantes

$$Y'(t) = AY(t) + b,$$

onde A é uma matriz real $n \times n$ e $b \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante (isto é, não depende de t). Consideremos ainda que a função Y verifica a condição inicial

$$Y(t_0) = Y_0.$$

O processo de resolução passa pelos seguintes passos.

1. Solução geral da equação homogênea

Começa-se por determinar a solução da equação homogênea

$$Y'_h(t) = AY_h(t) \Rightarrow Y_h(t) = e^{At}C, \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

2. Solução da particular constante da equação não homogénea

Procuramos uma solução particular constante

$$Y_p(t) = Y_p.$$

Então

$$0 = AY_p + b \Rightarrow AY_p = -b.$$

Se A for invertível, $Y_p = -A^{-1}b$.

3. Solução da equação completa

Vamos determinar o vector constante C por forma a que

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p = e^{At}C + Y_p,$$

verifique a condição inicial. Impondo a condição inicial $Y(t_0) = Y_0$, obtém-se

$$Y_h(t_0) = Y_0 - Y_p \Rightarrow e^{At_0}C = Y_0 - Y_p \Rightarrow C = e^{-At_0}(Y_0 - Y_p).$$

Então, a solução do problema de condição inicial é

$$Y(t) = e^{At}e^{-At_0}(Y_0 - Y_p) + Y_p.$$

Exemplo 2 Considere o sistema diferencial

$$Y' = AY + b, \quad Y(0) = Y_0,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos seguir os passos referidos para determinar a sua solução.

1. Solução geral da equação homogénea

Vamos determinar a solução geral do sistema homogéneo

$$Y'_h(t) = AY_h.$$

usando transformadas de Laplace. Como se sabe, $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$. Neste caso,

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

e o seu determinante é

$$\det(sI - A) = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2).$$

Logo

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

Agora decomponemos cada entrada em frações parciais

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}, \quad \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

$$\frac{-2}{(s+1)(s+2)} = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2}, \quad \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2}.$$

Atendendo à transformadas inversas de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at},$$

conclui-se que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução geral da equação homogênea é

$$Y_h(t) = e^{At}C, \quad C \in \mathbb{R}^2.$$

2. Solução particular constante da equação não homogênea

Procuramos uma solução particular constante Y_p . Como $Y_p' = 0$, substituindo no sistema, tem-se que

$$0 = AY_p + b \Rightarrow AY_p = -b \Rightarrow Y_p = -A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Solução da equação completa

Vamos determinar o vector constante C por forma a que

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p = e^{At}C + Y_p$$

verifique a condição inicial

$$Y(0) = Y_0 \Rightarrow Y(0) = e^{A \cdot 0}C + Y_p = Y_0 \Rightarrow C = Y_0 - Y_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então

$$Y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} \\ -1 + e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix},$$

o que conclui a resolução. $\square$

Exercício 2. Resolva o problema de valor inicial

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Vamos seguir os passos referidos para determinar a sua solução.

1. Solução geral da equação homogênea

Vamos começar por determinar a solução geral da equação homogênea

$$Y'(t) = AY(t), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como vimos no Exemplo 6 da aula passada,

$$e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução geral da equação homogênea é

$$Y_h(t) = e^{At}C = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C, \quad C \in \mathbb{R}^2.$$

2. Solução da particular constante da equação não homogênea

Procuramos uma solução particular constante Y_p tal que

$$AY_p = -b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y_p = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Y_p = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Solução da equação completa

Vamos determinar o vector constante C por forma a que

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p = e^{At}C + Y_p$$

verifique a condição inicial

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C + Y_p = C + Y_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - Y_p = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

Então, a solução geral da equação completa é

$$Y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(3/4 + t/2) - 3/4 \\ e^{2t}/2 + 1/2 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Fórmula da variação de parâmetros: caso geral (*)

Considere o sistema linear não homogêneo

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t), \quad Y(t_0) = Y_0,$$

onde $A(t)$ é uma matriz contínua $n \times n$ e $b(t)$ é um vector contínuo.

Tal como no caso em que a matriz é constante, procuramos uma solução da forma

$$Y(t) = \Phi(t)U(t),$$

onde $\Phi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema homogêneo $Y' = A(t)Y$, satisfazendo $\Phi(t_0) = I$ e $U(t)$ uma função vectorial a determinar. Diferenciando,

$$Y'(t) = \Phi'(t)U(t) + \Phi(t)U'(t) = A(t)\Phi(t)U(t) + \Phi(t)U'(t) = A(t)Y(t) + \Phi(t)U'(t).$$

Comparando com a equação original, obtemos

$$\Phi(t)U'(t) = b(t) \quad \Rightarrow \quad U'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t) \quad \Rightarrow \quad U(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) \, ds.$$

Portanto, a solução geral é do problema de condição inicial é

$$Y(t) = \Phi(t)Y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s) \, ds.$$

Nota 2 Definindo a **função de Green** $G(t, s)$ do sistema como

$$G(t, s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}, \quad t \geq s,$$

a solução do problema de condição inicial escreve-se na forma

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = \Phi(t)Y_0 + \int_{t_0}^t G(t, s)b(s) \, ds.$$

Neste caso, $G(t, s)$ depende separadamente de t e s , refletindo a possibilidade de $A(t)$ variar no tempo. $\square$

Exercícios

1. Resolva os seguintes sistemas não homogêneos, com a condição inicial dada

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad Y' &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{(b)} \quad Y' &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \text{(c)} \quad Y' &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} \sin t \\ \tan t \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Considere o sistema

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a solução explícita e estude a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema homogêneo associado.

3. Considere o sistema

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução e descreva qualitativamente as trajetórias no plano.

4. Considere o sistema

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Interprete o sistema como oscilador forçado amortecido e encontre a solução.

Bibliografia

- [1] S. Ahmad, A. Ambrosetti, *A Textbook on Ordinary Differential Equations*, 2nd Edition, Springer, 2015.
- [2] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 4th Edition, Springer-Verlag, 1993.
- [3] D. Burghes, B. Morrie, *Modeling with Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1981.
- [4] D. G. de Figueiredo, A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [5] Q. Kong, *A Short Course in Ordinary Differential Equations*, Springer, Cham, 2014.
- [6] B. D. MacCluer, P. S. Bourdon, T. L. Kriete, *Differential Equations: Techniques, Theory, and Applications*, American Mathematical Society, 2019.
- [7] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill, 2003.
- [8] D. G. Zill, *Equações Diferenciais com Aplicação em Modelagem*, Thomson Learning, 2003.