Matemática do Discreto e do Contínuo

Texto para uma Acção de Formação de professores do Ensino Secundário

Adérito Araújo
Coimbra, 1998

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

O analfabetismo matemático

O **analfabetismo matemático**, ou seja, a incapacidade para se lidar naturalmente com as noções fundamentais de números e probabilidades, é um mal que afecta demasiadas pessoas, as quais, se assim não fosse, até se poderiam considerar razoavelmente cultas. Na verdade, ao contrário de muitas outras falhas, as quais tendem a ser disfarçadas, o analfabetismo matemático chega a ser louvado: "Nem sequer sou capaz de cuidar do saldo da minha conta bancária!", é vulgar ouvir dizer-se. "Sou uma pessoa virada para os factos, e não para os números.". Ou "detesto matemática!".

Uma das consequências menos discutidas do analfabetismo matemático é a sua ligação com a crença na **pseudo ciência**: astrologia, numerologia, etc. Mais preocupante, no entanto, é o fosso existente entre o modo como os cientistas encaram os vários **riscos** (vacas loucas, sida, etc.) e a percepção popular desses mesmos riscos - um fosso que ameaça levar-nos quer à ansiedade injustificada e paralisante quer a exigências impossíveis e economicamente devastadoras a propósito dos seguros de riscos.

Algumas das questões aqui apresentadas só muito raramente são discutidas em termos acessíveis a uma vasta audiência, pertencendo ao tipo de questões que os alunos apreciam imenso, mas às quais respondem com comentários como: "Vamos precisar de saber isso para exame?".

1. Grandes números, pequenas probabilidades

Nunca deixei de me sentir espantado e ao mesmo tempo deprimido ao deparar com estudantes que não fazem a menor ideia de qual é a população de Portugal, ou da distância aproximada de Minho ao Algarve, ou até do valor percentual estimado de chineses no mundo.

Se não formos capazes de **abalizar a grandeza dos números vultuosos mais vulgares**, é impossível reagirmos com o devido cepticismo ao depararmos com notícias terríveis como a de haver um milhão de crianças raptadas anualmente nos Estados Unidos, da mesma maneira que nunca encararemos com sobriedade o facto duma ogiva possuir um poder explosivo da ordem da megatonelada (o equivalente a um milhão de toneladas (ou um milhar de milhão de quilogramas) de TNT), ou com indignação quando ouvimos frequentemente dizer que a população mundial é de aproximadamente 5 biliões!

Por outro lado, se não tivermos certa queda para as probabilidades, os acidentes de viação poderão surgir-nos como um problema relativamente menor e de índole local, ao passo que a possibilidade de sermos mortos por terroristas ou com a doença de Creutzfeldt-Jacob nos surge como um grande risco.

Um exemplo caricato da falta de noção de número é dado pelo seguinte episódio: em certa ocasião, tive a oportunidade de falar com um médico que, ao fim de meia hora de conversa, declarou que um certo tratamento que andava a pensar aplicar tinha: (i) uma hipótese num milhão de ser mal sucedido; (ii) era noventa e nove por cento seguro; (iii) e normalmente corria sempre bem.

Num artigo da *Scientific American* sobre analfabetismo matemático, o cientista de computadores Dauglas Hofstadter cita o caso da companhia *Ideal Toy*, a qual declarou, no rótulo da embalagem do primeiro **cubo de Rubik**, que havia mais de três milhares de milhão de possíveis estados atingíveis pelo cubo. Cálculos efectuados mostram que há mais de 4×10^{19} estados possíveis! O anúncio feito na embalagem não está errado. Esta subvalorização, contudo, é sintomática dum analfabetismo matemático perversamente adaptado a uma sociedade baseada na tecnologia. É um caso análogo ao de uma chapa sinalética colocada às portas de Nova York onde se pudesse ler: "População de Nova York: mais de seis", ou, se quiserem, é o mesmo que vermos a McDonald's anunciar orgulhosamente ter vendido mais de cento e vinte hambúrgueres.

Exemplos de **colecções** com um milhão de exemplares, um milhar de milhão de espécimes, e assim por diante, deveriam estar sempre à mão para uma rápida comparação. Se soubermos que bastam onze dias e meio para que se passem um milhão de segundos, enquanto um milhar de milhão de segundos equivale a quase trinta e dois anos, poderemos compreender melhor as magnitudes relativas destes dois números mais que vulgares. E o que dizer dos biliões? O *Homo sapiens* moderno surgiu provavelmente há dez biliões de segundos, e o subsequente desaparecimento total da versão de Neanderthal deve ter ocorrido há não mais de um bilião de segundos, mais coisa menos coisa.

Também constitui boa prática **estimarmos toda e qualquer quantidade** que nos desperte a curiosidade: quantas bifanas se consomem anualmente em Portugal? Quantas palavras já pronunciámos em toda a nossa vida? Quantos nomes diferentes de pessoas aparecem por ano no jornal *O Público*? Quantos nabos caberão dentro da Assembleia de República?

Este tipo de estimativas são, na maioria das vezes, não só fáceis de calcular como deveras sugestivas. Por exemplo **qual é o volume de sangue humano existente no mundo?** O macho adulto médio tem cerca de 6.78 litros de sangue; as mulheres adultas têm um pouco menos, e as crianças consideravelmente menos. Assim, se estimarmos que em média cada uma das cerca de 5 milhares de milhão de pessoas tem perto de 4.5 litros de sangue, teremos cerca de 22.5 milhares de milhão (22.5×10^9) de litros de sangue em todo o mundo. Como um metro cúbico comporta mil litros, há perto de 2.25×10^5 metros cúbicos de sangue. A raiz cúbica de 2.25×10^5 é cerca de 60; assim, todo o sangue do mundo caberia num cubo com 60 metros de lado! O mar Morto, na fronteira israelo-jordana, tem uma área de 1.248 quilómetros quadrados; se se despejasse todo o sangue humano do mundo para dentro do mar Morto, a camada líquida não ultrapassaria uma espessura de 1.9 centímetros.

A velocidade do *Concorde* é quatrocentas mil vezes superior à do caracol. Uma razão ainda mais impressionante é a verificada entre a velocidade com que um computador pessoal adiciona números de dez algarismos e a rapidez com que os calculadores humanos executam a mesma operação. Os computadores fazem-na um milhão de vezes mais depressa que nós, e no caso dos supercomputadores essa razão chega a ultrapassar um milhar de milhão para um.

O livro do Génesis diz que, durante o Dilúvio, "... todas as montanhas existentes sob os céus ficaram cobertas...". Se a tomarmos à letra, essa informação diz-nos que a inundação colocou entre três e seis mil metros de água sobre a superfície da Terra, ou seja, o equivalente a mais de um terço de milhar de milhão de quilómetros cúbicos de água! Como, de acordo com o relato bíblico, choveu durante quarenta dias e quarenta noites, ou seja, durante somente 960 horas, a chuva deve ter caído a um ritmo de pelo menos 4.5 metros por hora... o suficiente para afundar um porta-aviões dos mais modernos, quanto mais uma arca de madeira com milhares de animais a bordo.

2. Arquimedes e os números praticamente infinitos

Os números possuem uma **propriedade fundamental** que foi buscar o seu nome ao matemático grego Arquimedes, e que nos diz que qualquer número, por muito grande que seja, pode ser excedido pela adição quanto baste de números mais pequenos, por muito pequenos que estes sejam. Apesar de, à primeira vista, se tratar de um princípio óbvio, as suas consequências são por vezes difíceis de aceitar.

Os analfabetos matemáticos não conseguem aperceber-se daquilo que representa a adição de pequenas quantidades; são pessoas que as suas pequenas latas de aerossóis podem desempenhar um importante papel na destruição da camada de ozono da atmosfera, ou até que os seus automóveis contribuem decisivamente para o agravamento do problema das chuvas ácidas.

O **tamanho do universo** corresponde mais ou menos - para mais do que para menos - ao de uma esfera com 40 milhares de milhão de anos-luz de diâmetro. Se quisermos ser ainda mais generosos, e no intuito de simplificar ainda mais o cálculo, poderemos partir do princípio que se trata de um cubo com quarenta milhares de milhão de anos-luz de aresta. A questão arquimediana colocada pelo famoso cientista de computadores Donald Knuth é a de saber quantos cubos de 1×10^{-13} centímetros de aresta (um décimo do tamanho dos protões) caberiam dentro do universo. Um cálculo deveras simples mostra-nos que seriam precisos menos de 1×10^{125}. Deste modo, mesmo que um computador do tamanho do universo tivesse componentes mais pequenas que os protões, conteria seguramente menos de 1×10^{125} dessas peças, e como tal todas as computações sobre problemas que requeressem mais componentes não seriam exequíveis. Por surpreendente que pareça, há muitos problemas desse tipo, alguns deles mais que vulgares e com real importância prática.

Uma unidade de tempo comparativamente pequena é o lapso de tempo necessário para que a luz - que, como se sabe, se desloca a trezentos mil quilómetros por segundo - atravesse todo o comprimento de um dos minúsculos cubos acima descritos, cujas arestas têm 1×10^{-13} centímetros. Admitindo que o universo tem perto de quinze milhares de milhão de anos de idade, não é difícil de determinar que só se passaram 1×10^{42} dessas unidades de tempo desde o começo do tempo. Assim 1×10^{42} passos (cada um dos quais demorará certamente mais do que a nossa unidade de tempo) necessita de mais tempo do que a duração total da presente história deste universo. Uma vez mais, há numerosos problemas deste tipo.

Imagine, por exemplo, que certo ser humano é esférico e tem perto de um metro de diâmetro (a imagem é mais fácil de visualizar se pensar nele como estando agachado); poderemos assim aperceber-nos de certas comparações biológicas assaz reveladoras. Um vírus está para uma pessoa tal como a pessoa está para a Terra; um átomo está para uma pessoa como essa pessoa está para a órbita de Terra em redor do Sol; e um protão está para uma pessoa como esta está para a distância à estrela Alfa de Centauro.

3. O princípio da multiplicação

O chamado princípio da multiplicação é não só extraordinariamente simples como muito importante: diz-nos que, se uma dada escolha pode ser feita de M maneiras diferentes, e se uma escolha subsequente pode ser feita de N formas diferentes, então há $M \times N$ maneiras diferentes de se fazerem essas escolhas em sucessão. É assim que, se uma mulher tem cinco blusas e três saias, então terá $5 \times 3 = 15$ escolhas possíveis para se vestir.

Mozart escreveu uma valsa em que especificou onze diferentes possibilidades para catorze dos dezasseis compassos da melodia e duas possibilidade s para um dos outros dois compassos. Assim, há 2×11^{14} variações possíveis para esta valsa, das quais só se ouviu até hoje uma minúscula proporção.

Duma forma geral, as pessoas não conseguem avaliar o quão grandes podem ser estas colecções aparentemente simples. Em certa ocasião, um jornalista desportivo recomendou que um bom treinador de futebol devia experimentar todas as combinações possíveis com o seu plantel de vinte e sete jogadores, para descobrir quais os onze que constituiriam a melhor equipa. Poderemos interpretar esta sugestão de várias maneiras, mas em qualquer delas o número de jogos é tão grande que os jogadores morreriam muito antes de terem podido experimentar todos os arranjos possíveis.

Qual a probabilidade de uma pessoa heterossexual contrair sida? Estimou-se já que a probabilidade de contrair sida num único episódio heterossexual, tido com um parceiro que se sabe estar contaminado, é de cerca de um para quinhentos (valor médio obtido da análise de vários estudos). Sendo assim, a probabilidade de não contrair a doença é de $499 / 500$. Se estes riscos forem independentes, como muitos aceitam ser, então as hipóteses de não se ficar contaminado depois de dois encontros do tipo descrito são iguais a $(499 / 500)^2$, e ao fim de N encontros de $(499 / 500)^N$. Como $(499 / 500)^{346}$ é igual a 0.5, há cinquenta por cento de hipóteses de não contrairmos a sida se mantivermos relações heterossexuais todos os dias durante um ano com uma pessoa contaminada.

Com um preservativo, o risco de contrairmos a doença numa relação heterossexual com alguém que sabemos estar contaminado reduz-se de uma forma dramática, descendo para uma em cinco mil ocasiões. A manutenção de relações sexuais diárias com essa pessoa durante dez anos (partindo do princípio que a vítima sobrevive tanto tempo) levar-nos-ía a uma probabilidade de cinquenta por cento de também contrairmos o vírus. Se o estado de saúde do seu parceiro for desconhecido, mas se ele ou ela não fizer parte de um dos chamados grupos de risco conhecidos, então a hipótese de contrair a doença num único episódio não protegido é de uma para cinco milhões, subindo para uma em cinquenta milhões se usar preservativo. Como vê, tem muito mais hipóteses de morrer num desastre de automóvel ao regressar a casa depois duma aventura dessas.

Para terminar as questões ligadas ao princípio da multiplicação, atente-se ao engenhoso truque inventado pelo matemático **Von Neumann** para resolver uma contenda por moeda ao ar, partindo do princípio que a moeda pode estar viciada. A moeda é lançada ao ar duas vezes; se cair de cara ou de coroa para cima das duas vezes, é novamente lançada duas vezes: se o resultado for cara-coroa, a disputa é decidida a favor da primeira parte, e se o resultado for coroa-cara, vence o segundo oponente. As probabilidades de estes dois resultados sucederem são iguais, mesmo que a moeda esteja falsificada. Por exemplo, se a moeda aterrar de cara em 60% das ocasiões e coroa em 40% dos lançamentos, a sequência cara-coroa tem uma probabilidade de $0.6 \times 0.4 = 0.24$, e a sequência coroa-cara tem uma probabilidade de $0.4 \times 0.6 = 0.24$.

4. Encontros fortuitos e pseudo ciência

Uma abordagem empírica aos encontros acidentais foi feita pelo psicólogo Stanley Milgrim, que entregou a cada um dos membros de um grupo escolhido ao acaso um documento e um **"indivíduo-alvo"** (diferente) a quem o documento deveria ser entregue. As instruções pediam a cada pessoa que enviasse o documento à pessoa sua conhecida que, no seu entender, tivesse mais probabilidades de conhecer o indivíduo-alvo; este pressuposto deveria ser aplicado por todos os elementos pertencentes à cadeia seguida pelo documento, até que por fim o indivíduo-alvo fosse alcançado. Milgrim descobriu que o número de elos intermediários se situava entre os dois e os dez, sendo cinco o valor mais comum. Este estudo, apesar de empírico, de certa forma contribui para explicar a forma como os boatos, rumores e anedotas se expandem tão rapidamente no seio da população.

"Quando lhe perguntaram por que não acreditava em astrologia, lógico R. Smullyan respondeu:
Sou Gémeos e os Gémeos nunca acreditam em astrologia.".

O **analfabetismo matemático e a pseudo ciência** andam frequentemente lado a lado, em parte devido à facilidade com que a certeza matemática pode ser invocada para levar o analfabeto matemático a aquiescer com tudo o que lhe quiserem impingir.

É verdade que a matemática pura lida com certezas, mas as suas aplicações não são melhores do que os pressupostos empíricos, simplificações e estimativas subjacentes à teoria.

Até verdades matemáticas fundamentais como "os iguais podem ser substituídos por iguais", ou "um mais um é igual a dois" podem ser erradamente aplicadas: um copo de água mais um copo cheio de pipocas não é igual a dois copos de pipocas empapadas. Da mesma forma, Ronald Regan que julgava que Copenhaga ficava na Noruega, não concluiu que a capital da Dinamarca ficava na Noruega, apesar de Copenhaga ser igual a capital da Dinamarca.

A **astrologia** é uma das pseudo ciências mais divulgadas. A astrologia sustenta que a atracção gravitacional dos planetas no momento do nascimento de cada um de nós tem um efeito marcante sobre a nossa personalidade. Custa-me a engolir tamanha possibilidade, por duas razões: nunca se detectou, e muito menos se explicou, qualquer espécie de mecanismo físico ou neurofisiológico através do qual a atracção gravitacional (ou qualquer outro tipo de atracção) possa exercer os seus efeitos no ser humano; e, a força gravitacional do obstetra encarregado do parto excede largamente a do planeta ou planetas envolvidos. Quererá isto dizer que os indivíduos trazidos à luz do dia por obstetras gordos possuem certos traços de personalidade característicos, enquanto os bebés auxiliados por obstetras magros adquirem personalidades diferentes das dos primeiros?

Se assim é, então por que é que tanta gente acredita na astrologia? Uma razão óbvia é a de que as pessoas, ao lerem as vagas previsões astrológicas publicadas ou anunciadas, interpretam essencialmente as entrelinhas, aí vendo invariavelmente algo que desejam ver concretizar-se, conferindo-lhes assim uma autoridade que nada tem a ver com as previsões em si. Além disso, têm a tendência para se recordarem de "previsões" verdadeiras, para sobre valorizarem as coincidências e, acima de tudo, para ignorarem tudo o resto.

5. Probabilidades condicionadas

Muitos erros de raciocínio mais mundanos podem ser atribuídos ou justificados por uma compreensão incompleta das probabilidades condicionadas. A não ser que os acontecimentos A e B sejam independentes, a probabilidade de A é diferente da de A desde que B tenha ocorrido.

Um amigo meu que tinha pavor em andar de avião com medo dos piratas do ar dizia que quando embarcava levava sempre uma bomba consigo pois, mesmo que a probabilidade de haver uma pessoa a bordo com bomba poder ser considerável, a de haver duas é praticamente nula.

Antes de passar a assuntos mais sérios, gostaria de mencionar mais uma **artimanha** que resulta devido à confusão existente acerca das probabilidades condicionadas. Imagine um homem com três cartas na mão; uma é preta dos dois lados, outra é vermelha dos dois lados, e a terceira é preta de um lado e vermelha do outro. O homem mete as cartas dentro de um chapéu e pede-lhe que tire uma, com a condição de só olhar para um dos lados da carta. Partamos do princípio que esse lado é vermelho. O homem repara imediatamente que a carta que você tirou não pode ser a que é preta dos dois lados, e portanto terá que ser uma das outras duas: a vermelha/vermelha ou a vermelha/preta. Nesse momento, o jogador propõem-lhe apostar em como a carta escolhida é a vermelha/vermelha. Acha que tem alguma hipótese de ganhar?

Assim parece à primeira vista. Só há duas cartas possíveis; ele está a apostar numa, você aposta naturalmente na outra. Contudo, o homem tem sempre duas hipóteses de ganhar, enquanto você só tem uma. O lado visível da carta que você tirou pode ser o lado vermelho da carta vermelha/preta, caso em que a vitória é sua, ou pode ser um qualquer dos lados da carta vermelha/vermelha, caso em que ganha o apostador; ou pode ser o outro lado da carta vermelha/vermelha, caso em que também ganha o apostador. As hipóteses do homem são portanto iguais a $\frac{2}{3}$. A probabilidade condicionada da carta ser vermelha/vermelha, atendendo a que não é preta/preta, é igual a 0.5, mas o importante é que não é esse o caso. Com efeito, sabemos mais qualquer coisa além do facto da carta não ser a preta/preta; sabemos que o lado visível é vermelho.

Uma interessante abordagem do conceito de probabilidade condicionada é conhecida como **teorema de Bayes**, demonstrado pela primeira vez no séc. XVIII por Thomas Bayes. Este teorema serve de fundamento ao inesperado desfecho que veremos a seguir, e tem importantes implicações no despiste da sida ou das drogas.

Parta do princípio de que foi descoberto um **teste de despiste do cancro** com 98% de hipóteses se acertar; por outras palavras, se um indivíduo tiver um cancro, o teste resultará positivo em 98% das ocasiões, e se não tiver nada, o teste será negativo em 98% das vezes (lembremo-nos do caso do teste Abbott para a sida). Assuma ainda como certo que 0.5% - uma em cada 200 pessoas - sofre efectivamente de cancro. Agora, imagine que se submeteu ao teste e que o seu médico o informa, contristado, que o resultado é positivo. A questão é a seguinte: até que ponto deve você ficar deprimido? A resposta é deveras surpreendente: na verdade, você tem é razões para ficar moderadamente optimista. Para descobrirmos o porquê desta afirmação, vejamos quais são as probabilidades condicionadas de você ter um cancro, partindo do princípio de que o teste resultou positivo.

Imagine que são efectuados dez mil testes de despiste do cancro. Destes, quantos resultarão positivos? Em média, cinquenta dessas dez mil pessoas (0.5% de 10000) terão uma doença oncológica; como em 98% delas o teste será positivo, teremos 49 testes positivos. Das 9950 pessoas sem cancro, 2% terão os seus testes positivos, num total de 199 testes positivos ($0.2 \times 9950 = 199$). Portanto, num total de 248 testes positivos ($49 + 199 = 248$), a grande maioria são falsos positivos, e, como tal, a probabilidade condicionada de termos um cancro, mesmo que o nosso teste resulte positivo, é de somente $49/248$, ou seja, perto de 20%! (Esta percentagem relativamente baixa terá de ser confrontada com a probabilidade condicionada de termos mesmo um cancro desde que o teste resulte positivo, o que por princípio é verdadeiro em 98% dos casos.).

6. Numerologia

Menos preocupante que os testes de despiste de doenças graves é a numerologia. Trata-se de uma prática vinda da noite dos tempos, comum a várias sociedades medievais e da antiguidade, e implica a atribuição de valores numéricos às letras, com a consequente leitura de certos significados na igualdade numérica resultante da análise de palavras e frases.

Os místicos cristãos, por exemplo, devotaram muito esforço à decifração do número 666, considerado pelo apóstolo João como o número representativo da Besta do Apocalipse - o anticristo. Mais perto de nós, a extrema direita fundamentalista americana chegou a observar que cada palavra do nome Ronald Wilson Reagan tem seis letras...

O porquê do analfabetismo matemático

1. Revivendo velhos analfabetismos

Porque será que o analfabetismo matemático está tão difundido, mesmo entre pessoas cultas? Se quisermos simplificar a questão, poderemos atribuir culpas à má educação, a bloqueamentos psicológicos e a preconceitos românticos sobre a natureza da matemática.

Para começar, não nos podemos iludir, o **ensino básico** da matemática é, na maior partes das vezes de muito fraco nível. É muito raro vermos uma escola integrar problemas aritméticos noutras disciplinas ou temas - "quanto?", "até onde?", "há quanto tempo?", "quantos foram?", são questões que raramente são colocadas aos alunos. Os alunos mais velhos receiam os problemas verbais, em parte, porque nunca lhes pediram para tentar descobrir as soluções quantitativas de problemas de nível elementar.

Também não é muito vulgar ensinar-se a estimar. Não se pede aos alunos das escolas secundárias que estimem qual a quantidade de tijolos duma das paredes do edifício onde têm aulas, ou qual a velocidade do campeão de 100 metros da escola, ou qual a percentagem de alunos da escola com pais carecas, ou o *rácio* entre o diâmetro da cabeça de cada um e a sua altura, ou quantas moedas de um escudo serão necessárias para construir uma torre da altura da *Torre Eifel*, ou quantas dessas mesmas moedas caberão dentro da sala de aula.

Quebra-cabeças, jogos e adivinhas é coisa que nunca entra nas salas de aula - em muitos casos, penso eu, porque se assim fosse os adolescentes venceriam sem dificuldade os seus professores. Referências interessantes são, sem dúvida, as obras de Martin Gardner, e os clássicos *How to Solve it* e *Mathematics and Plausible Reading,* ambos de George Polya.

Do lado oposto temos os compêndios escolares. Debruçam-se, por exemplo, sobre o facto de a adição ser uma operação dita associativa, já que $(a + b) + c = a + (b + c)$, mas é raro abordarem operações que não sejam associativas, de modo que a definição surge-nos como, no mínimo, desnecessária.

Nada mais lógico do que pensarmos que, a este nível, os programas de computador seriam inestimáveis para ajudar a ensinar as bases da matemática e as suas aplicações. No entanto, não conheço nenhum *software* que ofereça uma abordagem integrada, coerente e eficaz da aritmética e das suas aplicações práticas.

Parte da culpa deste estado de coisas terá em última análise de ser assacada a professores pouco capazes, as mais das vezes pouco interessados na matemática. Por outro lado, devemos também censurar, em minha opinião, as escolas superiores de educação, cujos cursos também não conferem grande importância à matemática. Se os programas de matemática do ensino básico, secundário e universitário ensinassem os aspectos divertidos da matemática, o que poderia ser complementado com a recomendação de livros especializados de divulgação, suponho que o analfabetismo matemático não estaria tão generalizado como presentemente está.

2. O ensino da matemática

Quando os alunos chegam ao **ensino secundário**, o problema da competência dos professores torna-se mais agudo. Hoje em dia, são tantos os elementos oriundos do limitado grupo de pessoas com talento matemático a trabalharem na indústria de computadores, nos bancos ou em campos afins que só substanciais suplementos salariais atribuídos aos professores de matemática do ensino secundário poderão evitar que a situação nas escolas resvale para o descalabro. No pé em que as coisas estão, os elementos básicos da cultura matemática não está, na grande maioria dos casos, a ser transmitida aos nossos alunos.

Para além da compreensão da álgebra, geometria e geometria analítica, os alunos do secundário deveriam contactar com alguns dos mais importantes conceitos da chamada **matemática finita**. A análise combinatória, a teoria dos grafos, a teoria dos jogos e, muito em especial, a teoria das probabilidades, são temas cuja importância é cada vez mais marcante.

A escola secundária proporciona-nos a melhor ocasião para contactar efectivamente com os alunos. Quando passarem para a universidade, é muito difícil chegarmos àqueles a quem faltam bases suficientes de álgebra e de geometria analítica. Mesmo aqueles com conhecimentos matemáticos suficientes, só muito raramente se apercebem da extensão crescente de outros assuntos que têm vindo a ser "matematizados" preferindo optar por cursos em que a matemática lhes ocupe o menor tempo possível.

Excluindo certos **autores de compêndios**, só uma mão-cheia de escritores especializados em matemática conseguem ter uma audiência de leigos superior a mil. Atendendo a esta lamentável situação, não será de estranhar que muitas pessoas cultas estejam familiarizadas com Shakespeare, Dante, Goethe ou Camões, mas confessem abertamente a sua ignorância quanto a Gauss, Euler, Laplace ou Cauchy. (Newton não conta, pois é muito mais conhecido pelas suas contribuições para a Física do que pela sua invenção do cálculo.).

Se a matemática é importante, então o ensino da matemática também o é. Os matemáticos que desdenham comunicar os seus conhecimentos a uma larga audiência comportam-se um pouco como aqueles milionários que não contribuem para as obras de assistência social.

Resumindo e concluindo, há uma óbvia ligação entre o analfabetismo matemático e a escassa educação ministrada à grande maioria das pessoas. Mesmo assim a coisa não se fica por aqui, já que muito boa gente com conhecimentos matemáticos superiores à média não se caracteriza por uma educação formal tal como a concebemos. Em matemática, os factores psicológicos são muito mais debilitantes que a educação defeituosa ou insuficiente.

3. Questões psicológicas

Considere a seguinte situação. Carla tem 33 anos, é solteira e muito decidida. Licenciada com boas classificações, fez o mestrado em ciências políticas e envolveu-se a fundo nas actividades sociais da universidade, em especial nas questões de descriminação e anti-nuclear. Diga qual das seguintes declarações é mais plausível:

(i) Carla trabalha como caixa num banco;

(ii) Carla trabalha como caixa num banco e activista do movimento de libertação das mulheres.

Muitas pessoas encaram a resposta (ii) como a mais representativa de alguém com o passado de Carla, preferindo-a em detrimento da resposta (i).

Na sua fascinante obra *Judgement under Uncertainty*, os psicólogos Tvesky e Kahneman descrevem uma variedade diferente do analfabetismo matemático aparentemente irracional e que caracteriza muitas das nossas decisões mais importantes. Os autores colocam às pessoas a seguinte situação: escolha entre trinta mil contos certos ou oitenta por cento de hipóteses de ganhar quarenta mil, com vinte por cento de hipóteses de não ganhar nada. A maioria das pessoas prefere os trinta mil certos, mesmo que o lucro médio provável na segunda opção seja de trinta e oito mil contos ($40000 \times 0.8 = 38000$). Se a escolha recair, no entanto, entre uma perda segura de trinta mil ou oitenta por cento de perder quarenta mil contos e vinte por cento de hipóteses de não perder nada, a maioria das pessoas prefere arriscar-se a perder os quarenta mil, pois tem a hipótese de evitar qualquer perda, mesmo que o prejuízo médio provável da última opção seja de trinta e oito mil contos.

4. Ansiedade matemática

Uma das causas mais comuns do analfabetismo matemático, ainda mais vulgar que as ilusões psicológicas, é aquilo que Sheila Tobias denomina ansiedade matemática. Aparentemente, as pessoas que sofrem de ansiedade matemática, não possuem referências e não conseguem aperceber-se dos fundamentos do raciocínio matemático. Têm medo. Foram não só intimidadas por professores severos e muitas vezes sexistas como por outras pessoas que sofriam de ansiedade matemática. Julgam que há mentes matemáticas e outras não matemáticas; as primeiras descobrem instantaneamente as soluções, enquanto as segundas nunca conseguem chegar ao fim, por muito que se esforcem.

Obviamente, todos estes preconceitos constituem um formidável bloqueio ao alfabetismo matemático; felizmente, na maior parte dos casos, o problema pode ser corrigido. Uma técnica simples, mas que costuma dar bons resultados, consiste em explicar claramente o problema a outra pessoa. Mas há outras técnicas: examinar problemas semelhantes mas mais simples ou mais genéricos; coligir informações pertinentes para o caso; raciocinar "para trás", partindo de uma solução conhecida; desenhar esquemas e diagramas; comparar o problema, ou parte dele, a problemas que tenhamos compreendido bem; e, acima de tudo, estudar tantos exemplos quanto nos for possível, procurando variar de tema e de grau de complexidade.

Muito diferente da ansiedade matemática, e muito mais difícil de abordar, é a preocupante **letargia intelectual** que afecta um pequeno mas crescente número de alunos, tão falhos de disciplina ou motivação mental que nada parece entrar-lhes nas cabeças. O que fazer com alunos indiferentes a tudo, aparentemente incapazes de focar uma parte que seja das suas energias em temas intelectuais? Estou a imaginar o professor a conversar com um desses alunos: "A resposta não está em X, mas sim em Y, só que tu esqueceste-te de tomar esse aspecto em consideração." O aluno fita-o com um olhar amorfo e responde com um bocejo: "E depois?". É, na verdade, um problema muitíssimo mais sério e preocupante que o da ansiedade matemática.

Referências

1. Paulos, John Allen, Inumerismo: o Analfabetismo Matemático e as suas Consequências, Publicações Europa-América, Mem Martins, 1988.

O nome dos grandes números (10^N)

N	*Nome*	*Prefixo*
1	dez	deca
2	cem	hecto
3	mil	kilo
4	miríade	miri
6	milhão	mega
9	milhar de milhão	giga
12	bilião	tera
15	milhar de bilião	peta
18	trilião	exa
21	milhar de trilião	zeta
24	quatrelião	iota
...		
100	gogol	

CAPÍTULO 2. O INFINITO

A evolução do conceito de número

1. Sentido de número

O homem, ainda mesmo nas fases mais iniciais da sua evolução, possui uma faculdade, a que, à falta de melhor nome, chamarei *sentido de número*. Esta faculdade permite-nos reconhecer que alguma coisa mudou numa pequena colecção quando, sem o seu conhecimento directo, se retirou ou aumentou um objecto a essa colecção. Não se deve confundir sentido de número com a operação de contagem que provavelmente nasceu numa fase muito mais avançada e que envolve, como veremos, um processo mental complicado.

Entre outros animais, parecem algumas aves possuir tal sentido de número. De um ninho que contém quatro ovos, pode retirar-se um sem que haja reacção aparente, mas se subtraírem dois, normalmente, os pais rejeitam a postura. Por qualquer processo indiscernível, a ave pode assim distinguir dois de três. Mas esta faculdade não é de modo algum exclusiva das ave. O mais flagrante dos casos conhecidos é o que se passa com um insecto: a "vespa solitária". A vespa mãe põe os ovos em células individuais e provê cada um dos ovos com um número determinado de lagartas vivas que vão servir de alimento às futuras vespas após o termo da incubação. O que há de mais particular no fenómeno é o número de vítimas ser constante para cada espécie de vespa: certas espécies fazem um abastecimento de 5, outras de 12, e ainda outras chegam a atingir o número de 24 lagartas por célula.

A invariabilidade da acção da vespa e o facto dessa acção se ligar a uma função fundamental da vida do insecto, tornam este caso menos convincente que o seguinte. Aqui, a atitude do animal parece atingir o limite da acção consciente.

Um proprietário tinha resolvido matar um corvo que fizera um ninho na torre de vigia dos seus domínios. Tentou repetidamente surpreender o animal, mas sempre em vão: o corvo deixava o ninho logo que o homem se aproximava e, empoleirado numa árvore distante, aguardava atentamente que o homem abandonasse a torre para, só então, regressar ao ninho. O proprietário recorreu então a um estratagema: entraram dois homens na torre, um deles conservou-se lá dentro e o outro voltou a sair e afastou-se. Mas a ave não se deixou enganar: manteve-se à distância enquanto o segundo homem não saiu. Repetiu-se a experiência nos dias seguintes com dois, três e até quatro homens, sempre sem êxito. Por fim fez-se a tentativa com cinco homens: tal como antes, entraram todos na torre, e ficou ali um enquanto os outros quatro saíram e se afastaram. Desta vez o corvo perdeu-lhes a conta. Incapaz de distinguir entre quatro e cinco, regressou ao ninho.

2. A génese

Contra estas provas podem levantar-se duas objecções. A primeira é que as espécies animais que possuem tal sentido do número são pouquíssimas e não se encontrou essa faculdade entre os mamíferos, dela carecendo os próprios macacos. A segunda é que, em todos os casos conhecidos, o sentido de número dos animais tem um interesse tão limitado que se pode considerar sem interesse.

Na realidade, o primeiro ponto tem toda a razão de ser. É, sem dúvida, um facto a considerar que a faculdade da percepção do número, numa forma ou noutra, parece exclusiva de alguns insectos e aves e do homem.

A segunda objecção é de reduzido valor, uma vez que também o alcance do sentido de número no homem é muito limitado. Em todos os casos reais em que o homem civilizado é chamado a distinguir números, consciente ou inconscientemente ele auxilia o seu sentido directo de número por processos tais como a comparação de disposições simétricas, ou agrupamento e contagem mentais. Em especial a contagem tornou-se de tal forma parte integrante da nossa bagagem mental que os testes psicológicos realizados sobre a percepção numérica esbarram sempre com dificuldades extremas.

Curr, que efectuou um completo estudo da Austrália primitiva, afirma que entre os nativos, só poucos conseguem distinguir quatro e nenhum australiano no estado tribal consegue distinguir sete. Os bosquímanos da África do Sul não têm, na sua língua, outros numerais além do *um, dois* e *vários*, e mesmo estes são tão mal definidos que é lícito perguntar se os nativos lhe atribuem um significado específico.

Não temos razões para crer, temos até muitas para duvidar, que os nossos antecessores remotos estivessem mais bem habilitados, dado que, praticamente, todas as línguas europeias apresentam vestígios de tais limitações ancestrais. O termo inglês *thrice*, tal como o latino *ter*, tem o duplo significado: três vezes e vários. Há uma relação plausível entre o latino *tres*, três, e *trans*, para além; o mesmo se pode dizer do francês *très*, muito, e *troi*, três.

A génese dos números perde-se na bruma impenetrável das idades pré-históricas. Teria o conceito nascido da experiência ou teria a experiência servido simplesmente para tornar explícito o que já se encontrava latente na mente primitiva? Aqui está um assunto fascinante para a especulação filosófica...

O núcleo a partir do qual se desenvolveu o conceito de número foi um sentido de número rudimentar não mais extenso em alcance que o possuído pelos pássaros. E pouca dúvida resta de que, circunscrito à sua percepção directa do número, o homem pouco teria avançado, em relação às aves, na arte de calcular. Mas, graças a uma série de circunstâncias notáveis, o homem aprendeu a auxiliar a sua extremamente limitada percepção do número lançando mão de um artifício que se destinava a exercer uma influência tremenda na sua vida futura. Esse artifício é a **contagem**, e é à contagem que se deve o extraordinário progresso feito na expressão do nosso universo por meio de números.

3. Número cardinal

Há algumas línguas primitivas que têm palavras para designar cada cor do arco-íris mas não têm nenhuma que signifique cor; outras há em que existem todos os numerais mas em que falta uma palavra que exprima número.

O concreto precede o abstracto. "Muitas eras devem ter passado", diz Bertrand Russel, "antes que se descobrisse que um casal de faisões e um par de dias eram ambos ocorrências de número dois." Presentemente temos já umas tantas formas de exprimir a ideia do número dois: par, parelha, junta, casal, par, etc.

Foi a contagem que consolidou a ideia de pluralidade concreta, e portanto heterogénea, tão característica do homem primitivo, num conceito abstracto e homogéneo do número, que tornou possível a matemática.

No entanto, por estranho que pareça, é possível chegar-se a um conceito de número, lógico, definido, sem se recorrer ao artifício da contagem.

Entremos num auditório. Temos na nossa frente duas colecções: as cadeiras da sala e a assistência. Sem contar, poderemos concluir se as duas colecções são iguais e, se o não forem, qual delas é a maior. Chegamos a esta conclusão por um processo que domina toda a matemática e que recebeu o nome de *correspondência unívoca*. Consiste em fazer corresponder a cada objecto de uma colecção um objecto da outra, continuando o processo até que uma delas, ou ambas, se esgotem.

A técnica numérica de vários povos primitivos limita-se justamente a tal processo de comparação ou correspondência. Esses povos conservam um registo dos seus rebanhos e exércitos por meio de entalhes cortados numa árvore ou de seixos juntos num monte. O facto dos nossos antepassados adoptarem tais métodos é evidenciado, por exemplo, pela etimologia das palavras inglesas *tally* e *calculate* (ambas significam calcular), que derivam as duas do latim, sendo a raiz da primeira *talea*, corte, e a da segunda *calculus*, pedrinha, seixo.

Pode parecer, a princípio, que o processo de correspondência apenas faculta um meio de comparar as duas colecções e é incapaz de originar o número no sentido absoluto da palavra. Mas a transição do número relativo para o absoluto não é difícil. Basta que para isso se criem **colecções padrão**, representando, cada uma delas, uma colecção possível.

O homem primitivo encontra tais padrões no ambiente que o cerca: as asas de uma ave podem simbolizar o número dois, as folhas de um trevo três, as pernas de um animal quatro, os dedos da própria mão cinco. É evidente que, uma vez criado e adoptado o numeral, este se torna um padrão tão válido quanto o era o objecto que originariamente representava. A necessidade de distinguir o nome do objecto do nome do símbolo numérico terá levado a introduzir diferenças nos sons até se perder de memória, com o decorrer do tempo, a própria ligação entre os dois.

4. Número ordinal

O conceito acabado de expor chama-se **número cardinal**. O número cardinal assenta no princípio da correspondência: *não implica contagem*. Para criar um processo de contagem não basta ter uma sortida corte de padrões, por muito numerosa que ela seja. Temos que estabelecer um **sistema numérico**: o nosso conjunto de padrões tem de ser arranjado segundo uma sequência ordenada, uma sequência que progrida no sentido de grandezas crescentes, a sequência natural: um, dois, três, ... Uma vez estabelecido tal sistema, contar uma colecção significa atribuir a cada um dos seus membros um termo da sequência natural em sucessão ordenada até se esgotar a colecção. O termo da sequência natural atribuído ao último membro da colecção chama-se **número ordinal** da colecção.

Nós aprendemos a passar do número cardinal para o ordinal com tanta facilidade que as duas formas parecem confundir-se. Para determinar a pluralidade de uma colecção, isto é, o seu número cardinal, já não precisamos de arranjar uma colecção padrão com a qual a possamos comparar - contamo-la. E é ao facto de termos aprendido a identificar os dois aspectos do número que se deve o nosso progresso no campo das matemáticas, porque, embora na prática estejamos interessados no número cardinal, este é incapaz de originar uma **aritmética**. As operações da aritmética baseiam-se na assunção tácita de que é sempre possível passar-se de qualquer número para o seu sucessor, e esta é a essência do conceito de ordinal.

A comparação é também, por si só, incapaz de originar uma arte de calcular. Sem a nossa aptidão para dispor coisas segundo uma sucessão ordenada, poucos progressos se teriam feito. Correspondência e sucessão, os dois princípios que informam toda a matemática - ou antes, todos os domínios do pensamento científico - estão entretecidos na própria urdidura do nosso sistema numérico.

5. Contagem digital

É natural, neste momento, perguntar se esta subtil distinção entre número cardinal e ordinal terá desempenhado qualquer papel nas fases remotas do conceito de número. É-se tentado a admitir que o número cardinal, baseado apenas na comparação, tenha precedido o ordinal que implica tanto a comparação como a ordenação. No entanto, as mais cuidadosas investigações não revelam tal precedência. Onde quer que exista qualquer forma de técnica numérica, encontram-se os dois aspectos do número.

Mas, também, onde quer que exista qualquer forma de técnica de contagem digna desse nome, verifica-se que a **contagem digital** a precede ou a acompanha. Nos seus dedos, possui o homem um dispositivo que lha permite passar imperceptivelmente do número ordinal para o cardinal. Queira ele indicar que uma dada colecção contém quatro objectos, bastar-lhe-á levantar ou baixar quatro dedos *simultaneamente*; queira ela contar essa mesma colecção, só terá que levantar ou baixar esses dedos *sucessivamente*. Encontram-se praticamente em todas as línguas primitivas vestígios inconfundíveis dessa contagem.

E, no entanto, muito embora os nossos filhos continuem a aprender a contar pelos dedos e nós ainda por vezes recorramos a eles para sublinhar o que dizemos, a arte de contagem digital perdeu-se entre os povos civilizados modernos. O advento da escrita, a numeração simplificada, a generalização do ensino, tornaram essa arte obsoleta e supérflua e, em tais circunstâncias, somos naturalmente levados a esquecer o papel desempenhado pela contagem digital na história do cálculo. Ainda há bem poucas centenas de anos a contagem digital era um hábito de tal modo difundido na Europa Ocidental que nenhum manual de aritmética se podia considerar completo sem apresentar uma exposição detalhada sobre tal método.

A arte de utilizar os dedos para contar e realizar operações aritméticas simples era então uma das prendas do homem educado. Ainda hoje os camponeses do centro da França (Auvergne) utilizam um método curioso para **multiplicar pelos dedos** números superiores a 5. Se alguém pretende multiplicar 9×8, dobra 4 dedos da mão esquerda ($4 = 9 - 5$) e 3 dedos da mão direita ($3 = 8 - 5$). O número de dedos dobrados dá-lhe então as dezenas do resultado ($4 + 3 = 7$), e o produto dos dedos estendidos em cada mão dá-lhe as unidades ($1 \times 2 = 2$).

6. Influências fisiológicas

Que idade tem a nossa linguagem numérica? É impossível indicar a época exacta em que surgiram os numerais, mas há provas inegáveis de que ela precedeu de vários milhares de anos a história da escrita. Um dos argumentos já por nós foi mencionado: todos os vestígios do significado original dos numerais nas línguas indo-europeias, com a possível excepção de cinco (mão: compare-se o russo "piat", cinco, com "piast", mão estendida; ou o sânscrito "pantcha" com o seu parente persa "pentca", mão), perderam-se. E isto é particularmente notável, uma vez que, como regra, os numerais gozam de extraordinária estabilidade. Enquanto o tempo introduziu profundas modificações nos restantes aspectos das línguas, o vocabulário dos numerais permaneceu praticamente intacto. A relação entre os numerais e os objectos concretos perdeu-se precisamente devido a este facto.

No que se refere à estrutura da linguagem numérica, as pesquisas filológicas revelam uma uniformidade universal. Os dez dedos do homem deixaram uma marca indelével.

Com efeito, a influência dos nossos dez dedos na "escolha" da base do sistema numérico não é uma suposição errónea. Em todas as línguas indo-europeias, tal como na semítica, na mongólica e na maioria das línguas primitivas, a base de numeração é dez, isto é, existem numerais independentes até dez, a partir do qual se utiliza um processo de composição qualquer até se atingir 100. Todas essas línguas têm nomes independentes para 100 e 1000 e algumas têm também nomes para mais altas unidades decimais.

7. Bases de numeração não decimais

É certo que além do sistema decimal se encontram razoavelmente difundidas duas outras bases, mas o seu carácter confirma de modo notável a natureza antropomórfica da nossa forma de contagem. Esses dois sistemas são o quinário, da base 5 (caso do sistema romano), e o vigesimal, de base 20. Reminescências deste último sistema ainda se encontram na língua francesa - vingt (20); quatre-vingt (80) - e na língua inglesa - score (20); two-score (40).

Encontra-se entre as mais primitivas tribos da Austrália e da África um sistema de numeração cuja base não é nenhum dos números 5, 10 ou 20. É o sistema binário, isto é, que tem por base dois. Aqueles seres ainda não atingiram a fase da contagem digital. Têm numerais para um e dois e números compostos até seis. Para além do seis o número designa-se por "muitos".

Curr, que já tivemos ocasião de citar a propósito das tribos australianas, afirma que a grande maioria deles conta por pares. E, na verdade, esse hábito está tão arreigado no nativo que ele raramente descobre que, de um grupo de sete alfinetes, se retiraram dois; mas, em contrapartida, se se retirar um descobre-o imediatamente. O sentido de paridade é nele mais forte que o sentido de número.

Por curioso que pareça, esta base de numeração, a mais primitiva de todas, teve em tempos relativamente recentes um eminente defensor, nada menos que na pessoa de Leibniz. Uma numeração binária requer apenas dois símbolos, 0 e 1, a partir dos quais se exprimem todos os outros números. As vantagens da base dois são a economia de símbolos e uma tremenda simplicidade das operações. Repare-se que, no sistema binário a tabuada da adição e da multiplicação se resume a $1 + 1 = 10$ e $1 \times 1 = 1$, enquanto no sistema decimal tem 100 entradas. Esta vantagem é porém mais que anulada pela falta de compacidade do sistema: o número decimal $4096=2^{12}$ seria expresso no sistema binário por 1000000000000. Foi a elegância mística do sistema binário que levou Leibniz a exclamar: *Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum* (Um é bastante para formar tudo a partir do nada).

8. O homem como medida de todas as coisas

A adopção do sistema decimal, pelo homem, é um *acidente fisiológico*. Excluída a sua vantagem fisiológica, a base decimal pouco tem que a recomende. Quase qualquer outra, com possível excepção de nove, teria sido tão boa e mesmo, provavelmente, melhor. Na verdade, se a escolha houvesse sido obra de um grupo de peritos, teríamos assistido, possivelmente, a um conflito entre o homem prático, que pugnaria por uma base com o maior número de divisores, como é o caso do doze, e o matemático que pretenderia um número primo, como sete ou onze.

Já nos finais do século XVIII o grande naturalista Buffon propôs, efectivamente, a adopção universal do sistema de numeração duodecimal (base doze), fazendo notar que doze tem quatro divisores, enquanto dez tem apenas dois, e afirmando que esta insuficiência do nosso sistema decimal se fizera sentir de forma tão notável ao longo dos séculos que, a despeito da adopção universal da base dez, a grande maioria das medidas tinha uma divisão secundária duodecimal. Em contrapartida, o grande matemático Lagrange afirmava ser muito mais vantajosa uma base prima.

Nesta nossa época, em que os processos de cálculo ultrapassaram largamente a aritmética mental, já ninguém tomaria a sério qualquer daquelas propostas. As vantagens obtidas seriam tão modestas, e tão arreigada é a tradição de contar por dezenas, que a ideia parece ridícula.

Do ponto de vista da história da cultura, uma mudança de base, ainda que exequível, seria grandemente indesejável. Enquanto o homem contar por dezenas, os seus dez dedos lembrar-lhe-ão a origem humana desta fase extraordinariamente importante da sua evolução mental, e o sistema decimal pode assim construir um testemunho vivo da tese: *o homem é a medida de todas as coisas.*

A coluna vazia

1. Origens da numeração

A numeração é provavelmente tão antiga como a propriedade privada. Não há razões para duvidar que tenha nascido do humano desejo de conservar um registo das suas cabeças de gado ou de quaisquer outros bens. Cortes num pau, riscos em pedras, marcas no barro - são estas as formas mais remotas da intenção de registar números por meio de símbolos escritos. A numeração é pelo menos tão velha como a linguagem escrita e há mesmo provas de que a precedeu.

Os mais velhos registos que revelam o uso sistemático dos numerais escritos são os dos antigos sumérios e egípcios, os quais datam aproximadamente da mesma época, ao redor de 3500 a.C.. O seu exame chama-nos logo a atenção para a semelhança dos processos usados. É possível, sem dúvida, que tenha havido qualquer comunicação entre os dois povos, a despeito da distância que os separava, mas é mais verosímil que ambos tenham estabelecido os seus sistemas de numeração ao longo das linhas de menor resistência, quer dizer que as numerações outra coisa não fossem senão uma consequência do processo natural de marcar.

Na realidade, quer se trate dos numerais cuneiformes dos velhos babilónios, dos hieróglifos dos papiros egípcios, ou dos símbolos exóticos dos primitivos escritos chineses, todos têm em comum um inconfundível princípio cardinal. Os numerais até nove são meros agregados de traços. Para além do nove utiliza-se o mesmo princípio, representando-se por símbolos especiais as unidades de classe mais alta, como as centenas, os milhares, etc.

2. Numeração ordinal *vesus* numeração cardinal

Oposta a este carácter puramente cardinal dos registos é a numeração ordinal em que os números são representados pelas letras do alfabeto por ordem da sua sucessão falada.

O mais antigo exemplo deste processo é o da numeração fenícia, nascida da necessidade, resultante da complexidade de um comércio crescente, de um sistema numérico compacto. A origem fenícia das numerações hebraica e grega é indiscutível: adoptou-se o sistema fenício, em bloco, juntamente com o alfabeto e até os sons das letras se mantiveram.

Pelo contrário, a numeração romana, que sobreviveu até aos nossos dias, constitui um retorno aos métodos cardinais anteriores. Nota-se, no entanto, uma certa influência grega nos símbolos literais adoptados para certas unidades, como X para dez, C para cem, M para mil.

A evolução das numerações da antiguidade atingiu a sua expressão final no sistema ordinal dos gregos e no sistema cardinal romano. Qual dos dois era superior? A pergunta teria interesse se o único objectivo de um sistema numérico fosse o registo compacto das quantidades expressas. Mas este não é o problema fundamental. Bem mais importante é a questão: como se prestava o sistema às operações aritméticas e qual o grau de facilidade que ele conferia ao cálculo?

Quanto a isto, não seria fácil a escolha entre os dois métodos porque nenhum deles era capaz de servir de base a uma aritmética que pudesse ser utilizada por um homem de inteligência média. É essa a razão por que, desde o alvoroçar da história até ao advento da nossa numeração moderna, tão limitado processo sofreu a arte de calcular.

Ainda hoje subsiste a ideia de que a habilidade matemática se revela na rapidez de cálculo. "Com que então és bom matemático? Óptimo, nesse caso não deves ter dificuldades com o teu IRS!" Qual o matemático que durante a sua carreira não ouviu isto pelo menos uma vez? Mas naquela pergunta há ironia inconsciente: não estão quase todos os matemáticos bem livres de dificuldades resultantes de grandes rendimentos?

Chegou até nós uma história, para a qual não se conseguiu ainda obter confirmação, mas que é característica da situação da época que não resisto à tentação de a contar. Segundo ela, um mercador alemão do séc. XV tinha um filho a quem desejava dar uma preparação comercial adiantada e pediu conselho a um prestigioso professor universitário sobre a escola para onde o devia mandar estudar. Respondeu-lhe o professor que, se as necessidades correntes do rapaz se limitassem à soma e à subtracção, talvez conseguisse instruir-se numa universidade alemã; mas a Itália, onde a arte de multiplicar e dividir estava grandemente avançada, era, na sua opinião, o único país em que tal instrução superior se poderia adquirir.

Com efeito, a multiplicação e a divisão praticadas nessa época pouco tinham de comum com as modernas operações conhecidas pelo mesmo nome. A multiplicação era uma sucessão de duplicações e a divisão reduzia-se a mediações, que dizer a sucessivas divisões a metade. A descoberta da moderna numeração de posição removeu os principais obstáculos e tornou a aritmética acessível a qualquer mente, mesmo à mais obtusa.

3. O ábaco

As crescentes complexidades da vida, indústria e comércio, da propriedade rural e da escravatura, dos sistemas tributários e da organização militar, tudo exigia cálculos mais ou menos complicados, mas, em qualquer caso, para além das possibilidades da técnica digital. A numeração rígida, dificilmente manejável, era incapaz de corresponder às necessidades. Como pôde o homem resolver estas dificuldades, durante os cinco mil anos da sua vida civilizada que antecederam a numeração moderna?

Um precioso instrumento de contagem é o chamado *ábaco*. O ábaco, na sua forma mais genérica, consiste num quadro dividido num certo número de colunas paralelas, representando cada coluna uma classe decimal distinta: unidades, dezenas, centenas, etc. O quadro dispõe de uma série de contadores que servem para indicar o número de unidades em cada classe. A origem do nome não é clara. Há quem o relacione com *abac*, poeira, dos semitas; outros crêem que derivou do grego *abax*, tábua, placa. O instrumento era largamente utilizado na velha Grécia e ainda hoje continua a ser uso corrente em toda a China e em certas regiões da Rússia.

4. A numeração de posição

Quando meditamos na história da arte de calcular até à invenção do princípio de posição, sentimo-nos chocados pela pobreza das conquistas feitas neste domínio. Este longo período de quase cinco mil anos viu nascer e morrer civilizações que atrás de si deixaram a sua herança de literatura, arte, filosofia e religião. Mas qual a realização decisiva no campo do cálculo, a mais antiga arte praticada pelo homem? Uma numeração inflexível, tão tosca que tornou quase impossível qualquer progresso, e um sistema de calcular de âmbito tão restrito que as operações mais elementares requeriam os bons ofícios de um especialista. E, o que é mais, o homem serviu-se destes processos durante milhares de anos sem lhes introduzir um único aperfeiçoamento de valor, sem contribuir com uma única ideia importante para o sistema.

Pode esta crítica parecer severa; no fim de contas, não é correcto julgar as realizações da idades remotas pelos padrões dos nossos tempos, de progresso acelerado e actividade febril. No entanto, mesmo comparada com a lenta evolução das ideias, ao longo da Idade Média, a história do cálculo oferece uma imagem peculiar de desoladora estagnação.

Vista por este prisma, a conquista do hindu desconhecido, que em determinado dia dos primeiros séculos da nossa era descobriu o *princípio de posição*, assume as proporções de acontecimento mundial. Não apenas porque o novo princípio constituísse um afastamento radical dos velhos métodos, mas antes porque sem ele não seria possível qualquer progresso na aritmética. E apesar de tudo ele é tão simples que o mais insignificante aluno das escolas é capaz de o apreender. Na verdade, parecia lógico que a primeira tentativa de traduzir na linguagem dos numerais as operações do ábaco tivesse resultado na descoberta do princípio de posição.

Particularmente estranho para nós é o facto de os grandes matemáticos da Grécia clássica não terem tropeçado nele. Seria porque os gregos tinham um tão vincado desdém pelas ciências aplicadas que até deixavam a educação dos filhos ao cuidado de escravos? Mesmo assim, como é que a nação que nos legou a geometria e levou tão longe esta ciência, não criou sequer uma álgebra rudimentar? Não é igualmente notável que a álgebra, essa pedra angular das matemáticas modernas, tenha também nascido na Índia aproximadamente quando nasceu a numeração de posição?

Um exame atento da anatomia da nossa numeração moderna pode lançar luz sobre estas interrogações. A numeração de posição consiste em se dar ao algarismo um valor que depende não apenas do termo da sequência natural que representa, mas também da posição que ocupa em relação aos outros símbolos de grupo. Como se disse anteriormente, parecia suficiente traduzir o esquema fornecido pelo ábaco na linguagem dos numerais para se obter sensivelmente o sistema que dispomos hoje.

Certo! Mas há uma dificuldade: como representar a *coluna vazia*? Teria sido impossível qualquer progresso se não se inventasse um símbolo para uma classe vazia, um símbolo para *nada*, o nosso moderno zero. A mentalidade positiva dos antigos gregos não podia conceber o vácuo como um número e muito menos distinguir o vácuo com um símbolo.

Nem mesmo o hindu ignoto viu no zero o símbolo do nada. O termo indiano que representa zero era *sunya*, que significa *vazio* ou *vago*, mas não tinha qualquer correlação com "vácuo" ou "nada". E assim, a crer em todas as aparências, a descoberta do zero foi um mero acidente resultante de uma tentativa de fazer o registo não ambíguo das operações do ábaco.

5. O *sunya*

A forma como o *sunya* indiano se tornou o zero contemporâneo, constitui um dos mais interessantes capítulos da história da cultura. Quando os árabes de séc. X adoptaram a numeração indiana, traduziram *sunya* para *sirf*, que significa vazio em árabe. Quando se introduziu a numeração indo-árabe na Itália o *sirf*, por latinização transformou-se em *zephirum*. Isto passou-se nos começos do séc. XIII e, no decorrer dos séculos seguintes, a palavra passou por uma série de metamorfoses que conduziram ao italiano *zero*.

Mais ou menos por essa altura estava Jordanos Numerarius introduzindo o sistema árabe na Alemanha. Manteve o vocábulo árabe, modificando-o ligeiramente para *cifra*; e durante algum tempo, nos meios cultos da Europa, a palavra *cifra* e os seus derivados significavam zero como mostra o facto de Gauss, o último dos matemáticos do séc. XIX que escreveu em latim, utilizar ainda cifra nesse sentido. Na língua inglesa o termo cifra deu origem a *cipher* e manteve o significado original de zero.

A atitude do povo comum em relação ao novo sistema de numeração pode avaliar-se pelo facto de pouco tempo depois da sua introdução na Europa, a palavra *cifra* ser utilizada para significar um sinal secreto. Em português, por exemplo, *cifra* continua a usar-se com o significado de escrita secreta. Este duplo significado, erudito e popular, da palavra cifra, gerou a maior confusão. Os eruditos aqui tiveram que condescender com o uso popular, e o caso encerrou-se finalmente com a adopção do zero italiano.

O mesmo interesse apresenta o termo *algoritmo* e o vocábulo português *algarismo*. Tal como hoje se usa, a palavra algoritmo aplica-se a qualquer processo matemático que envolva uma sucessão de operações, incidindo cada uma delas com o resultado da anterior. Mas entre os sécs. X e XV, era usada como sinónimo de numeração de posição. Sabe-se que os vocábulos dados são simplesmente a corrupção de Al Kworesmi, o nome do matemático árabe do séc. IX cujo livro (na tradução italiana) foi a primeira obra sobre esta matéria a entrar na Europa.

6. A vitória dos "Algoristas"

Hoje, que a numeração de posição passou a fazer parte da nossa vida do dia-a-dia, poderá parecer que a superioridade do método, a compacidade da notação, a facilidade, e a elegância que veio a introduzir nos cálculos, devia ter garantido a sua rápida e geral aceitação. Na realidade, longe de ser imediata, a transição prolongou-se por longos séculos! A luta entre os "Abacistas", que defendiam os velhos hábitos, e os "Algoristas", que advogavam a reforma, arrastou-se do séc. IX ao séc. XV, passando pelas costumadas fases de incompreensão e reacção. Em certos pontos, os algarismos árabes foram banidos dos documentos oficiais, noutros foi banida a nova arte no seu todo. Mas, como de costume, a proibição não resultou na abolição, apenas servindo para alastrar o "contrabando" do qual se encontram largas provas nos arquivos da Itália do séc. XIII, onde, ao que parece, os mercadores usavam os algarismos árabes como uma espécie de código secreto.

Quanto ao êxito final dos algoristas, não se lhe pode determinar uma data com exatidão. Sabemos, no entanto, que a supremacia da nova numeração já era incontestável no princípio do séc. XVI. A partir de então, o progresso fez-se sem dificuldades e, assim, no decorrer dos séculos que se seguiram todas as regras das operações, quer com números inteiros quer com decimais fraccionários, atingiu praticamente a forma e a extensão com que hoje se ensinam nas nossas escolas.

Um século volvido, os abacistas e tudo o que eles defendiam, já haviam sido tão esquecidos que alguns países da Europa começaram a considerar a numeração de posição como obra nacional própria. Assim encontramos, por exemplo, os algarismos árabes designados na Alemanha, nos começos do séc. XIX, por *Deutsch*, diferenciando-se deste modo dos *romanos* que eram considerados de procedência estrangeira.

Quantas pessoas cultas saberão hoje que, há apenas quatrocentos anos, a contagem digital era o único sistema de cálculo do homem médio, enquanto o ábaco era apenas acessível aos calculadores profissionais da época?

Concebido, com todas as probabilidades, como símbolo de uma coluna vazia do ábaco, o *sunya* indiano estava destinado a tornar-se o ponto de viragem de uma evolução, sem o qual seria inconcebível o progresso atingido pela ciência, pela indústria ou pelo comércio dos nossos tempos. E a influência desta grande descoberta de modo algum se confinou à aritmética. Ao abrir caminho para um conceito de número generalizado desempenhou um papel igualmente importante em todos os outros ramos da matemática. A descoberta do zero ficará na história da cultura como uma das maiores descobertas do género humano.

Uma grande descoberta! Sem dúvida. Mas, como tantas outras descobertas que influenciam profundamente a vida da humanidade, não foi o prémio de aturadas pesquisas, mas um simples dom do acaso.

O último número

1. A infalibilidade do raciocínio matemático

Que haverá na matemática que faz dela o padrão das chamadas ciências exactas e o ideal das novas ciências que ainda não alcançaram essa honra? Em vários campos, como o da biologia ou das ciências sociais, é objectivo declarado, pelo menos dos investigadores mais jovens, estabelecer normas e métodos que permitam incluir esses ramos de ciência no número sempre crescente dos que já aceitaram o domínio das matemáticas.

A matemática não é apenas o modelo sobre cujas directrizes as ciências exactas se esforçam por traçar a sua estrutura, a matemática é o próprio cimento que mantém a coesão dessa estrutura. Na verdade, não se considera resolvido um problema enquanto o fenómeno estudado não for formulado como uma lei matemática. Mas porque razão se considera que só os processos matemáticos podem facultar à observação, à experiência, à especulação a precisão, a concisão e a certeza que as ciências exactas exigem?

Se analisarmos os processos matemáticos vemos que se apoiam em dois conceitos: número e função; que a função, em última análise, se pode reduzir a número; que o conceito geral de número se baseia por sua vez nas propriedades que atribuímos à sequência: um, dois, três, ...

É, portanto, nas propriedades dos números inteiros que podemos descobrir a chave desta fé tácita na infalibilidade do raciocínio matemático!

2. As operações elementares

A primeira aplicação prática de tais propriedades toma a forma das operações elementares da aritmética: *adição*, *subtracção*, *multiplicação*, e *divisão* de números inteiros. Como aprendemos estas operações nos primeiros anos da vida, não é de estranhar que a maioria de nós tenha esquecido por completo todo o modo como as aprendemos.

Começamos por decorar a tábua: $1+1=2$, $1+2=3$, ... Repetimo-la e repetimo-la até conseguirmos somar, sem hesitações, quaisquer dois números até dez. Nesta primeira fase da nossa aprendizagem fizeram-nos ver que $5+3=3+5$ e que isto não era acidental mas sim uma regra geral. Aprendemos então a exprimir esta propriedade da soma, pelas palavras: *a ordem é arbitrária*.

Ensinaram-nos em seguida que $(2+3)+4=2+(3+4)$; com isto queriam dizer que, significando $(2+3)+4$ que se somam 2 e 3 e a esta soma se junta 4, é realmente indiferente a ordem por que se fazem as operações uma vez que se obtém o mesmo resultado se se juntar 2 à soma $(3+4)$. Nunca demos grande importância a estes enunciados, mas a verdade é que são fundamentais e neles se baseiam as regras para a adição de números superiores a dez. O esquema

$$\begin{array}{r} 25 \\ 34 \\ 56 \\ \hline 115 \end{array}$$

não é mais que uma paráfrase de:

$$25+24+56=(20+5)+(30+4)+(50+6)=(20+30+50)+(5+4+6)=100+15=115.$$

Entramos, depois, no estudo da multiplicação. Uma vez mais tivemos que decorar uma longa tábua até podermos dizer mecanicamente o produto de dois números quaisquer até dez. Vimos, como sucedia com a adição, que a *multiplicação goza, simultaneamente, das propriedades associativa e comutativa*.

Há ainda uma nova propriedade que interessava conjuntamente à multiplicação e à adição. O produto $7\times(2+3)$ significa que se multiplica 7 pela soma $(2+3)$, isto é por 5; mas podia obter-se o mesmo resultado somando os dois produtos parciais (7×2) e (7×3). É esta propriedade que está na base do processo que usamos para multiplicar números maiores que dez. Na verdade, se analisarmos a operação

$$\begin{array}{r} 25 \\ 43 \\ \hline 075 \\ 100 \\ \hline 1075 \end{array}$$

verificamos que não é senão uma paráfrase compacta da complicada cadeia de operações em que se emprega largamente a propriedade distributiva. Ou seja:

$$25\times 43=\left[(20+5)\times 3\right]+\left[(20+5)\times 40\right]=(20\times 3)+(5\times 3)+(20\times 40)+(5\times 40)=75+100=1075.$$

Tais são os factos que constituem a base da educação matemática de todo o homem de pensamento, ou melhor, de todo o indivíduo que recebeu qualquer educação escolar. É sobre estas bases que se acha construída a aritmética, o fundamento da matemática em que, por sua vez, se apoia toda a ciência pura e aplicada, a qual, por sua vez também, está na origem de todo o progresso técnico.

Novos factos, novas ideias, novos conceitos se vieram juntar mais tarde à nossa bagagem intelectual, mas nenhum deles apresentou, para a nossa mente, a mesma segurança, o mesmo fundamento inabalável, que aqueles primeiros aprendidos na tenra idade dos seis anos. Isto transparece no dito popular: é tão certo como dois e dois serem quatro.

3. O dilema do infinito

Durante a nossa vida, encontramos amplas oportunidades para aplicar as regras aritméticas nos constantes afazeres diários, e tornamo-nos cada vez mais confiantes na sua generalidade. A força da aritmética apoia-se na sua generalidade absoluta. As suas regras são válidas para *todos os números*.

Todos os números! Tudo se encerra nesta curta mas tremendamente importante palavra *todos*. Não há qualquer mistério ao redor da palavra quando aplicada a qualquer classe finita de coisas ou circunstâncias. Poderemos nós significar o mesmo quando nos referimos a todos os números? Podemos conceber uma colecção disposta segundo uma certa ordem e nesta ordem haverá um primeiro número, o número *um*. Mas quanto ao último?

A resposta é simples: *não há último número*! Não podemos conceber um limite à operação de contar. *Todo o número tem um sucessor*. Há uma *infinidade* de números. Mas, se não há último número, qual o significado de *propriedades de todos os números*? Como poderemos nós provar tais propriedades: não será certamente verificando cada caso individual, uma vez que sabemos de antemão que não podemos materialmente esgotar todos os casos.

É no próprio limiar da matemática que se nos depara este *dilema do infinito*, como o dragão lendário guardando a entrada do jardim encantado.

4. A origem do infinito

Qual a origem do conceito da infinidade, da fé na inexaurabilidade do processo de contar? A experiência? Não certamente. A experiência mostra-nos a natureza finita de todas as coisas, de todos os processos humanos. Sabemos que qualquer tentativa da nossa parte para esgotar todos os números terminaria apenas no nosso próprio esgotamento.

Nem sequer se pode determinar matematicamente o existência do infinito, porque a infinidade, a inexaurabilidade do processo de contagem, é uma suposição matemática, a suposição básica da aritmética, em que toda a matemática se apoia. Será então uma verdade sobrenatural, um dos poucos dons que o Criador concedeu ao homem quando o lançou no universo, nu e ignorante, mas livre para cuidar de si mesmo? O teria o conceito nascido com o homem, ou nascido nas suas tentativas fúteis para atingir o último número? Não será ele senão uma confissão da impotência do homem em esgotar o universo pela contagem?

Arquimedes, em *O Calculador de Areias* propõe um processo para calcular o número de areias do universo que, para muitos, era considerado infinito. Nesse raciocínio, Arquimedes concluiu que os grão de areia necessários para encher o universo atingiam um número fabuloso que, na nossa numeração, seria representado por 52 algarismos. Para exprimir esse número, inventou Arquimedes uma nova unidade, a *octada*, que correspondia aos nossos 100000.

A história das tentativas para determinar a área do círculo oferece-nos outro exemplo. Na sua forma original, o problema consistia em construir, com régua e compasso, um quadrado de área igual à do círculo dado. Ora, é possível construir um quadrado equivalente a um polígono regular inscrito de, digamos, 8 lados. Verifica-se, por outro lado, que, se aumentarmos o número de lados do polígono para 16, 32, 64, etc. a área do polígono se aproxima cada vez mais da área do círculo. Ora, não há dúvida de que alguns dos geómetras gregos consideravam este processo não como uma aproximação, mas como um meio de atingir efectivamente o círculo, isto é, julgavam que, levando o processo suficientemente longe, acabariam por atingir finalmente o último polígono que coincidiria, em todos os seus pontos, com a circunferência.

É uma hipótese plausível que o primitivo conceito de infinito fosse, não o incontável, mas sim o ainda-não-contado. O último número significava paciência e perseverança, e o homem parecia carecer destas qualidades. Era qualquer coisa como alcançar o céu, na história da Torre de Babel. O último número, como os céu, pertencia a Deus. E Ele, na sua ira, confundia as línguas dos construtores ambiciosos.

Ainda hoje persiste esta confusão de línguas. Em redor do infinito nasceram todos os paradoxos da matemática, dos princípios de Zenão às antinomias de Kant e de Cantor. Sobre este assunto, no entanto, falaremos mais tarde.

Referências

1. Dantzig, Tobias, Número a Linguagem da Ciência, Astler, Lisboa, 1960.

Numerais de algumas línguas indo-europeias

Portugês	*Sânscrito*	*Grego*	*Latim*	*Alemão*	*Inglês*	*Francês*	*Russo*
um	eka	en	unus	eins	one	un	odyn
dois	dva	duo	duo	zwei	two	deux	dva
três	tri	tri	tres	drei	three	trois	tri
quatro	catur	tetra	quatuor	vier	four	quatre	chetyre
cinco	pantcha	pente	quinque	fünf	five	cinq	piat
seis	sas	hex	sex	sechs	six	six	shest
sete	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	sem
oito	asta	octo	octo	acht	eight	huit	vosem
nove	nava	ennea	nonem	neun	nine	neuf	deviat
dez	daca	deca	decem	zehn	ten	dix	desiat
cem	cata	ecaton	centum	hundert	hundred	cent	sto
mil	sehastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	tysiaca

Sistema quinário: língua Api das Novas Hébridas

	Nome	*Significado*
1	tai	
2	lua	
3	tolu	
4	vari	
5	luna	mão
6	otai	outro um
7	olua	outro dois
8	otolu	outro três
9	ovari	outro quatro
10	lua luna	duas mãos

Sistema vigesimal: língua Maia da América Central

	Nome
1	hum
20	kal
400	bak
8000	pic
160000	calab
3200000	kinchel
64000000	alce

Sistema binário: língua de uma tribo do Estreito de Torres

	Nome
1	urapun
2	okosa
3	okosa-urapun
4	okosa-okosa
5	okosa-okosa-urapun
6	okosa-okosa-okosa

CAPÍTULO 3. BREVE REFERÊNCIA À TEORIA DOS GRAFOS

Problema de Euler

1. Circuitos rodoviários

O objectivo principal da ciência aplicada é a de encontrar a melhor maneira para resolver um problema - aquilo a que os matemáticos chamam **encontrar a solução óptima**. Nalguns casos, poderá ser a maneira mais rápida para concluir um trabalho. Noutras situações, o objectivo poderá ser o maximização do lucro e a minimização dos custos. O que definimos como "óptimo" depende da natureza do objectivo.

Concentremo-nos no problema do controlo de estacionamento numa cidade. Muitas cidades possuem já parquímetros que necessitam ser controlados regularmente pela polícia para evitar as fugas de pagamento. Vamos usar uma cidade imaginária para mostrar como a teoria dos grafos pode ajudar o tornar o controlo de estacionamento mais eficiente.

2. Circuitos de Euler

Consideremos o mapa dado na Figura 1, com estradas, blocos residenciais, espaços verdes, lagos, etc.

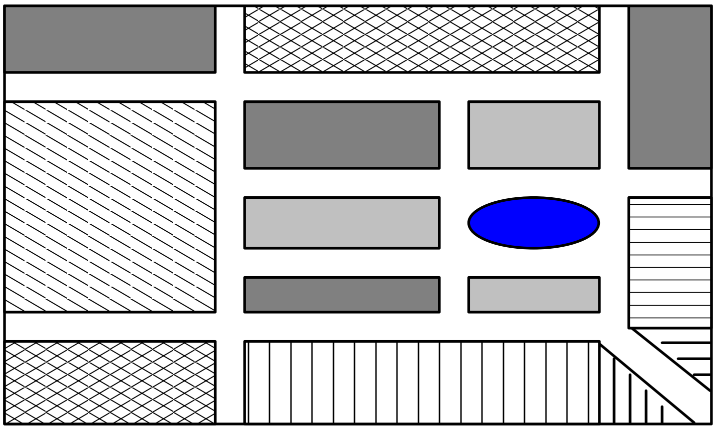

Figura 1. Um mapa de estradas numa cidade imaginária.

Existe um sem número de possibilidades para o nosso polícia controlar todos os parquímetros. O nosso trabalho será o de ajudar o chefe da polícia a encontrar a solução óptima, o caminho mais eficiente que deve tomar o seu subalterno, que viaja a pé, por forma a controlar a totalidade dos parquímetros da sua zona.

O chefe da polícia tem dois objectivos em mente: (1) o polícia encarregado de efectuar a vistoria deve percorrer todos os passeios que possuem parquímetros passando duas vezes pelo mesmo passeio o menor número de vezes possível; (2) o caminho deve começar e acabar no mesmo ponto, por exemplo no sítio onde deixou estacionado o carro.

Poderemos pensar neste problema em termos de uma estrutura chamada **grafo**, um dos muitos modelos matemáticos que ajuda a simplificar problemas matemáticos complexos.

Definição 1: *Um grafo é um conjunto finito de pontos (chamados* ***vértices****) unidos por linhas (chamadas* ***arestas****). Cada aresta deve unir dois vértices distintos.*

Um grafo pode ser usado para representar o nosso mapa de estradas, uma rede de informática, as linhas aéreas, etc.

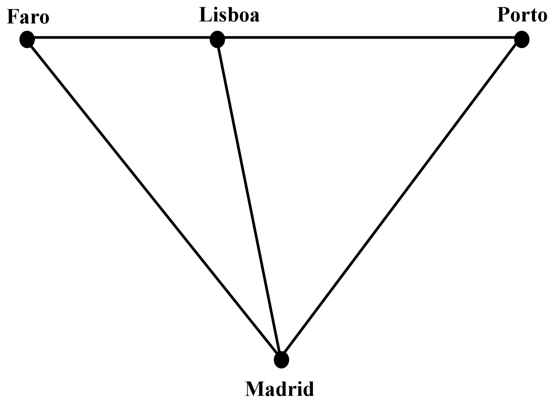

Figura 2. Linhas aéreas

No caso do nosso problema, poderemos representar todo o território a ser patrulhado por um grafo: poderemos pensar cada cruzamento como um vértice e cada passeio com parquímetro como uma aresta.

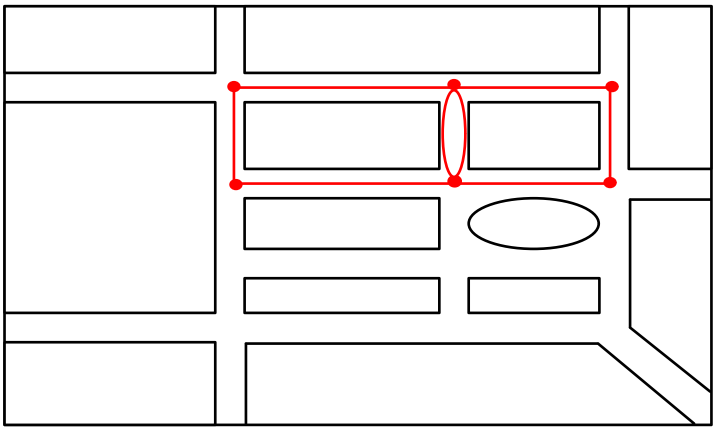

Figura 3a. Um grafo para representar as estradas a percorrer pelo polícia.

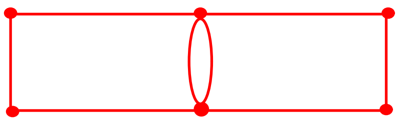

Figura 3b. O mesmo grafo.

Note-se que na Figura 3b, efectuámos uma simplificação ao nosso problema: desprezámos o comprimento das ruas e esquinas.

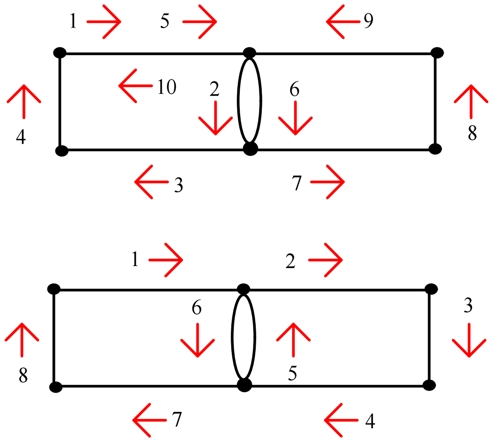

Figura 4. Dois percursos possíveis.

A Figura 4 mostra-nos dois percursos que o polícia pode tomar para efectuar o controlo. Em ambos os casos o ponto de partida coincide com o ponto de chegada. No entanto, a segunda possibilidade é melhor que a primeira uma vez que neste caso o polícia percorre cada passeio apenas uma única vez.

Definição 2: *Um percurso num grafo que:*
(i) começa e acaba no mesmo vértice;
(ii) percorre cada aresta uma única vez,
*é chamado um **circuito de Euler**.*

A segunda possibilidade da Figura 4 mostra-nos um circuito de Euler, enquanto que a primeira já não uma vez que, para esse percurso, a condição (ii) da definição anterior não se verifica.

Uma das primeiras descobertas da teoria dos grafos foi a de que existem grafos que não possuem quaisquer circuitos de Euler. Por exemplo, os grafos da Figura 5 não possuem circuitos de Euler.

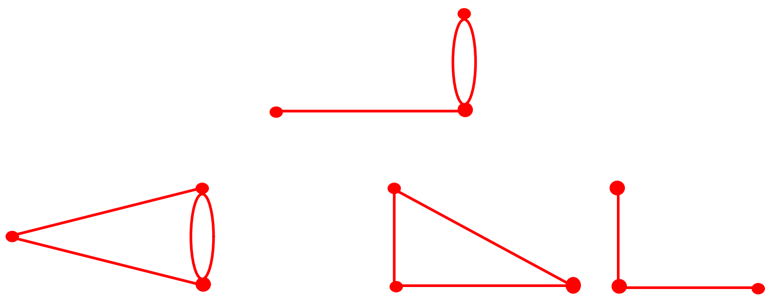

Figura 5. Grafos que não possuem circuitos de Euler.

3. Procurando circuitos de Euler

Agora que conhecemos as condições que um circuito de Euler deve satisfazer, surgem-nos duas questões óbvias:

1. Existe algum processo efectivo, sem ser por tentativa-erro, para dizer se um grafo particular possui um circuito de Euler?

2. Existe algum método, sem ser por tentativa-erro, para encontrar um circuito de Euler caso ele exista?

Euler respondeu a estas questões em 1735 usando duas noções fundamentais na teoria dos grafos: valência de vértices e grafos conexos.

Definição 3: *A **valência** de um vértice num grafo é dada pelo número de arestas que se encontram nesse vértice. Um grafo diz-se **conexo** se para cada par de vértices existe pelo menos um caminho de arestas que os une.*

Podemos agora estabelecer o teorema de Euler, a sua resposta simples ao problema de saber quando é que um determinado grafo G possui um circuito de Euler.

Teorema 1: *(i) Se G for conexo e possuir todos vértices com valência par, então G possui um circuito de Euler. (ii) De forma inversa, se G possuir um circuito de Euler, então G tem de ser conexo e todos os seus vértices têm valência par.*

Demonstração: (i) Consideremos um grafo G finito e conexo com todos os seus vértices com valência par. Comecemos o caminho num determinado vértice v e desloquemo-nos segundo uma aresta não usada para o próximo vértice até regressar de novo a v (note-se que tal facto é sempre possível uma vez que cada vértice onde chegamos pela primeira vez possui sempre uma saída, excepto o vértice v). Obtemos assim um circuito. Se todas as arestas forem usadas então obtemos um circuito de Euler. Se houve arestas não usadas, pela conectividade do grafo, a construção do caminho encontrou um vértice onde outra aresta podia ser tomada. Chamemos a esse vértice w. Podemos assim regressar a w e partir de w usando uma aresta que não foi usada previamente. Como o número de arestas que se unem em w é par, é possível regressar a w por outra aresta que não tinha sido tomada no caminho original. Se todas as arestas forem agora utilizadas encontramos um circuito de Euler partindo de v e procedendo como inicialmente até w, depois tomamos o caminho adicional que vai de w a w e regressamos a v como tínhamos inicialmente feito. Caso ainda sobrem arestas por percorrer, poderemos proceder como para w até acabar por percorrer todas as arestas.

(ii) Suponhamos agora que o grafo possui um circuito de Euler. Em cada vértice, este circuito deve chegar por uma aresta e partir por outra diferente. Assim o número de arestas que se ligam em cada vértice tem que ser par. e

Corolário 1: *Um grafo conexo possui um circuito de Euler se e só se for possível separar cada família de aresta em circuitos disjuntos.*

Corolário 2: *Um grafo conexo possui um caminho que percorre todas as suas arestas uma única vez se não possuir mais de dois vértices com valência ímpar.*

Uma vez determinada a existência de um circuito de Euler num determinado grafo, como encontra-lo? O conjunto de regras que Euler nos deu possuem um interesse teórico e poderão ter um interesse prático se for nosso objectivo programar um computador que encontre mecanicamente os circuitos de Euler num grafo. No entanto, não iremos estudar essas regras uma vez que a maioria dos seres humanos, com um pouco de prática, poderão encontrar circuitos de Euler num grafo por tentativa-erro, mesmo em grafos relativamente grandes.

Munidos agora com o teorema de Euler, vamos olhar de novo para o nosso problema de controlo dos parquímetros. A questão chave é: existe um circuito de Euler no grafo? Poderemos responder a esta questão analisando a conexão do grafo e a valência dos seus vértices. Facilmente se constata o grafo possui um circuito de Euler. O segundo percurso da Figura 4 é um exemplo possível.

4. Circuitos com arestas usadas mais do que uma vez

Vejamos agora o que é que o teorema de Euler nos diz em relação ao bairro de três blocos da Figura 6. Na Figura 7 poderemos ver o grafo correspondente (note-se que o passeio sem parquímetros não figura no grafo). Este grafo tem dois vértices com valência ímpar e, como tal, não existem circuitos de Euler para este grafo.

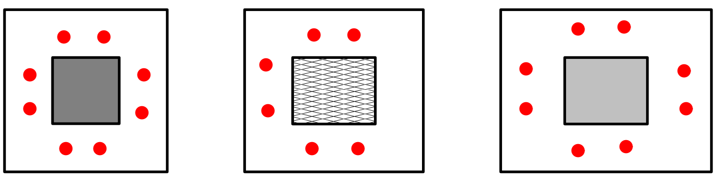

Figura 6. Bairro com três blocos.

Figura 7. Grafo correspondente à Figura 6.

Visto que temos que usar duas arestas do grafo mais do que uma vez se quisermos cobrir todas as arestas no nosso circuito, para uma maior eficiência deveremos tornar mínimo o número de repetições que iremos efectuar. Este tipo de problema é chamado muitas vezes o **problema do carteiro chinês**. No entanto, a teoria dos circuitos de Euler não lida directamente com arestas usadas mais do que uma vez ou arestas de diferentes comprimentos. Teremos de generalizar a teoria para nos ajudar na resolução do problema do carteiro chinês.

Num problema do carteiro chinês real, teremos que ter em conta o comprimento dos passeios, ruas, ou o que quer que as arestas do grafo representem visto que queremos minimizar o total do comprimento das arestas usadas mais do que uma vez. No entanto, vamos começar por simplificar as coisas supondo que as arestas são todas do mesmo comprimento. (Este problema é muitas vezes chamado o problema do carteiro chinês *simplificado*.) Neste caso temos apenas que contas as arestas que foram usadas mais do que uma vez e não determinar o seu comprimento. Assim, queremos encontrar o circuito que cobre cada aresta e tem o número mínimo de repetições de arestas já cobertas.

A nossa teoria baseia-se na seguinte ideia. Considere um grafo que não possui circuitos de Euler. Nesse caso proceda como se segue:

1. Adicione arestas, duplicando as já existentes, até obter um grafo que seja conexo e possua todos os seus vértices com valência par. Chamamos a este processo a **eulerização** do grafo uma vez que o grafo obtido possui um circuito de Euler.

2. Encontre um circuito de Euler no grafo eulerizado.

3. Trace esse circuito de Euler no grafo original (antes da eulerização), repetindo o uso de uma aresta sempre que o circuito no grafo eulerizado usa uma aresta adicional.

Agora que aprendemos a eulerizar, o próximo passo é tentar encontrar a melhor eulerização possível. Note-se que existem várias maneiras de eulerizar um grafo. É evidente que, de acordo com a simplificação feita ao nosso problema, encontramos a melhor eulerização se *procurarmos a eulerização com o menor número de arestas adicionais*. Este requisito extra torna o problema mais interessante mas também mais complicado. Para grafos de grandes dimensões, a melhor eulerização pode não ser óbvia. Poderemos experimentar algumas soluções e escolher a melhor de entre elas. No entanto, poderá haver uma outra solução melhor.

Existe um procedimento sistemático para encontrar a melhor eulerização num grafo mas é complicado. No entanto, com um pouco de prática, a maioria das pessoas pode encontrar a melhor, ou quase a melhor, eulerização usando o processo de tentativa-erro. Este procedimento é especialmente fácil para redes viárias rectangulares.

5. Circuitos mais complicados

A teoria que acabámos de expor tem muitas mais aplicações práticas do que o simples controlo dos parquímetros. Sempre que um serviço necessite de ser efectuado ao longo de ruas e estradas, a nossa teoria pode ajudar a fazer o trabalho de forma mais eficiente. Encontramos vários exemplos da aplicabilidade da teoria na colecta do lixo, verificação de contadores eléctricos, etc.

No entanto, cada um destes problemas possui os seus requisitos especiais que apelam a constantes modificações na teoria. Por exemplo, no problema da colecta do lixo, as arestas do nosso grafo representam estradas e não passeios. Se algumas estradas forem de sentido único, teremos que por setas nas respectivas arestas, obtendo assim um **grafo orientado (ou grafo direccionado)**. Os circuitos que procuramos têm que obedecer à orientação do grafo.

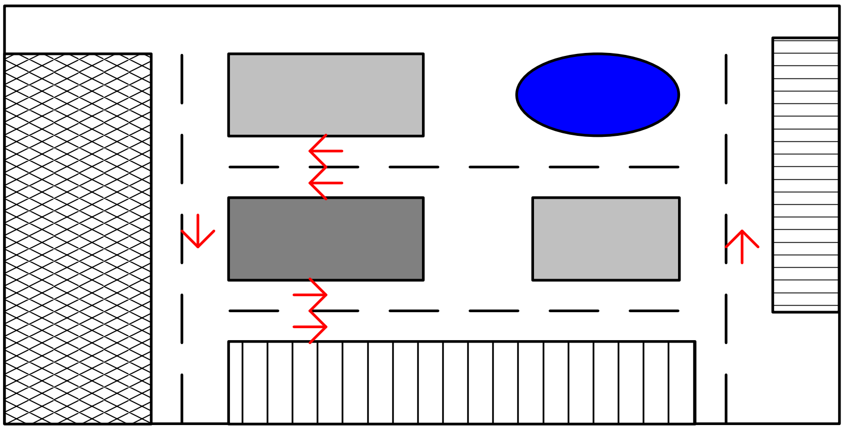

Figura 8. Problema da colecta do lixo.

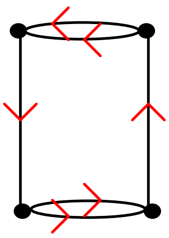

Figura 9. Grafo orientado.

No caso dos varredores de rua, o problema também pode ser modelizado por um grafo orientado. No entanto, existe uma complicação adicional: os carros estacionados. É difícil varrer as ruas com os carros estacionados. Assim, para uma melhor eficiência, são por vezes colocados sinais a especificar quando é que é proibido o estacionamento (por exemplo, às segundas quintas-feiras de cada mês entre as 20 horas e as 2 horas). Assim, neste problema, é importante não só encontrar o circuito de Euler, ou o circuito com o mínimo de duplicações, mas também o circuito que pode ser completo no tempo disponível. Mais uma vez, a teoria pode ser modificada para abarcar este problema.

Finalmente, uma vez que as cidades têm mais do que um varredor, ou camião do lixo, ou controlador de parquímetros, um único circuito não é suficiente. Assim, tem que se dividir o território em várias áreas cada uma a ser percorrida por um circuito. O objectivo genérico será encontrar as soluções óptimas tendo em conta a direcção do tráfego, o número de ruas, as restrições de tempo, etc.

Por exemplo, um estudo piloto efectuado em Nova York em 1970 a propósito dos varredores de rua, permitia poupar cerca de 1.5 milhões de dólares por ano! (Cerca de 225 mil contos.) No entanto a cidade nunca chegou a adoptar esse plano. Uma vez que os serviços prestados têm também que ser encarados de um ponto de vista político, muitos outros factores terão que se ter em linha de conta. Os sindicatos querem defender os empregos dos trabalhadores do município, os burocratas querem manter os orçamentos municipais altos, os políticos não querem ser acusados de medidas impopulares, etc. A cidade perdeu assim uma possibilidade de economizar 1.5 milhões de dólares.

Apesar da complicação dos problemas da vida real, a teoria dos grafos proporciona meios para melhor os entendermos. Os resultados obtidos poderão ter um efeito positivo não só a nível económico como também a nível do bem estar e organização da comunidade.

Problema de Hamilton

1. Visitando os vértices

Em 1859 o famoso matemático irlandês sir William Rowan Hamilton pôs no mercado um *puzzle* peculiar. Era construído por um dodecaedro regular. Cada um dos vértices do dodecaedro de

Hamilton estava marcado com o nome de uma cidade importante: Bruxelas, Cantão, Deli, Frankfurt, etc. O *puzzle* consistia em encontrar um caminho ao longo das arestas do dodecaedro por forma a passar por cada cidade apenas uma vez; algumas das primeiras cidades a serem visitadas eram estipuladas de avanço para tornar o problema mais aliciante. Como o dodecaedro era difícil de manobrar, Hamilton produziu uma versão deste jogo em que o dodecaedro era substituído por um grafo planar isomorfo. Não consta que o *Dodecaedro de Viagem* tivesse tido muito sucesso comercial.

Nos exemplos anteriores, vimos que é relativamente simples de determinar se existe um circuito que percorra as arestas de um grafo uma única vez. No entanto, a situação muda radicalmente se fizermos uma mudança aparentemente inócua ao problema: quando é que é possível encontrar um circuito num grafo ao longo das suas arestas que comece e acabe no mesmo vértice e visite cada vértice uma única vez?

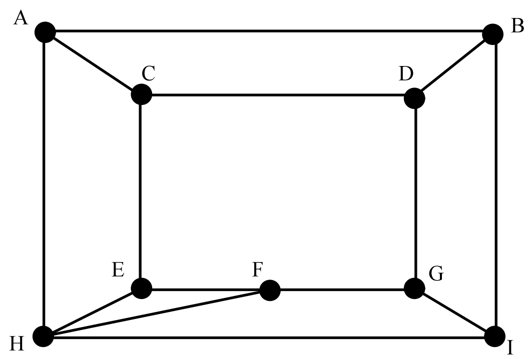

Figura 10. Grafo com vértices rotulados.

Por exemplo, na Figura 10, para obter um circuito que visite os vértices uma única vez poderemos considerar o circuito ABDGIHFECA.

Um circuito tal como o definido anteriormente é chamado **circuito Hamiltoniano**, uma vez que foi Hamilton, quem primeiramente estudou o conceito. (Sabemos agora que o conceito foi descoberto algum tempo antes por Thomas Kirkman, um ministro britânico com queda para a matemática.)

Os conceitos de circuitos de Euler e Hamiltonianos são similares naquilo que proíbem voltar a utilizar: nos circuitos de Euler as arestas, nos circuitos Hamiltonianos os vértices. No entanto, é muito mais difícil determinar quais são os grafos conexos que admitem um circuito Hamiltoniano do que determinar os grafos conexos que admitem um circuito de Euler. Vimos que, olhando para as valências dos vértices, é possível dizer se um grafo conexo admite ou não um circuito de Euler, mas não temos um método tão simples para nos dizer quando é que um grafo possui um circuito Hamiltoniano. Algumas classes especiais de grafos são conhecidas pelo facto de terem circuitos Hamiltonianos, e outras por não o terem, mas, como veremos, uma solução geral para este problema é pouco provável.

2. O problema do circuito Hamiltoniano

Apesar de apresentarmos o problema do circuito Hamiltoniano como uma variante do problema do circuito de Euler, ele possui muitas aplicações em problemas da vida real.

Suponhamos que as inspecções ou as entregas têm de ser feitas em cada vértice (em vez de ao longo de uma aresta) de um grafo. Um caminho "eficiente" no grafo consiste no caminho que passa por todos os vértices uma única vez; isto é, o caminho deverá ser um circuito Hamiltoniano. Tais caminhos são úteis para inspeccionar semáforos, ou para entregar o correio, especialmente encomendas postais de grandes dimensões, etc. Existem muitos exemplos similares, mas antes prosseguirmos com os problemas envolvendo aplicações dos circuitos Hamiltonianos, vamos estudar uma mais importante classe de problemas relacionados.

Suponhamos que é um professor que trabalha em Coimbra. Durante as férias da Páscoa você e um grupo de amigos decidem efectuar uma viagem de carro para visitar outros amigos em Lisboa, Évora e Viana do Castelo. Existem muitas escolhas possíveis no sentido de visitar as cidades de regressar a Coimbra, mas você quer escolher o caminho que minimize a distância que necessita de percorrer. (O problema possuía complicações adicionais se a viagem fosse feita em meios de transporte diferentes.)

Poderemos construir um modelo para a nossa viagem, representando cada cidade a visitar por um vértice de um grafo e o caminho entre cada uma delas por uma aresta. Para completar o modelo, adicionamos um número chamado o **peso** a cada aresta. O peso representa a distância (em quilómetros) que as separa as cidades representadas pelos vértices que se encontram na extremidade da aresta em causa, ver Figura 11.

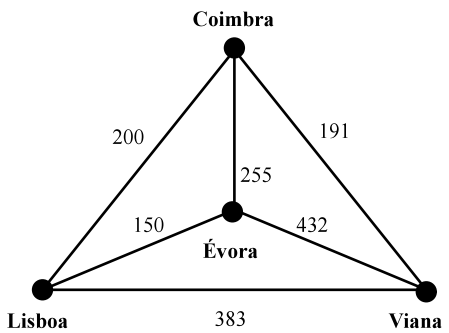

Figura 11. Plano de viagem.

Queremos encontrar o caminho de custo mínimo que começa e acaba em Coimbra e visita cada uma das outras cidades uma única vez. Usando a nossa terminologia anterior, queremos encontrar um **circuito Hamiltoniano de custo mínimo**.

Como poderemos determinar qual dos circuitos Hamiltonianos tem custo mínimo? Existe um algoritmo simples de conceber para este problema:

1. Construa os circuitos Hamiltonianos que começam em Coimbra.

2. Adicione as distâncias percorridas em cada aresta do circuito.

3. Escolha o caminho de distância mínima.

Os passos 2 e 3 do algoritmo são imediatos. Assim, temos que nos preocupar apenas com o primeiro, gerar circuitos Hamiltonianos de forma sistemática. Para encontrar circuitos Hamiltonianos vamos usar o **método das árvores**.

Definição 4: *Uma **árvore** é um grafo conexo sem circuitos.*

Partindo de Coimbra, poderemos escolher cada uma das três outras cidades para visitar em primeiro lugar. Esta primeira etapa da pesquisa de circuitos Hamiltonianos é ilustrada na Figura 12.

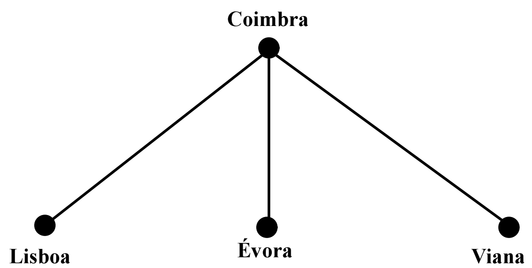

Figura 12

Se Lisboa for escolhida em primeiro lugar, então existem duas cidades que poderão ser visitadas depois, nomeadamente, Évora e Viana do Castelo. Nesta segunda etapa, no entanto, para cada escolha da cidade a visitar em primeiro lugar, existem duas escolhas desta cidade para a segunda cidade a visitar. Chegamos assim à árvore da Figura 13.

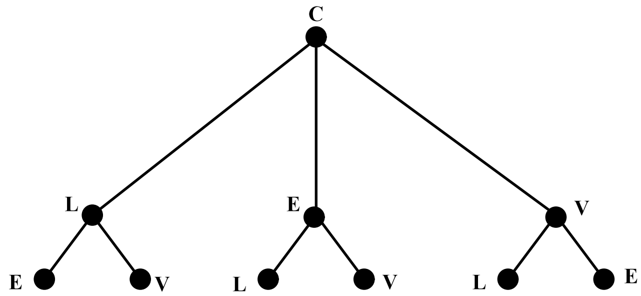

Figura 13

Escolhendo a ordem das primeiras duas cidades a visitar, e sabendo que num circuito Hamiltoniano as visitas não poder ser repetidas, ficamos apenas com uma escolha para a cidade que falta visitar. Desta cidade regressamos a Coimbra. A árvore completa de todos os circuitos possíveis é dada na Figura 14.

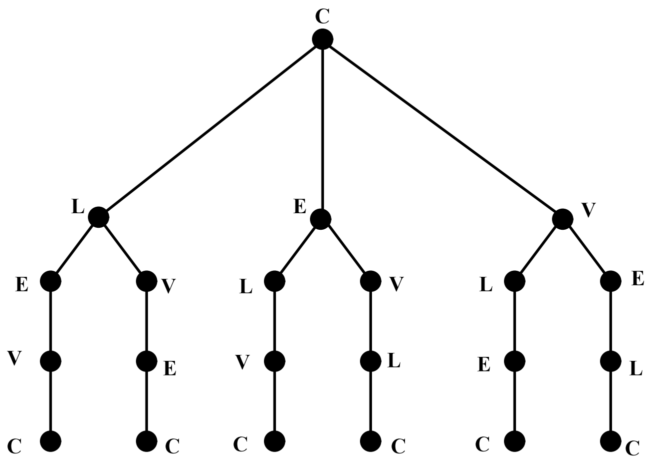

Figura 14

Note-se que, uma vez que poderemos percorrer um caminho circular em duas direcções distintas, os caminhos enumerados no diagrama da Figura 14 não correspondem a diferentes circuitos Hamiltonianos. Por exemplo, o caminho C-L-E-V-C e o caminho C-V-E-L-C representam o mesmo circuito Hamiltoniano. Para este problema, no entanto, encontrámos três circuitos Hamiltonianos distintos entre seis caminhos no diagrama da Figura 14.

Note-se ainda que, na construção dos circuitos Hamiltonianos, não considerámos as distâncias envolvidas. Estivemos apenas interessados nas diferentes hipóteses de fazer a visita. Mas qual é o percurso óptimo? Adicionando as distâncias entre as cidades chegamos facilmente à conclusão que o caminho óptimo é Coimbra, Lisboa, Évora, Viana do Castelo, Coimbra. Neste percurso percorremos 973 quilómetros.

O método das árvores nem sempre é tão fácil de usar como o nosso exemplo sugere. Em vez de fazermos a nossa análise para quatro cidades, consideremos o caso geral de n cidades. O grafo que modela o problema é similar ao da Figura 11 e consiste num grafo pesado com n vértices, com cada par de juntos por uma aresta. Um grafo nestas circunstâncias é chamado **completo** porque todas as arestas possíveis estão incluídas no grafo.

Quantos circuitos Hamiltonianos existem num grafo completo de n vértices? Poderemos resolver este problema usando o mesmo tipo de análise que efectuamos na contagem dos ramos da árvore. O método usa o chamado **princípio fundamental da contagem** ou **princípio da multiplicação**, que diz que existem a possibilidades de escolher uma opção, b possibilidades de escolher uma segunda opção a seguir à primeira, ... ,e z possibilidades de escolher o último item depois das escolhas precedentes, o número total de escolhas possível é: $a \times b \times \cdots \times z$.

Assim, a cidade a ser visitada depois da cidade de partida pode ser escolhida de $n-1$ maneiras, a cidade seguinte de $n-2$ maneiras, e assim sucessivamente até ficarmos apenas com uma escolha possível. Usando o princípio fundamental da contagem, existem $(n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ caminhos.

Pares de caminhos correspondem ao mesmo circuito Hamiltoniano uma vez que cada circuito pode ser percorrido em dois sentidos diferentes. Assim existem $(n-1)!/2$ circuitos Hamiltonianos. Por exemplo, para 6 cidades necessitamos de analisar 60 circuitos. No entanto, para 25 cidades o número de circuitos a analisar é de aproximadamente 3×10^{23}. Mesmo que esses circuitos pudessem ser gerados à velocidade de um milhão por segundo, demoraríamos dez milhares de milhão de anos para os gerar a todos!

Se o único benefício for poupar dinheiro e tempo num plano de férias, a dificuldade de resolver problemas para grandes valores de n não nos trará grande preocupação. No entanto, o problema que temos vindo a discutir é um dos problemas mais comuns de um ramo da matemática chamado investigação operacional. É usual chamar-lhe o **problema do caixeiro-viajante** devido á sua primeira formulação: determinar a viagem de custo mínimo que o vendedor deve efectuar para visitar todas as cidades no seu território de vendas, começando e acabando na mesma localidade.

Existem muitas situações que requerem a solução de um problema do caixeiro-viajante:

1. Um pescador de lagostas montou várias armadilhas em diversos locais e quer efectuar a recolha.

2. A companhia de telefones quer recolher as moedas das diversas cabinas telefónicas existentes.

3. Um *robô* que efectua furos numa série de placas deverá estabelecer uma ordem predeterminadas.

O significado do custo varia de problema para problema. Podemos medir esse custo em termos de tempo, distância, custo de gasolina, ou em termos de qualquer outro factor que possa ser optimizado.

Muitas vezes, o problema do caixeiro-viajante aparece como um subproblema de um problema mais complicado. Por exemplo, uma cadeia de supermercados pode ter um número muito elevado de lojas para ser abastecidas de um único armazém central. Se existirem menos camiãos que lojas, as lojas devem ser agrupadas por forma a que cada camião abasteça um determinado grupo. Se agora resolvermos um problema do caixeiro-viajante para cada camião, poderemos minimizar as despesas da cadeia de supermercados.

3. Estratégias para resolver o problema do caixeiro viajante

Visto que o problema do caixeiro-viajante aparece em muitas situações onde o grafo completo seria muito grande, temos que encontrar um método melhor que o método de "força bruta" que acabámos de descrever. Teremos que olhar para o nosso problema original na Figura 11 e tentar encontrar um algoritmo alternativo para o resolver. Recordemos que o nosso objectivo é o de encontrar um circuito Hamiltoniano de custo mínimo.

Experimentemos uma nova alternativa: Partindo de Coimbra, visitemos primeiro a cidade mais próxima, depois visitemos a cidade mais próxima que ainda não foi visitada. Regressaremos à cidade de partida quando já não possuirmos mais nenhuma escolha possível. Este algoritmo é conhecido como o **algoritmo do vizinho mais próximo**. Aplicando este algoritmo à situação concreta da Figura 11, chegamos facilmente ao circuito Coimbra, Viana do Castelo, Lisboa, Évora, Coimbra, com o comprimento de 979 quilómetros. O algoritmo do vizinho mais próximo é um exemplo de um algoritmo "avarento", visto que em cada etapa escolhe a melhor escolha (a que lhe permite poupar mais), baseada num critério apropriado. Infelizmente, como vimos anteriormente, este não é o circuito óptimo. Efectuando a melhor escolha em cada situação poderemos não ser conduzidos à melhor solução global. No entanto, mesmo para problemas do caixeiro viajante de grandes dimensões poderemos encontrar a opção dada pelo algoritmo do vizinho mais próximo rapidamente.

Apesar de muitos métodos "rápidos e sujos" terem sido sugeridos para resolver o problema do caixeiro viajante e apesar de alguns deles poderem pontualmente atingir a solução óptima, nenhum desses métodos garante a optimalidade da solução. Surpreendentemente, a maioria dos especialistas acredita que não é possível obter um método eficiente que garanta a optimalidade da solução. Estes problemas são chamados **problemas NP-completos**.

Recentemente, os investigadores matemáticos adoptaram uma estratégia diferente para encarar o problema do caixeiro viajante. Se encontrar um algoritmo rápido que garanta a optimalidade da solução é pouco provável, talvez se consiga mostrar que os métodos "rápidos e sujos", normalmente chamados **algoritmos heurísticos**, nos dão uma solução próxima da solução óptima. Por exemplo, suponhamos que provávamos que a heurística do vizinho mais próximo nunca se afasta da solução óptima mais do que 25% no pior dos casos ou mais de 15% para a média dos casos. Para um problema do caixeiro viajante de tamanho médio, teremos que equacionar as perdas de tempo (ou dinheiro) na pesquisa da solução óptima com as perdas que resultam da escolha da heurística dada. Investigadores do AT&T Bell Laboratories nos Estados Unidos desenvolveram muitos algoritmos heurísticos surpreendentemente bons. A melhor garantia existente para um algoritmo heurístico para o problema do caixeiro viajante é a de que o custo da solução dada pela heurística não é pior do que 1.5 vezes o custo dado pela solução óptima. O que é curioso é que esta heurística envolve a resolução de um problema do carteiro chinês como parte do algoritmo e para o qual se conhecem algoritmos "rápidos".

Referências

1. COMAP, For All Pratical Purposes; Introduction to Contemporary Mathematics, Freeman and Co, New York, 1988.

2. Marshall, C., Applied Graph Theory, Wiley, Toronto, 1971.

3. Ore, O., Graphs and Their Uses, Math. Assoc. America, 1990.

4. Wilson, R., Introduction to Graph Theory, Logman, London, 1972.

CAPÍTULO 4. SUCESSÕES E SÉRIES

Um pouco de história

1. Preocupações fundamentais

A actividade do homem, quer seja considerada do ponto de vista individual, quer do ponto de vista social, exige um conhecimento, tão completo quanto possível, do mundo que o rodeia.

Não basta conhecer os fenómenos, determinar as razões da sua produção, descortinar as ligações de uns com os outros. Nisto, na investigação do "como?" do "porquê?" se distingue fundamentalmente a actividade do homem da dos outros animais.

Pensando o Universo e procurando compreender os fenómenos, descobrir as suas *razões* e *ligações*, os primeiros pensadores foram levados a pôr as seguintes questões fundamentais.

1. A natureza apresenta-nos diversidade, pluralidade: de aspectos, formas, propriedades, etc. *Existe, no entanto, para além dessa diversidade aparente um princípio único, ao qual tudo se reduza?*

2. *Qual é a estrutura do Universo? Como foi criado? Como se movem os astros e porquê?*

Destas questões interessa-nos principalmente aqui, por se ligar mais directamente com o nosso assunto, a primeira.

2. Os filósofos jónicos

As primeiras respostas à primeira pergunta foram dadas pelos filósofos das colónias jónicas da Ásia Menor - Mileto principalmente. Para *Thales de Mileto* (que viveu, aproximadamente, de 624 a 548 a.C.) é a *água* esse elemento único: "Tudo é água!".

Para *Anaximandro de Mileto*, contemporâneo de Thales (viveu, aproximadamente, de 611 a 545 a.C.) existe também uma substância primordial mas que não é, como a de Thales, conhecida de todos; essa substância é *infinita* e *indeterminada*; as coisas materiais formam-se por determinações parciais desse elemento fundamental - *o indeterminado*. O indeterminado é, para Anaximandro, "sem morte e sem corrupção", "começo e origem do existente".

Anaxímenes de Mileto, contemporâneo de Thales e Anaximandro, admite também a existência de uma substância primordial que não é, porém, indeterminada, se bem que infinita: é o *ar*.

A cidade de Efeso era também uma colónia jónica do litoral da Ásia Menor. Lá nasceu, pelo ano de 530 a.C., o filósofo *Heraclito*. À pergunta que nos está ocupando, deu ele uma resposta profundamente original, muito diferente da dos filósofos que o precederam e seguiram. Enquanto que, para os filósofos jónicos, a explicação se baseia na existência de uma substância primordial, permanente, para Heraclito o aspecto essencial da realidade é a *transformação* que as coisas estão permanentemente sofrendo pela acção do fogo. O mundo de Heraclito era um mundo *dinâmico*, da transformação incessante, do *devir*.

3 A resposta pitagórica

Pitágoras de Samos (Samos é o nome de uma ilha do Mar Egeu) é um filósofo que parece ter vivido entre os anos 580 e 504 a.C.. Da sua vida pouco se sabe ao certo, a despeito de toneladas de tinta que, com maior ou menor fantasia, têm corrido acerca da sua vida e da sua acção. É no entanto seguro que, a partir do século VI a.C., existiu e exerceu larga influência na Grécia uma seita, de objectivos místicos e científicos, denominada *escola pitagórica*; dela parece ter sido Pitágoras o fundador. Será sempre ao conjunto de ideias que caracterizavam essa seita que nos referiremos quando empregarmos o nome de Pitágoras.

O que distinguia, em relação à questão que estamos a estudar, a escola pitagórica? A resposta dada por ela, profundamente original também, distinguia-se de todas as anteriores por esta característica fundamental: o motivo essencial da explicação racional das coisas, via-o Pitágoras nas diferenças de *quantidade* e de *arranjo de forma*; no *número* e na *harmonia*. Um dos mais destacados representantes da escola, *Filolao*, afirma: "todas as coisas têm número e nada se pode compreender sem o número".

Desta ideia grandiosa - que as leis matemáticas traduzem a harmonia universal - os pitagóricos apresentavam uma multidão de justificações, que iam do campo do campo da Geometria ao da Música. No entanto, o próprio brilhantismo dos triunfos parece ter sido prejudicial ao equilíbrio da escola pitagórica como conjunto de doutrina. Da afirmação, bela e fecunda, da existência duma *ordenação matemática do Cosmos* - todas as coisas têm um número - fez-se esta outra afirmação, bem mais grave e de difícil verificação - *as coisas são números*.

Para a apoiar, houve que, fora da experimentação e da verificação, procurar uma estrutura da matéria idêntica à estrutura numérica. Tal procura parece ter cristalizado na afirmação seguinte: que a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos - *mónada* - era assimilado à unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por *quantidade e arranjo de mónadas* como os números de formam por *quantidade e arranjo de unidade.* Uma consequência imediata de tal pensamento era o atribuirem virtudes especiais aos números, uma vez que eles eram o princípio de tudo.

Em resumo, poderemos dizer que a escola pitagórica nos apresenta um lado positivo e um lado negativo. Constitui o lado positivo a sua aspiração para a inteligibilidade, emitindo a ideia grandiosa da *ordenação matemática do Cosmos* e dando uma primeira realização dela por algumas leis matemáticas notáveis. Forma o seu lado negativo tudo aquilo que aos números se atribui fora da sua propriedade fundamental de traduzir relações de quantidade.

A escola pitagórica devia receber em breve um desmentido brutal à afirmação que constituía o seu lado positivo e a sua aspiração mais nobre. A natureza das coisas quis que fosse precisamente através da mais bela das suas conquistas - o teorema de Pitágoras - que esse desmentido houvesse de ser pronunciado. O pensamento pitagórico, assente na teoria das mónadas e, consequentemente, nos números racionais, sofreu uma ferida de morte no dia em que foi descoberto a incomensurabilidade dos segmentos. Era tudo, até os mais ínfimos fundamentos da teoria, a ameaçar uma ruína estrondosa! Como sair deste passo difícil?

Vários indícios posteriores mostraram que a primeira reacção foi a de esconder o caso. Uma outra tentativa de fuga parece ter residido numa vaga esperança de que, considerando como infinito - um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um *muito grande*, do que propriamente o infinito moderno - o número das mónadas que formavam um segmento de recta, talvez a dificuldade desaparecesse. Efectivamente, a demonstração mais antiga da incomensurabilidade baseava-se, no fundo, em que o número não pode ter ao mesmo tempo as duas paridades (recordemos a demonstração clássica do facto de $\sqrt{2}$ ser um número irracional.). Mas se esse número fosse infinito, o argumento teria a mesma força? Não estaria aí uma escapatória de recurso?

Isto não é uma simples conjectura; o desenvolvimento posterior do movimento filosófico e a polémica viva que aparece, logo a seguir, sobre o tema do infinito combinado com as afirmações dos pitagóricos, mostram claramente o caminho que as coisas seguiram. Essa polémica foi conduzida principalmente por uma nova escola filosófica - a *escola de Elea*.

4. A crítica eleática

Elea, em latim *Velia*, era uma cidade da costa ocidental da Itália do Sul que constituía, pelos meados do século VI a.C., uma das muitas colónias gregas na Itália, colónias essas cujo conjunto era designado por Grande Grécia.

Em Elea nasceu, não se sabe ao certo quando, mas provavelmente entre 530 e 520 a.C., um filósofo - *Parménides* - que, primeiramente ligado à escola pitagórica, se havia em breve de separar dela, procedendo a um exame crítico de todas as noções e concepções filosóficas que até aí tinham sido emitidas. Não podemos dar aqui um apanhado sequer, da construção de *Parménides de Elea*; a sua crítica levantou alguns dos problemas mais importantes da que a história da filosofia e da ciência dá conta, em todos os tempos.

Na construção de Parménides há muita coisa dirigida contra os pitagóricos. Em primeiro lugar, ao defender características como a *homogeneidade* e *continuidade*, opõem-se, de todo em todo, à construção pitagórica das mónadas. A polémica foi violenta; dela restam-nos, conservados por *Aristóteles*, alguns *argumentos de Zenão de Elea*, o mais notável discípulo de Parménides.

Diz Zenão: "como querem que a recta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa afirmação fundamental de que todas as coisas têm um número. Com efeito, entre dois corpúsculos, 1 e 2, deve haver um espaço - se estivessem unidos, em que se distinguiam um do outro? - e esse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores concebíveis; logo, entre os dois posso intercalar um corpúsculo, 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3, e outro entre 3 e 2, nas mesmas condições. Posso repetir o raciocínio indefinidamente e fico, portanto, com a possibilidade de meter entre 1 e 2 quantos corpúsculos quiser. Qual é então o número que pertence ao segmento que vai de 1 a 2?"

O que Zenão fundamentalmente quer dizer com este argumento é o seguinte: o corredor, antes de atingir a meta, tem de atingir o ponto intermédio do percurso e, para conseguir isto, gasta um tempo finito. Tem, depois, que alcançar o ponto médio da distância restante, no que demorará também um tempo finito. Tem, depois, que alcançar o ponto médio da distância restante, no qual demorará também um tempo finito. Ora, *o que uma vez foi dito, pode repetir-se sempre*. O número de fases do percurso da corrida é infinito, e cada uma dessas fases exige um tempo finito. Mas a soma de um número infinito de intervalos finitos, é infinita, e por isso o corredor nunca atingirá a meta.

Como se vê, é a própria afirmação fundamental da escola pitagórica que está batida em cheio pela argumentação de Zenão. Mas esta argumentação vai mais longe devastando progressivamente a construção e levantando, de cada vez, novos problemas.

A escola eleática fora duramente criticada por estabelecer a *imobilidade* como uma das características de *existente* - há coisa mais real e segura do que o movimento do mundo? Zenão responde: "não se trata de saber se há ou não há movimento no mundo, mas de saber se ele é compreensível, isto é, compatível com a explicação racional que damos do Universo. Nós, eleatas, *não o compreendemos, não conseguimos pô-lo de acordo com o resto da explicação racional*, mas vós, pitagóricos, julgais compreender e nadais apenas em contradições. Uma de duas: num segmento de recta ou há um número finito de mónadas ou uma infinidade. Vejamos o primeiro caso; considerai uma flecha em movimento percorrendo esse segmento de recta; em cada instante, a ponta da flecha ocupa um lugar, a localização duma mónada. O que se passa entre um lugar e o seguinte? Nada! Porque, não havendo nada entre duas mónadas consecutivas não podeis dizer-me alguma coisa sobre um movimento que se realize onde nada existe; conclusão: - o movimento da flecha é uma sucessão de imobilidades! Percebeis?

Consideremos agora o segundo caso: há uma infinidade de mónadas; então o movimento é igualmente inconcebível. Suponhamos que dois móveis - Aquiles e Tartaruga - partem ao mesmo tempo, um (Aquiles) de uma posição e o outro (Tartaruga) com um avanço de 100 unidades. Suponhamos que a velocidade de Aquiles é dez vezes superior à da Tartaruga. Assim, quando Aquiles percorre 100 unidades, a Tartaruga percorre 10, após Aquiles ter andado 10 unidades, a Tartaruga andou uma, etc, estando sempre a Tartaruga adiante de Aquiles e este aproximando-se sem nunca a alcançar. Como se percebe então que Aquiles possa alcançar a Tartaruga?"

Zenão é o homem que aparece, de picareta na mão, a arrasar toda a fachada da escola pitagórica uma vez que o seu interior, como atrás foi dito, já há muito se encontrava em ruínas.

5. Os dois horrores

A evolução da ciência grega mostra claramente quão profunda foi a influência que a crise, aberta pelas teses de Zenão, produziu no pensamento matemático dos helenos.

Essa mesma crise iniciou, por seu lado, uma era de consciencialização. Foi a reacção natural contra a verborreia ingénua dos pitagóricos, aquela estranha mistura de ideias matemáticas com máximas religiosas e vagas especulações metafísicas. Que contraste entre isto e o severo rigor dos *Elementos* de Euclides, que até à bem pouco tempo serviram de modelo às disciplinas matemáticas!

Por outro lado, ao instalarem no espírito dos geómetras gregos o *horror infiniti*, as teses tiveram o efeito de uma paralisia parcial da sua imaginação criadora. O infinito era um tabu que tinha que se evitar a todo o preço; ou, pelo menos, era preciso disfarça-lo por meio de argumentos *ad absurdum* ou semelhantes. Em tais condições não só se tornou impossível uma teoria positiva do infinito, como se paralisou quase por completo o desenvolvimento dos processos infinitos que havia alcançado uma fase avançada nos tempos que precederam Platão.

Abandonou-se também por completo as concepções dinâmicas, sempre que tal fosse possível. A matemática grega é invadida pelo *horror do movimento*.

Encontramos na Grécia clássica um conjunto de circunstâncias especialmente felizes: uma série de génios de primeiro plano, Eudoxo, Aristarco, Euclides, Arquimedes, Apolónio, Diofanto, Papo; um corpo de tradições que encorajava o esforço criador e o pensamento especulativo, fomentando ao mesmo tempo o espírito crítico que punha o investigador a salvo de uma imaginação ambiciosa; e, finalmente, uma estrutura social particularmente propícia ao desenvolvimento de uma classe despreocupada, formadora de uma corrente ininterrupta de pensadores que se podiam devotar às ideias sem preocupações de utilitarismo - um conjunto de circunstâncias, na verdade, que não voltou a ser igualado nem mesmo nos nossos dias. Não obstante, os matemáticos gregos não chegaram a construir uma álgebra apesar de terem Diofanto, não chegaram a construir uma geometria analítica apesar de terem Apolónio, não chegaram a construir uma análise infinitesimal apesar de terem Arquimedes. Já tínhamos feito notar em que medida a falta de uma notação simbólica frustou o desenvolvimento da matemática grega; o horror do infinito foi um dissuasor igualmente poderoso.

6. O contributo de Arquimedes

No método da exaustão, possuía Arquimedes todos os elementos essenciais para uma análise infinitesimal, porque a análise moderna é apenas a teoria dos processos infinitos que, por sua vez, têm por base a ideia de *limite*. Essa ideia, tal como a concebeu Arquimedes, era já adequada para a desenvolvimento de cálculo de Newton e Leibniz e que se manteve praticamente inalterada até aos tempos de Weierstrass e Cantor. Com efeito, *o cálculo dos limites* baseia-se na noção de que duas grandezas variáveis se aproximam do estado de igualdade quando a sua diferença se puder tornar tão pequena quanto se queira. e é esta mesma ideia que constitui a base do *método da exaustão*.

Além disso, o princípio faculta um método efectivo para determinar o limite, método esse que consiste em "apanhar" a variável entre duas outras, como entre duas maxilas de um torno. Tal é o caso do perímetro da circunferência, em que Arquimedes encaixa aquela linha entre duas séries de polígonos de número de lados crescente, sendo uma das séries circunscrita e a outra inscrita à circunferência. Ainda por este processo verificou que a área limitada por um arco de parábola é equivalente a dois terços da área de um rectângulo com a mesma base e a mesma altura - problema que foi o precursor do nosso cálculo integral moderno.

Sim! Com toda a justiça se deve dizer que Arquimedes foi o fundador da análise infinitesimal. O que faltou ao método da exaustão para ser o cálculo integral do século XVIII, foi um simbolismo adequado, e uma atitude positiva - ou ingénua - em relação ao infinito. Mas nenhum grego seguiu as pisadas de Arquimedes, e deixou para outra época a tarefa de explorar o rico território descoberto pelo grande mestre.

7. Necessidade de um novo conceito

Vimos que, qualquer que tenha sido o objectivo inicial de Zenão, a sua argumentação ficou na História da Ciência com um valor inestimável - mostrar-nos que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considera-lo assim, equivale a abordar o seu estudo por um método estático que traz consigo o germe da infecundidade e incompreensão.

Na verdade a essência do movimento é tal que, quando vamos a queres fixar a posição de um móvel, em determinado instante, num ponto da sua trajectória, ele já aí não se encontra. Desse fenómeno se pode dizer, como *Leonardo da Vinci* disse da chama - "olha para a chama e considera a sua beleza; fecha os teus olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já não o encontras".

Reconhecemos aí um permanente compromisso entre o *ser* e o *não ser* - a cada instante o móvel *está* e *não está* em determinado ponto; e entre ponto e ponto, por mais próximos, há uma infinidade de pontos! Tudo isto é inabordável, pelo método estático que considera o movimento como uma sucessão de estados do móvel.

Vamos então para o estudo do problema do movimento nesta nova atitude, livres de preconceitos, dispostos a aceitar todas as consequências e a tomar todas as audácias.

O que se passa? Que natureza do fenómeno é tal que, como dissemos acima "a cada instante o móvel *está* e *não está* em determinado ponto; e entre ponto e ponto, por mais próximos, há uma infinidade de pontos"?

Que quer isto dizer? Que não podemos obter resultados, em qualquer instante ou ponto, se o tomarmos em si, isolado dos outros pontos; que o que se passa num instante e num ponto só pode ser entendido integrado na sua interdependência com o que se passa em instantes e pontos que o precedem e seguem. Mas este preceder e seguir tem o carácter subtil de que não há ponto que preceda ou siga imediatamente outro - entre os dois, por mais próximos, há uma infinidade de possibilidades que contam na interdependência. De modo que não poderemos certamente obter resultados no estudo do fenómeno com a ajuda simples de números a marcar posições de precedência ou sequência entre instantes ou pontos. Mas a condição primeira do êxito á precisamente que isso aconteça! Que fazer? Só um novo conceito.

8. Os moldes do novo conceito

O que está dito esclarece-nos suficientemente acerca das duas condições a que deve obedecer esse conceito. Ele deve ser de natureza a permitir que se dê conta da infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer; de natureza a permitir-nos trabalhar, não só com estados determinados, mas também com a *infinidade de possibilidades* entre dois estados.

Não pode, por consequência, ser um número, mas há-de poder representar qualquer dos números dum conjunto numérico conveniente - *o novo instrumento matemático deve ser portanto uma variável.*

Por outro lado, como este instrumento vai ser aplicado ao estudo do que se passa num ponto de interdependência com pontos *arbitrariamente próximos*, essa variável deve ter no seu domínio números arbitrariamente pequenos em módulo. E assim surge, forjado no âmago da grande dificuldade, o *conceito de infinitésimo*.

Este conceito, na sua origem, estava carregado de contradições. Os seus mentores, Kepler e Cavalieri, foram seguidos, unicamente com algumas pretensões de refinamento, por Newton e Leibniz, por Wallis (o inventor do símbolo do infinito), pelos quatro Bernoulli, por Euler, por d'Alambert, entre outros. Consideravam os infinitésimos fixos ou variáveis de acordo com as exigências das teses; manipulavam as séries infinitas sem leis e sem regras; faziam prestidigitação com os limites; tratavam as séries divergentes como se elas obedecessem a todas as regras da convergência. Definiam termos de forma vaga, usavam os seus métodos livremente e a lógica dos fundamentos era feita de modo a ajustar-se ao que a intuição lhas ditava. Romperam, em suma, com todas as leis do rigor e do decora matemático.

A verdadeira orgia que se seguiu à introdução dos infinitésimos, ou dos *indivisiblia* como se lhes chamava, não foi senão uma reacção natural. A intuição estivera durante muito tempo encarcerada pelo severo rigor dos gregos e agora que se quebraram as cadeias não havia nenhum Euclides que dominasse o seu voo romântico.

Mas ainda se pode entrever outra causa. Devemo-nos lembrar que os espíritos brilhantes deste período foram educados na doutrina da escolástica. Foi com relutância que Kepler se dedicou à astronomia depois de ter visto frustradas as suas esperanças de ser padre; Pascal esqueceu as matemáticas para se tornar recluso religioso; a simpatia de Descartes por Galileu era temperada pela sua fé na autoridade da igreja (a fé católica de Galileu era pelo menos tão grande como a de Descartes). Newton, entre as suas obras-primas, escrevia textos sobre teologia; Leibniz sonhava com esquemas numéricos que tornassem o mundo livre para o cristianismo.

Um quarto de século após a publicação da memorável obra de Newton sobre o cálculo infinitesimal, o Bispo de Berkley escreveu um folheto intitulado: "O Analista; um Discurso Dirigido a um Matemático Infiel". Acerca da controvérsia que girava em torno de muita coisa se tornar como dogma em questões de religião, replica mostrando que as premissas da matemática não se apoiavam em bases mais seguras. Com habilidade e agudeza de espírito inimitáveis, submete a doutrina dos infinitésimos a uma análise severa e revela um grande número de teses inconsistentes, afirmações vagas e flagrantes contradições. Entre elas se contam os termos "fluxão" e "diferença" que o Bispo fulmina com o seu esplêndido humor irlandês: "Aquele que puder digerir uma segunda ou terceira fluxão, uma segunda ou terceira diferença, não tem, creio eu, que ter escrúpulos a respeito de nenhum mistério da Divindade".

Às "fluxões" de Newton, às "diferenças" de Leibniz, chama-se hoje *derivadas* e *diferenciais*. São os conceitos duma disciplina matemática que, juntamente com a geometria analítica, se tornou um poderoso factor de desenvolvimento das ciências aplicadas: o *Cálculo Diferencial e Integral*. Atribui-se a Descartes a criação da geometria analítica; a questão de ter sido Newton ou Leibniz quem primeiro concebeu o cálculo, arrastou-se por todo o século XVIII e ainda hoje não se extinguiu. Entretanto, encontramos os princípios destas duas disciplinas claramente indicados numa carta que Fermat dirigiu a Roberval em 22 de Outubro de 1636, um ano antes da publicação da *Geometria* de Descartes e 68 anos antes dos *Principia* de Newton. Se não fora o inexplicável costume de Fermat de não publicar os resultados das suas pesquisas, a criação da geometria analítica e do cálculo teria de ser creditada a este Arquimedes da Renascença, e ter-se-ia poupado o mundo matemático à humilhação de um século de controvérsia grosseira.

9. A definição de infinitésimo

Neste ponto não definiremos rigorosamente todos os conceitos que iremos trabalhar uma vez que tais definições são sobejamente conhecidas de todos.

Definição: *Dado um ponto P e um número $\delta > 0$, chama-se* ***vizinhança*** *de centro P e raio δ a todo o segmento de recta centrado em P cujo amplitude é 2δ.*

Definição: *Dá-se o nome de* ***infinitésimo*** *a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando, para essa variável, considerarmos sucessivamente os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tais que, a partir de uma certa ordem p, todos os valores $|x_n| < \delta$, para todo o $n > p$ e todo o $\delta > 0$.*

Para ver como o conceito dado se molda de facto ao estudo de problemas como o que nos está a ocupar, seja *x* a variável real, infinitésima no sentido apontado, e consideremos a trajectória de um móvel, e nela um ponto *O*. Sejam sobre essa trajectória, os pontos *P* e *P'* cuja distância ao ponto *O*, em valor absoluto, é δ; por mais próximo que *P* seja de *O*, isto é, por mais pequeno que seja o número δ, no domínio do infinitésimo *x* há uma infinidade de números mais pequenos que δ. Portanto, ao trabalhar com o infinitésimo *x* equivale a trabalhar com a infinidade de pontos entre *P* e *P'*, pois todos eles têm distâncias a *O* que são, em valor absoluto, menores que δ.

Note-se ainda que *vizinhança* não é um segmento mas sim uma *variável* cujo domínio é constituído por uma infinidade de segmentos onde há sempre segmentos de amplitude inferior a qualquer número positivo.

O conceito geométrico de vizinhança corresponde portanto ao conceito analítico de infinitésimo e, por meio deste, podemos estudar o que se passa na vizinhança de pontos, isto é, ver como joga, no fenómeno a estudar, a interdependência dum ponto com os seus vizinhos; é esse como vimos acima o nosso objectivo.

Estamos portanto de posse do instrumento próprio ao fim em vista. Resta-nos agora afina-lo, de modo a tirar dele o maior rendimento. No entanto, não nos podemos esquecer nunca da sua essência: *um infinitésimo não é um número, é uma variável.* A falta de compreensão deste facto foi origem durante muito tempo de enormes discussões e muita confusão.

O conceito de limite

1. O processo serial

Uma sucessão é racional se todos os seus termos forem números racionais; é infinita se cada um dos seus termos tiver um sucessor. A um conjunto de operações que gera uma sucessão infinita, chamaremos *processo infinito*.

O protótipo de todos os processos infinitos é a repetição. Na verdade o conceito de infinito resulta da noção de que *o que uma vez foi dito ou feito, pode repetir-se sempre*. Quando se aplica a repetição a um número racional *a*, obtém-se a sucessão

$$a, a, a, a, ...$$

Diremos que esta sucessão *representa* o número *a*.

Outra operação fundamental, a que chamarei *processo serial*, á a adição sucessiva. Dada a sucessão

$$a, b, c, d, e, f, g, ...,$$

o processo serial gera uma nova sucessão

$$a, a+b, a+b+c, a+b+c+d, ...$$

que chamaremos a sucessão gerada pelas somas parciais de uma nova entidade analítica, que chamaremos *série*, definida como sendo a soma de todos os elementos da sucessão inicial. Desta forma, da sucessão *1, 1, 1, ...* obtemos a sucessão natural *1, 2, 3, 4, ...*.

O processo serial pode aplicar-se, evidentemente, a qualquer sucessão, e, por conseguinte, a cada sucessão corresponde uma série e uma outra sucessão constituída pelas somas parciais da série (sucessão essa a que, caso não haja ambiguidade, também chamaremos série). Da maior importância são as séries geradas por *sucessões evanescentes*, sucessões estas que se caracterizam pela diminuição gradual dos termos sucessivos de forma a que é possível "avançar" ao longo dela até encontrar termos inferiores a qualquer número dado.

A partir de duas sucessões quaisquer, pode formar-se uma terceira sucessão, subtraindo uma da outra, termo a termo. Pode suceder que a *sucessão diferença* assim obtida seja evanescente. Às duas sucessões cuja diferença é evanescente chamaremos *assimptóticas*. Caso uma delas seja uma sucessão de repetição de um número *a*, diremos que a outra, assimptótica em relação à primeira, também representa o número *a*, ou que *tende para a*, ou *que tem como limite a*.

Por exemplo, o número dois admite uma infinidade de representações por meio de sucessões racionais, como

$$1,9,1.99,1.999,1.9999,\ldots$$
$$2.1,2.01,2.001,2.0001\ldots$$
$$1\frac{1}{2},1\frac{2}{3},1\frac{3}{4},1\frac{4}{5},\ldots$$

O mesmo se aplica a qualquer número racional. Em especial, pode considerar-se a sucessão evanescente como uma representação do número racional 0.

2. Sucessões aritméticas e geométricas

Os tipos mais simples de sucessões são as *sucessões aritmética* e *geométrica*. Tendo-se tomado um dado número para primeiro termo, e um outro número para *razão*, gera-se a sucessão adicionando (no caso da sucessão aritmética) ou multiplicando (no caso da geométrica) sucessivamente cada termo pela razão. É claro que se pode considerar qualquer sucessão de repetição como uma sucessão geométrica de razão 1 ou uma sucessão aritmética de razão 0.

Consideremos agora apenas a sucessão geométrica. Na sucessão geométrica crescente, os termos crescem indefinidamente em valor absoluto, quer dizer, se "avançarmos" suficientemente ao longo da sucessão poderemos sempre encontrar termos superiores a qualquer número dado, por maior que este seja. Diz-se que estas sucessões *divergem*.

A sucessão decrescente é sempre evanescente e, por essa razão apresenta para nós um interesse especial. Mas o que torna particularmente importante é o facto de a série por ela gerada tender sempre para um limite racional, e reciprocamente, qualquer número racional poder ser considerado como limite de uma série gerada por uma sucessão geométrica racional. Além disso, este é um dos casos raros em que a "soma de uma série" pode ser calculada efectivamente em função dos dados imediatos.

A série gerada por uma sucessão geométrica chama-se *progressão geométrica*. Uma sucessão geométrica evanescente gera uma progressão geométrica convergente. Se a sucessão começa com o termo a e tem por razão r, o limite é dado pela simples fórmula:

$$\frac{a}{1-r}.$$

A este limite chama-se *soma da progressão geométrica*.

Na primeira tese de Zenão o que nos aparece não é mais do que a sucessão geométrica

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ldots$$

que gera, pelo processo serial, a sucessão

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\ldots.$$

Esta última tende, ou converge, para 1, como se pode ver directamente pela fórmula da soma.

Então, a série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

representa o número finito 1 apesar de Zenão alegar que ela se distribui por um número infinito de parcelas. Pode objectar-se, contra os conceitos de convergência e limite, por uma razão ou por outra, mas uma vez que se aceitam, a afirmação de Zenão, de ser necessariamente infinita a soma de uma série infinita de números, perde a sua força.

A segunda tese de Zenão envolve igualmente uma sucessão e uma progressão geométricas. As distâncias que separam Aquiles da tartaruga são dadas respectivamente por

$$100, 10, 1, \frac{1}{10},\frac{1}{100},\frac{1}{1000},\ldots,\frac{1}{10^n},\ldots.$$

Ora o limite desta sucessão é 0 o que significa que Aquiles apanha a Tartaruga. Por outro lado, poderemos também determinar quando é que Aquiles ultrapassa a Tartaruga. Suponhamos que Aquiles corre a uma velocidade de 10 metros por segundo. Assim a Tartaruga corre a uma velocidade de 1 metro por segundo. Zenão afirma que Aquiles nunca ultrapassa a Tartaruga. No entanto o "senso comum" diz-nos que Aquiles diminui 9 metros por segundo a distância que o separa da Tartaruga e, assim, a vantagem inicial de 100 metros será rapidamente anulada. De facto, os metros percorridos pela Tartaruga até ser alcançada são dados pela série

$$10+1+0.1+0.01+\cdots = 11.(1).$$

Mais uma vez, a soma de um número infinito de termos pode ser finita.

3. As dízimas periódicas

As dízimas periódicas não são outra coisa senão séries geométricas disfarçadas. Consideremos a dízima infinita, do tipo periódico simples, 0.(36). O seu significado real é

$$\frac{36}{100}+\frac{36}{10000}+\frac{36}{10000000}+\cdots.$$

Mas isto é uma série geométrica de razão 0.01 e a fórmula da soma mostra-nos que a série converge para o limite racional $\frac{4}{11}$. O mesmo se aplica à chamada dízima periódica mista, como 0.34(53), por exemplo. Multiplicando esta por 100 obtemos a dízima periódica simples 34.(53). As próprias dízimas finitas podem considerar-se como dízimas periódicas de período zero.

Teorema: *Todo o número racional pode ser representado por uma e só uma dízima infinita periódica e, inversamente, toda a dízima infinita periódica representa um número racional.*

Por outro lado, é evidente que podemos formar qualquer número de dízimas que, embora infinitas, sejam não periódicas. Pode a distribuição dos algarismos ser caótica, ou pode seguir uma lei regular mas não periódica. Tal é, por exemplo, o caso da sucessão decimal

$$1.10111213\ldots192020\ldots100101\ldots.$$

Se pudéssemos encontrar uma sucessão racional de repetição *a, a, a, ...*, que fosse assimptótica em relação a esta sucessão decimal, a última representaria então o número racional a. Mas sabemos que tal não é possível porque, se o fosse, a sucessão seria periódica e não é esse o caso. Que representa então esta série? Não sabemos. A maneira como definimos convergência e limite exclui toda a possibilidade de a classificar como um número. Mas, há que considerar a nossa ideia intuitiva de convergência e limite, como qualquer coisa crescente mas nunca excedendo uma determinada grandeza, ou decrescente mas nunca descendo abaixo de um valor dado. Ora, segundo este ponto de vista intuitivo a série decimal infinita não periódica é convergente, e o mesmo se passa com muitas outras séries, como por exemplo:

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(1\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{4}\right)^4, \left(1\frac{1}{5}\right)^5, \ldots$$

que, como sabemos, representa o número transcendente *e.*

Foi esta ideia simplista de convergência e limite que se tomou como axiomática nos primeiros tempos da análise, e temos que admitir que, apesar dos perigos que expôs, foi a ela que o cálculo ficou a dever os seus primeiros êxitos. Assim, as perguntas que mais naturalmente se apresentam ao nosso espírito são: Será possível revestir esta ideia intuitiva de convergência e limite com uma definição precisamente formulada? Será possível, por meio de tal definição, criar um novo instrumento que nos permita lidar com estas entidades matemáticas, representadas pelas séries decimais não periódicas e outras sucessões, com a mesma segurança com que lidamos com as sucessões especiais que admitem limites racionais?

4. Os números reais

Para responder a estas questões, temos de verificar se, entre as propriedades das sucessões especiais que convergem para limites racionais, existe alguma que permita uma generalização imediata ao tipo muitíssimo mais extenso das sucessões que ainda não convergem. Georg Cantor descobriu tal propriedade naquilo a que chamaremos *natureza auto-assimptótica* das sucessões convergentes.

Para a examinarmos, consideremos uma vez mais a série dicotómica

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots.$$

Vamos "avançar" a série, eliminando o primeiro termo, de forma que o segundo se torne o primeiro, o terceiro segundo e assim por diante. Este processo de avanço gera a sucessão de sucessões

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \ldots$$

$$\frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots$$

que, evidentemente, se pode continuar indefinidamente. Ora, um rápido exame destas sucessões é suficiente para nos mostrar que todas são mutuamente assimptóticas; quer dizer, a sucessão diferença obtida a partir de duas delas é evanescente.

Pode demonstrar-se que a propriedade auto-assimptótica é válida para todas as sucessões que convergem para limites racionais; mas de modo algum se confina a estas: com efeito, qualquer dízima infinita não periódica goza da mesma propriedade. Consideremos, pois, como exemplo a série decimal

$$0.101112131415\ldots,$$

que se pode escrever na forma

$$0.1, 0.10, 0.101, 0.1011, 0.10111, 0.101112, \ldots.$$

É evidente que a eliminação de qualquer número destas aproximações racionais não afecta o carácter da sucessão e, por isso, podemos escrevê-la na forma

$$0.101112, 0.1011121, 0.10111213, 0.101112131, \ldots,$$

que é assimptótica em relação à primeira.

Assim alargou Cantor a ideia de convergência que, até então se aplicava apenas às sucessões assimptóticas em relação a sequências de repetição, identificando os dois termos auto-assimptótica e convergente. Além disso, alargou a ideia de limite considerando a sucessão auto-assimptótica como geradora de um novo tipo de entidade matemática com o que, havia já muito tempo, se chamava *número real*. No entanto havia que provar que estas novas entidades poderiam, de facto, ser consideradas como números. Tal é possível demonstrar usando as propriedades das sucessões e foi isso o que Cantor fez.

5. Aritmética real

Conterá o novo domínio os irracionais da álgebra, os transcendentes da análise? Contém, e, para o mostrarmos, regressemos à equação $x^2 = 2$ que há mais de 2000 anos, envolvida no problema da determinação da diagonal do quadrado, iniciou a crise que culminou na fundação do domínio dos números reais.

Ensinaram-nos na escola um algoritmo para a extracção da raiz quadrada. Este processo dá-nos, para aquilo a que chamamos $\sqrt{2}$ uma sucessão de aproximações racionais que formam uma sucessão convergente:

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \ldots.$$

Esta sucessão não tem limite racional mas a sucessão dos seus quadrados

$$1, 1.96, 1.9881, 1.999396, \ldots$$

converge para o número racional 2.

Quando dizemos, portanto, que a solução positiva da equação $x^2 = 2$ é a sucessão em questão e representamos por $\sqrt{2}$ o número por ela definido, queremos significar não apenas que a sucessão dos quadrados converge mas também que pertence ao raro tipo de sucessões convergentes que tendem para um *limite racional*, o qual no nosso caso é o número 2.

Semelhante processo aplica-se a outras equações algébricas e transcendentes. Assim, ao admitirmos a validade dos processos infinitos somos levados para além das fronteiras apertadas da aritmética racional. Cria-se assim uma *aritmética geral*, a *aritmética dos números reais* que nos faculta os meios de abordar problemas perante os quais a aritmética racional parecia impotente.

6. Sucessões de irracionais

Poderá parecer, à primeira vista, que nos faltou espírito de previsão ao darmos o nome muito geral de *real* ao limite das sucessões de racionais. Na verdade é naturalíssimo considerarmos sucessões infinitas agora formadas por irracionais. Que isto não é puro malabarismo, é fácil de concluir de uma expressão tal como $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, cuja interpretação directa nos levaria à *sucessão irracional*

$$\sqrt{2.4}, \sqrt{2.41}, \sqrt{2.414}, \ldots.$$

Mas, pelo menos neste caso, a objecção é infundada. Com efeito, se fizermos $\sqrt{1+\sqrt{2}} = x$, uma simples manipulação algébrica é suficiente para nos mostrar que x é uma solução da equação $x^4 = 2x^2 + 1$. Todavia, podia aplicar-se a este caso um processo semelhante ao algoritmo da extracção da raiz quadrada que nos permitia obter uma sucessão de números racionais, a qual, por sua vez, permitia representar $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ como uma sucessão racional, assimptótica à sucessão irracional que acima considerámos.

Ora bem, por estranho que pareça, este é um caso geral. *Dada uma sucessão irracional qualquer, é sempre possível determinar uma sucessão racional (e normalmente mais do que uma) que lhe é assimptótica.*

É de fundamental importância o facto de se poder representar por uma sucessão de números racionais tudo quanto se possa exprimir por uma sucessão irracional. Desde que qualquer número real pode ser expresso por sucessões racionais convergentes, o domínio racional, reforçado pelos conceitos de convergência e limite, chegaria para alicerçar a aritmética e, através da aritmética, a teoria de funções que é a pedra angular da matemática moderna.

Mas este facto basilar é de igual importância para a matemática aplicada. Uma vez que se pode representar qualquer sucessão racional por uma dízima finita (ou infinita periódica), possível é também a sistematização de todo o cálculo. Limitando-se a um dado número de casas decimais pode o calculador obter a desejada aproximação racional para qualquer problema irracional ou transcendente. E, o que é mais, pode não só avaliar-se prontamente mas até mesmo determinar-se previamente o grau de aproximação deste processo.

Quando alguém perguntou a Luís XIV qual o princípio orientador da sua política internacional, este teria respondido cinicamente: "Anexar! Pode sempre encontrar-se um advogado esperto que justifique o acto". Tal como nesta anedota, o mundo não esperou por Weierstrass e Cantor para consagrar o procedimento de substituir um número irracional por uma das suas aproximações racionais ou, o que é o mesmo, tomar como limite duma sucessão infinita um termo suficientemente avançado dessa mesma sucessão.

7. Convergência e divergência de séries

As propriedades dos processos infinitos, e em particular das séries, tornam-nos particularmente adequados para a representação de números reais. Mas, apesar disso, a história dos processos infinitos girou à volta de um processo de alcance muito mais geral que, em razão da sua própria generalidade, conduziu, ao mesmo tempo, a um grande número de resultados embaraçosos e paradoxais.

Se considerarmos as séries geométricas positivas, é fácil de ver que são convergentes quando a razão for inferior a 1 e divergentes no caso contrário; e este resultado pode generalizar-se imediatamente às séries geométricas alternadas. Surge porém um caso notável quando a razão é igual a -1, tomando então a série a forma

$$a - a + a - a + a - a + a - a + \cdots.$$

Diríamos hoje que esta série diverge muito embora a sua soma nunca exceda a. Na verdade, ela pode parafrasear-se na sucessão:

$$a, 0, a, 0, a, 0, a, 0, \ldots$$

que não tem limite definido. Mas Leibniz pensou de outra forma. Entendeu que os limites a e 0 são igualmente prováveis e que a soma tende para o valor médio $0.5a$, como limite.

O folheto em que Leibniz se ocupa das séries apareceu nos finais do século XVII e conta-se entre as primeiras publicações dedicadas ao assunto. Uma das características desta fase recuada da história das séries é que a questão da sua convergência ou divergência, que hoje se considera fundamental, era então mais ou menos ignorada. Assim, era geralmente aceite a ideia de que a série era necessariamente convergente se fosse evanescente a sua sucessão geradora. Isto, como vimos, é verdadeiro para as séries geométricas, e não há dúvida de que tal foi a origem deste erro generalizado. Só com a publicação da obra de Jacques Bernoulli sobre série infinitas, em 1713, se começou a encarar o problema de forma mais clara. O ponto de partida foi a série *harmónica*. Sendo a sucessão geradora evanescente, admitia-se também que a série o era. Todavia Bernoulli apresenta no seu livro uma demonstração, que se deve a um dos seus irmãos, Jean, de que esta série, lenta mas seguramente, diverge.

A obra de Bernoulli despertou a atenção para a necessidade de se estabelecer um critério de convergência. A evanescência do *termo geral*, ou seja, da sucessão geradora, é uma condição necessária, mas é geralmente insuficiente. D'Alembert e Maclaurin, Cauchy, Abel e vários outros, determinaram condições suficientes. Devo, no entanto, dizer que a determinação do carácter convergente ou divergente de uma série é ainda hoje tarefa difícil em certos casos.

8. A moderna análise

Narrar a história dos processos infinitos a partir de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Niels Henrik Abel (1802-1829), seria narrar a história da análise moderna e da teoria das funções.

Na bíblia da análise complexa, o *Cours d'Analyse*, de 1821, Cauchy baseou a teoria na ideia de limite e definiu-o assim:

"Quando os sucessivos valores atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, acabando por diferir dele uma quantidade tão pequena quanto queiramos, este último é chamado o limite de todos os outros."

No que diz respeito ao infinitésimo foi bastante explícito:

"Dizemos que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando o seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite 0."

Os infinitésimos, tal como foi dito anteriormente, são *variáveis* e não constantes. De forma semelhante, ∞ não é uma constante, mas uma variável que se torna infinitamente grande. Talvez seja mesquinho observar que ninguém tinha definido o que significa *variável*. A omissão não era séria e passou sem ser notada.

Finalmente - e francamente é um alívio vê-lo - Karl Weierstrass (1815-1897) esclareceu a questão em 1850 ou à volta disso, levando a sério a frase "tão próximo quanto queiramos". Quão próximo *é* que queremos? ele tratou uma variável, não como uma quantidade activamente em mudança, mas simplesmente como um símbolo estático para um qualquer elemento de um conjunto de valores possíveis. Uma função $f(x)$ tende para um limite L quando x tende para um valor a se, dado qualquer número positivo ε, a diferença $f(x) - L$ for menor que ε sempre que $x - a$ seja menor que algum número δ que depende de ε. É como um jogo: "Tu dizes-me quão próximo queres $f(x)$ de L; depois eu digo-te quão próximo x tem de estar de a." O Jogador épsilon diz quão próximo *ele* quer; depois delta é livre de procurar o que quiser. Se delta tiver sempre uma estratégia ganhadora, $f(x)$ tende para o limite L. Esta definição épsilon-delta de limite é talvez um pouco esquisita, mas, tal como o método grego da exaustão, um profissional competente rapidamente se habitua a ela e pode controla-la com precisão e ocasionalmente com uma virtuosidade espantosa.

Repare-se como as ideias físicas de movimento foram substituídas por um conjunto de eventos estáticos, um para cada escolha de ε. Não é necessário pensar numa variável ε a tender para 0; tudo o que temos a fazer é considerar todos os possíveis valores (maiores que 0) para ε e lidar com eles de uma forma bem sucedida. A introdução da infinitesimalidade potencial *versus* a real é um falso problema; toda a questão pode ser formulada em termos puramente finitos. A definição de limite de Weierstrass libertou o cálculo de considerações metafísicas e assim nasceu a análise moderna.

Referências

1. Caraça, Bento de Jesus, Conceitos Fundamentais da Matemática, Livraria Sá Costa, 9ª edição, Lisboa, 1989.

2. Dantzig, Tobias, Número a Linguagem da Ciência, Astler, Lisboa, 1960.

3. Stewart, Ian, Os Problemas da Matemática, Gradiva, Lisboa, 1995.

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS

1. Dixit Algorizmi

Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (também escrito, por vezes, al-Khorezmi, al-Kworesmi, ou ainda de muitas outras formas) nasceu por volta de 810 d.C., em Khorezm (hoje Urgench, no Urbequistão). Trabalhou como astrónomo do califa Abd-Allah al-Mamun (o Fidedigno), que herdou a *Bayt al-Hikmah* (*Casa da Sabedoria*, ou *Academia das Ciências*), em Bagdad, de seu pai, Harun ar-Rashid (o Justo), e a elevou à sua máxima fama. Os trabalhos conhecidos de al-Khwarizmi são dez em número e incluem *Kitab az-zij al sindhind*, um conjunto de tábuas astronómicas, incluindo as primeiras tábuas de senos e co-tangentes; *Kitab hisab al-'adad al-hindi*, um texto aritmético; e o famoso *Kitab al-muhtasar fi hisab al-gabr w'al-muquabalah*, um texto compacto sobre resolução de equações. O terceiro livro, latinizado como *Ludus algebrae et almucgrabalaeque*, deu-nos a palavra "álgebra". Admitamos, podia ter sido pior. O segundo, latinizado como *Algoritmi de numero Indorum*, trouxe o sistema numérico hindu para o mundo Árabe e o resultante sistema numérico hindu-arábico para a Europa.

Na época medieval, a aritmética era identificada com o seu nome, interpretado como "Algorismus". A fórmula *dixit Algorizmi* (assim falou al-Khwarizmi) era marca reconhecida de clareza e autoridade. O seu texto sobre aritmética incluía todos os processos aritméticos básicos através dos quais os números podem ser somados, subtraídos, duplicados, divididos ao meio, multiplicados, divididos e extraídas as suas raízes quadradas. Tinha também um capítulo sobre cálculos comerciais. Hoje, o seu nome sobrevive como a descrição de qualquer procedimento claro e preciso de resolução de um dado problema: um *algoritmo*. É um conceito no âmago das ciências da computação, em termos práticos e teóricos, e da matemática da computabilidade.

2. Existência e construtibilidade

Há muitos estilos diferentes de matemática. Numa algo nebulosa extremidade está a prova de existência pura, que afirma que um objecto com certas propriedade tem necessariamente de existir (*matemática dialéctica*). No meio estão técnicas mais ou menos construtivas que fornecem uma descrição mais explícita dos resultados ou objectos desejados. No núcleo central está o algoritmo completamente construtivo, um procedimento perfeitamente definido que garante o cálculo exacto daquilo que se pretende, desde que esperemos o tempo suficiente (*matemática algorítmica*).

O problema dos números transcendentes ilustra bem os três estilos. A demonstração de existência de Cantor não exibe um único número transcendente. Observa apenas que, pelo facto de haver mais números reais que números algébricos, os números transcendentes têm de existir. No nível intermédio estão as demonstrações de transcendência de números específicos, como $e, \pi, 2^{\sqrt{2}}$, ou os números de Liouville. Estas exploram propriedades dos números especiais envolvidos. Um algoritmo para a transcendência seria um método geral que decidisse, para qualquer número, se ele satisfaz ou não uma equação algébrica. Não se conhece nenhuma técnica que faça isso; provavelmente, essa técnica não existe.

Toda a matemática do Egipto, da Babilónia e do Médio Oriente antigo era de natureza algorítmica. A matemática dialéctica - estritamente lógica e dedutiva - tem origem na Grécia. Mas não substituiu a matemática algorítmica. Com Euclides (cerca de 300 a.C.), o papel da dialéctica é justificar uma construção - ou seja, um algoritmo.

Só mais recentemente encontramos matemática com pouco ou nenhum conteúdo algorítmico e que poderemos designar por puramente dialéctica ou existencial.

Uma das primeiras linhas de investigação a revelar um espírito predominantemente dialéctico foi a pesquisa de raízes de um polinómio de grau *n*,

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

deveria possuir *n* raízes, contando com as multiplicidades. Todavia, não se encontrara uma fórmula explícita, como a fórmula quadrática ou cúbica. (Foi posteriormente demonstrado que não é possível encontrar uma fórmula semelhante para $n > 4$.) A questão passou a ser a de descobrir que outros meios poderiam aplicar-se ao problema de encontrar aproximações às raízes. Em última análise, que garantias temos da existência de raízes? Os teoremas que o garantem, demonstrados inicialmente por Gauss, são dialécticos. O aspecto algorítmico é ainda tema de discussão.

Na maior parte do século XX a matemática tem sido orientada para a existência, e não para o algoritmo. Tem-se notado em anos mais recentes uma viragem em direcção à abordagem construtiva ou algorítmica. A abordagem algorítmica é recomendável sempre que o problema com que nos defrontamos exija uma solução numérica, com importância dentro ou fora da matemática. A análise numérica é a ciência e a arte de chegar a soluções numéricas para certos problemas matemáticos.

A realidade, no entanto, revela-se um pouco mais obscura. Como vamos reagir a demonstrações de existência de algoritmos que na realidade não especificam o que é o algoritmo? Podemos imaginar um algoritmo para encontrar demonstrações de existência; ou demonstrações de existência de algoritmos que encontrem demonstrações de existência para algoritmos que... bom, estão a ver a ideia.

3. Algoritmos antes de Algorismus

Como foi dito, o pensamento algorítmico precede al-Khwarizmi alguns milénios. Um dos primeiros algoritmos significativos encontra-se no Livro Sete de Euclides e ilustra várias das suas mais importantes características. O problema é calcular o máximo divisor comum (mdc) de dois números; isto é, o maior número que divide ambos de forma exacta. Conceptualmente, a solução mais simples é decompor os números em factores primos e reter a mais pequena potência de cada primo comum; e é este o método ensinado usualmente nas escolas de hoje. Por exemplo, para encontrar o mdc de 60 e 280, escrevemos $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ e $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ e retemos $2^2 \cdot 5$, isto é 20, como mdc. Mas este método é irremediavelmente ineficiente para números mesmo com quatro ou cinco dígitos, devido à dificuldade em encontrar factorização em primos. (Além disso, a demonstração de que funciona *depende* do algoritmo de Euclides!) O **método melhorado de Euclides** funciona da seguinte maneira. Sejam m e n os dois números, sendo m o mais pequeno. Então:

1. Divide-se n por m, com resto igual a r;
2. Substitui-se n por m e m por r;
3. Repetir do passo 1. até o resto ser zero.

Então o divisor final m é o mdc procurado. Por exemplo, para encontrar o mdc de 50938 e 34017 procedemos da seguinte maneira:

50938/34017	dá resto 16996
34017/16996	dá resto 85
16996/85	dá resto 51
85/51	dá resto 34
51/34	dá resto 17
34/17	dá resto 0.

Logo o mdc é 17. A demonstração de que o algoritmo funciona sempre é bastante fácil e é baseada no facto de que qualquer número que divida m e n tem também que dividir r, e reciprocamente.

4. O criador de coelhos de bom coração

Os números que aparecem no algoritmo de Euclides decrescem rapidamente. Com que rapidez? Em quantos passos consiste o algoritmo? Para responder analisemos o pior caso, onde a diminuição é a mais pequena possível em cada passo. Trabalhando ao contrário, concluímos que m e n devem ser os termos consecutivos da sucessão

$$1,1,2,5,8,13,21,34,55,89,...$$

em que cada número é a soma dos dois anteriores. Esta sucessão tem uma longa história. Foi descoberta por Leonardo Pisano, alcunhado Fibonacci ("filho de bom coração"), na resolução do seguinte problema:

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

O livro de Leonardo, *Liber Abaci*, de 1202, introduziu na Europa a aritmética hindu-arábica, outra ligação com al-Khwarizmi. Qual o tamanho do enésimo número de Fibonacci? Há uma fórmula exacta, mas uma estimativa mais grosseira fornece a compreensão necessária. O número de passos do algoritmo de Euclides á aproximadamente igual a cinco vezes o número de dígitos do maior dos dois números envolvidos. Mesmo para um número com 100 dígitos, não serão precisos mais de 500 passos. Encontrámos uma medida da eficiência do algoritmo. Aqui a "velocidade" é proporcional ao número de dígitos. A eficiência é realmente muito grande. Em comparação, o tamanho do método dos "factores primos", usando a divisão por tentativas, cresce exponencialmente com o número de dígitos. Para um número com 100 dígitos seriam necessários cerca de 10^{20} passos.

5. Algoritmos de tempo útil

Uma questão essencial na construção de um algoritmo á a de saber se ele termina. Para decidir se um algoritmo termina, temos que determinar se o número de passos por ele executados é finito. Constatamos, por exemplo, que em certas aplicações a situações concretas, tais como o controlo de um reactor nuclear, os procedimentos nunca terminam. Na prática queremos que o algoritmo termine num período razoável de tempo; ao fim e ao cabo, um algoritmo que não produza a solução em *tempo útil* não é um algoritmo de grande utilidade.

Consideremos o caso do xadrez. Suponhamos que queremos um algoritmo que determine quando é que as brancas ganham sempre. Temos 20 aberturas possíveis (duas para cada um dos oito peões e duas para cada cavalo) e, consequentemente, 20 respostas das pretas para cada uma dessas aberturas. Um algoritmo para analisar o jogo de xadrez tem de examinar cada uma das 400 configurações possíveis depois do primeiro par de jogadas. O algoritmo analisaria posteriormente todos os movimentos que as brancas fariam em seguida, bem como as possíveis respostas dadas pelas pretas a cada configuração, e assim sucessivamente. Num jogo típico de xadrez ocorrem cerca de 40 pares de jogadas o que permitem 10^{95} configurações possíveis no tabuleiro. Mesmo com um computador super rápido, este algoritmo gastaria uma enormíssima quantidade de tempo. Suponhamos que examinamos 1 milhar de milhão de configurações por segundo: demoraríamos 10^{77} séculos a determinar todas as possíveis situações de jogo. Para servir de termo de comparação, notemos que estudos recentes sobre a idade do Universo nos dizem que esta se situa entre os 9 e os 12 milhares de milhão de anos! Mesmo que, em teoria, o algoritmo termine, o tempo necessário à sua conclusão torna-o impraticável. Os actuais programas que analisam o jogo de xadrez usam um método completamente diferente, construído mais à base da maneira como os grandes mestres jogam.

É normalmente aceite que para resolver um problema difícil, temos que o compreender em profundidade. No entanto, em verdade, podemos resolver problemas sem os compreender se possuirmos métodos que nos conduzam à solução. Por exemplo, não necessitamos de conhecer o Código Fiscal português para calcular quanto temos que pagar de impostos. Se possuirmos um algoritmo eficiente, não necessitamos de compreender sequer o mínimo do problema subjacente em si. Limitamo-nos a seguir os passos do algoritmo e chegar à solução. Os computadores fazem a mesma coisa; eles não "compreendem" problemas mas estão aptos a seguir algoritmos até encontrar a solução. Evidentemente, isto não é assim tão simples; o algoritmo tem que ser escrito por forma a que o computador o possa interpretar, o que significa que há necessidade de especificar todos os passos numa linguagem que o computador entenda. E é isto que todos os programas de computador são: algoritmos traduzidos numa linguagem muito bem definida que o computador interpreta.

6. A ligação malthusiana

Uma vez que possuímos mais do que um algoritmo para um dado problema, a nossa questão óbvia é: qual é o melhor algoritmo? Temos para isso que clarificar o sentido de "melhor".

Suponhamos que escolhemos um método formal de cálculo no qual definimos precisamente o tamanho dos dados e o tempo de execução. (Um tal método foi descrito por Alan Turing nos anos 30 deste século.) Assim podemos medir a eficiência de um algoritmo pela forma como o tempo de execução varia com o tamanho dos dados de entrada. Em 1965, J. Edmonds e A. Cobham propuseram que os dois casos cruciais, correspondendo aproximadamente ao que a experiência descrevia como "bons" e "maus" algoritmos, fossem o tempo polinomial e o tempo exponencial. Se o tempo de execução exceder uma potência fixa, o algoritmo cresce em *tempo polinomial*. Se crescer como 2^s ou mais depressa, corre em *tempo exponencial*. Taxas de crescimento entre estas podem aparecer, mas são raras na prática. Uma vantagem desta classificação é não depender do modelo do processo computacional escolhido. Observemos que o "bom" algoritmo de Euclides corre em tempo linear, ao passo que o natural mas "mau" método da factorização é exponencial.

Em 1798, Thomas Malthus escreveu um famoso artigo sobre a pressão populacional, no qual fez a distinção entre o crescimento linear das reservas alimentares e o crescimento exponencial da população. É basicamente a mesma distinção e o ponto crucial é que, a longo prazo, o crescimento exponencial ganhará, por mais devagar que possa começar. Estas medições grosseiras, mas eficazes, têm objectivos teóricos e têm de ser combinadas na prática com outras observações. Um algoritmo com um tempo de execução igual a $100^{500} s^{120}$ é, pela nossa definição "bom", mas na prática é inútil. Um algoritmo com tempo de execução igual a $\exp(10^{-500} s)$ é "mau", mas pode funcionar de forma razoável para uma grande variedade de valores de *s*. Não conheço, no entanto, exemplos razoáveis de qualquer uma destas fantasias.

7. P=NP?

De seguida vamos enumerar alguns problemas para os quais seria interessante encontrar algoritmos:

1. [Problema da ordenação] Dado um conjunto de inteiros, dispô-los por ordem crescente;

2. [Problema do encaminhamento] Descobrir a melhor maneira de encaminhar camionetas do lixo através de uma cidade, minimizando a distância a percorrer, sujeita a condicionamentos, como ter de recolher o lixo numa semana de trabalho usando um número de camionetas que não exceda o que as autoridades da cidade possuam;

3. [Problema dos horários] Dadas informações acerca das disciplinas, professores e alunos, fazer um horário sem sobreposições;

4. [Problema do empacotamento] Dado um conjunto de objectos de vários tamanhos, dispô-los no menor número de caixotes de tamanho fixo;

5. [Problema do caixeiro-viajante] Dada uma lista de cidades, cada uma a ser visitada exactamente uma vez, encontrar o caminho mais curto.

Todos estes problemas são de optimização combinatória. Para cada *x* há um valor $c(x)$ a minimizar. Neste contexto a distinção polinomial/exponencial apresenta um novo e importante aspecto.

Seja **P** a classe de problemas que podem ser resolvidos através de um algoritmo correndo em tempo polinomial: os problemas *fáceis*. Uma classe (presumivelmente) mais geral, contendo a maioria dos problemas interessantes, é chamada **NP**, os problemas solúveis em *tempo polinomial não determinístico*. É evidente que qualquer problema que pertença a **P** pertence também a **NP**. Será o recíproco verdadeiro? Parece pouco provável. Portanto, esperamos que **P** seja diferente de **NP**. Parece o tipo de coisa que deveria ser fácil de decidir. Mas não é. É um problema por resolver, um grande desafio que pode muito bem ser legado aos matemáticos do século XXI.

O que torna o problema de decidir se **P** é diferente de **NP** tão difícil é o facto de não ser nada fácil provar que nenhum problema *não pode* ser resolvido em tempo polinomial. Temos que encarar *todos os algoritmos possíveis* para o problema e mostrar que cada um deles é ineficiente. As demonstrações de não existência são normalmente difíceis, bastando olhar para o caso da quadratura do círculo, o estabelecimento da hipótese do contínuo, etc. Outra característica curiosa é que todos os problemas que seria de esperar estarem em **NP**, mas não em **P**, estarem essencialmente em igualdade de condições uns com os outros, tornando difícil saber por onde começar. Concretamente, digamos que um problema é **NP**-*completo* se pertencer a **NP** e se o facto de ele poder ser resolvido em tempo polinomial implicar que *todos* os problemas em **NP** poderem ser resolvidos em tempo polinomial. Por outras palavras, se ele não for um contra-exemplo, nada mais é. Virtualmente, *todos* os problemas em que é possível pensar em **NP** que não estejam já obviamente em **P** vêm a ser **NP**-completos. Centenas de problemas foram estudados. E também é sabido que os métodos mais plausíveis para mostrar que **P** é igual a **NP** (simulação), quer que **P**é diferente de **NP** (a diagonalização de Cantor), não conseguem ser postos a funcionar.

Será verdadeiro? Será falso? Será que não é uma coisa nem outra, como a hipótese do contínuo? Será a sua veracidade independente da teoria formal de conjuntos? Ninguém tem a mais pequena ideia. É um dos maiores problemas em aberto da matemática.

8. Os limites da computabilidade

Durante séculos, os matemáticos mataram a cabeça para tentar provar o axioma das paralelas de Euclides. A descoberta da geometrias não euclidianas lançou outra luz sobre o problema. Há geometrias diferentes da de Euclides que são igualmente consistentes: se a geometria de Euclides é consistente, o mesmo acontece com as outras. O que originou uma questão muito mais profunda: é a geometria de Euclides consistente? Tendo começado a partir do princípio de que a geometria euclidiana era a verdadeira geometria da natureza e de que nenhuma outra geometria podia fazer sentido, e tendo-se provado que estavam enganados em ambos os princípios, os matemáticos começaram a duvidar até da geometria euclidiana. Será *isso* consistente? Foi razoavelmente fácil de ver que assim acontece, desde que o sistema dos números reais seja consistente, e em seguida trabalhar os fundamentos da matemática, depois de Cantor ter conseguido reduzir o problema da consistência dos reais primeiro à dos inteiros e depois à lógica matemática e à teoria formal de conjuntos. Dentro da teoria de conjuntos, e usando a lógica, podemos construir um modelo para os inteiro; com os inteiros podemos construir um modelo para os reais; com os reais podemos construir um modelo para a geometria euclidiana; com a geometria euclidiana podemos construir um modelo para a geometria não euclidiana. Tudo muito bem - mas e a teoria de conjuntos e a lógica? Era tudo um horrível anti-clímax: os matemáticos partiram à conquista do universo e acabaram a duvidar do próprio solo que pisavam.

Em 1900, David Hilbert (1862-1943), o mais influente matemático do seu tempo, imaginou um programa de investigação cujo resultado final seria uma demonstração rigorosa da consistência da lógica e da teoria de conjuntos, ou equivalentemente, da aritmética, bem como da sua *completude*, isto é, o que é verdade tem que ser provado. Este programa foi apresentado num famoso discurso apresentado no decorrer do Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris. Mas, em 1931, depois de anos de intenso trabalho no programa de Hilbert, um ilustre desconhecido austríaco chamado Kurt Gödel meteu um grão de areia na engrenagem e o programa desfez-se em ruínas. Gödel provou um resultado notável: demonstrou que há afirmações verdadeiras em aritmética (bem como em qualquer outra teoria matemática suficientemente poderosa para conter a aritmética) que nunca podem ser demonstradas e que, se alguém encontrar uma demonstração de que a aritmética é consistente, então ela não o é! Este resultado chocou o mundo matemático.

Entretanto, mais ou menos na mesma altura, o matemático britânico Alan Turing estava a trabalhar em lógica matemática, tendo em vista clarificar a noção de computabilidade. O resultado de Gödel garantia a existência de proposições *indecidíveis*. Poderíamos dizer à partida quais eram essas proposições? Para detectar um procedimento automático que detectasse essas proposições, Turing primeiro teve que formalizar a noção de procedimento. Nesse sentido apareceu com o conceito de uma máquina de computar (a *máquina de Turing*). Essa ideia de máquina era simplesmente uma construção mental que permitia a Turing descrever o que entendia por procedimento computável, ou função; de facto, ele descobriu que não é possível dizer à partida quais são as proposições *indecidíveis*. Mas a porta estava aberta. O que começou como uma ideia para definir um procedimento rapidamente se tornou numa realidade prática.

9. O aparecimento dos computadores

A história do aparecimento dos computadores envolve várias personagens, mas talvez a mais importante seja John von Neumann, um dos melhores matemáticos deste século e, por consequência, de sempre. Um matemático puro, von Neumann estava fascinado pelas aplicações práticas. Um dos muitos interesses de von Neumann era a dinâmica dos fluidos. Mas as equações que representam o movimento dos fluidos são tão complicadas que mesmo um único problema pode demorar semanas a ser resolvido por uma sala cheia de matemáticos com calculadoras de bolso. Apesar de ser aceitável em tempo de paz, a Segunda Grande Guerra Mundial trouxe a exigência dos problemas serem resolvidos rapidamente. São necessárias quantidades astronómicas de cálculos da dinâmica dos fluidos para o desenvolvimento tecnológico, incluindo a bomba atómica.

Este tipo de restrições levaram von Neumann a começar o trabalho de desenvolvimento de um computador. Ele não só desenhou uma máquina teoricamente como também dirigiu a equipa que construiu um computador com as suas ideias. Essa máquina foi construída nos anos 40 na Universidade de Princeton e tornou-se o protótipo dos modernos computadores.

Desde essa altura, desenvolvimentos e melhoramentos têm-se seguido a um ritmo alucinante. Novos desenvolvimentos da computação gráfica têm conduzido a novas descobertas matemáticas (o caso dos fractais). As verificações por computados têm sido incorporadas nas demonstrações de importantes resultados (conjectura das quatro cores). Assim, num certo sentido, fechámos uma ciclo. O computador apareceu como uma ideia para ajudar a perceber o sentido da demonstração matemática. Mas a matemática está sempre em expansão. Hoje, o computador não só nos ajuda a efectuar os nossos cálculos e a desenhar as nossas figuras, como também alterou a nossa noção de demonstração e toda a imagem de matemática em si.

Referências

1. COMAP, For All Pratical Purposes; Introduction to Contemporary Mathematics, Freeman and Co, New York, 1988.

2. Davis, J. Philip e Hersh, Reuben, A Experiência Matemática, Gradiva, Lisboa, 1995.

3. Stewart, Ian, Os Problemas da Matemática, Gradiva, Lisboa, 1995.

CAPÍTULO 6. O PROBLEMA DO CONTÍNUO

1. Preenchendo lacunas

Ao admitirmos a validade do processo infinito somos levados para fora dos estreitos limites do domínio racional e adquirimos um meio para abordar problemas perante os quais a aritmética racional permanecia impotente. É pois natural perguntarmos se estamos agora em melhor posição para resolver o velho problema do estabelecimento da correspondência perfeita entre os pontos duma linha e o domínio dos números.

Sabemos que a aritmética racional era insuficiente para o resolver. Mas se a aritmética geral, a aritmética dos números reais, consegue maiores êxitos neste campo, é ainda uma questão em aberto: os pontos da linha que escapavam à representação racional, admitem de qualquer modo formulação aritmética? O velho problema que provocou a crise inicial e levou à revisão das bases da aritmética reaparece agora numa forma nova e mais geral: *pode representar-se* ***qualquer*** *número real por um ponto duma linha? Pode atribuir-se um número real a* ***qualquer*** *ponto de uma linha?*

Se a resposta for afirmativa, existe então uma correspondência completa e recíproca entre o domínio dos números reais, por um lado, e o conjunto dos pontos de uma linha, por outro. Se tal correspondência existe, podemos decidir aplicar aos problemas da geometria toda a precisão e a força da análise aritmética e reduzir esses problemas a questões de número e grandeza. Vemos assim quanto a pergunta é importante, e quantas coisas podem depender da resposta.

2. A ideia do contínuo

Para responder a esta questão, Cantor empreendeu a tarefa de descobrir a diferença fundamental entre os domínios racional e real.

O conjunto dos números racionais, embora ordenado (dados dois número racionais podemos dizer qual é o maior) e compacto (entre dois números racionais quaisquer é possível intercalar um número infinito de outros números racionais), é *imperfeito*. É imperfeito por não ser fechado em relação aos processos infinitos. Não é fechado em relação aos processos infinitos, como o prova a própria existência dos irracionais, uma vez que existem sucessões racionais infinitas que, embora convergentes, não têm como limite números racionais. Em suma, o conjunto dos números racionais é imperfeito porque não contém todos os seus próprios *valores limite*.

Mas o conjunto dos números reais não é apenas ordenado e compacto: é *perfeito*. E é perfeito porque é fechado em relação a *todos* os processos infinitos. Uma sucessão infinita de números reais, se for convergente, representa um número real; com efeito, se tal sucessão, embora não sendo racional em si mesma, pode ser substituída por uma sucessão racional que converge para o mesmo limite, é por definição um número real. O conjunto dos números reais contém todos os seus próprios *valores limite* e por essa razão se diz que é *perfeito*.

Ora, nem todo o conjunto compacto é perfeito, como o mostra a análise do domínio racional; mas todo o conjunto perfeito é compacto, como demonstrou Cantor. Um conjunto simultaneamente ordenado e perfeito, define-o Cantor como um *contínuo*. O domínio dos números reais constitui um contínuo, o *contínuo aritmético*. Em contrapartida, o domínio dos números racionais, por ser imperfeito, não constitui um contínuo.

E assim, o que define o domínio dos números reais de forma completa é que é um contínuo, um contínuo no sentido que lhe atribuía Cantor. Mas, as palavras *contínuo*, *continuidade*, utilizaram-se nas ciências exactas desde os primeiros dias. Desde tempos imemoriais que o termo *contínuo* tem sido aplicado ao espaço, ao tempo, e ao movimento, com o sentido indeterminado de qualquer coisa ininterrupta, qualquer coisa que tem a mesma natureza nas suas partes mais pequenas como no seu todo, qualquer coisa constantemente ligada, em suma *qualquer coisa contínua*! não estão a ver? Esta é uma das muitas noções vagas, indeterminadamente concebidas cujo sentido é apanhado pela intuição. E, no entanto, qualquer tentativa para a formularmos numa definição precisa acaba invariavelmente por um impaciente: "Bem! você sabe o que eu quero dizer!"

A ideia mais típica que corresponde a estas condições é a linha, e em particular a linha recta, a que o nosso espírito atribui continuidade por excelência. Assim, se quisermos descobrir uma correspondência completa e recíproca entre a linha recta e o domínio real devemos assegurar-nos de que não há contradição flagrante entre a ideia intuitiva de continuidade que atribuímos à linha e a continuidade precisa, cientificamente formulada dos números reais, tal como a definiu Cantor.

3. A contribuição de Dedekind

Uma contribuição importante nesse sentido foi dada por Richard Dedekind. A essência do conceito de Dedekind contém-se no seguinte passo do seu memorável ensaio "Continuidade e Números Irracionais", aparecido em 1872, dez anos antes da publicação dos ensaios de Cantor sobre o mesmo assunto:

"A linha recta é infinitamente mais rica em pontos que o domínio dos números racionais o é em números...

Então se tentarmos seguir aritmeticamente os fenómenos que governam a linha recta, acharemos inadequado o domínio dos números racionais. Torna-se absolutamente necessário aperfeiçoar este instrumento pela criação de novos números, se pretendermos que o domínio dos números seja tão completo, ou, como podemos dizer agora, tenha a mesma continuidade, que a linha recta...

A comparação do domínio dos números racionais com a linha recta levou a reconhecer-se a existência de lacunas, de um certo inacabamento ou descontinuidade, no primeiro, enquanto na linha recta vemos completo acabamento, ausência de lacunas, ou continuidade. Em que consiste então a continuidade? Tudo deve depender da resposta a esta questão, e apenas nela poderemos procurar uma base científica para a investigação de todos os domínios contínuos. Nada se ganha, evidentemente, com vagas afirmações acerca da conexão ininterrupta das suas partes infinitamente pequenas; o problema consiste em indicar-se com precisão uma característica da continuidade que possa servir de base à dedução válida. Durante muito tempo, meditei nisto em vão, mas acabei por encontrar o que buscava. A descoberta será, talvez, encarada de modos diferentes por pessoas diferentes; a maioria poderá achar o seu fundo, um simples lugar comum.

Consiste no seguinte. Cada ponto da linha recta produz uma separação da linha em duas porções tais que cada ponto de uma delas se situa à esquerda de todos os pontos da outra. Ora eu vejo a essência da continuidade na proposição inversa, ou seja, no seguinte princípio:

Se todos os pontos de uma recta se distribuem por duas classes, de tal modo que cada ponto de uma delas se situa à esquerda de todos os pontos da outra, existe um e um só ponto que produz uma tal divisão de todos os pontos em duas classes, cortando assim a recta em duas porções.

Conforme já disse, julgo não errar ao esperar que todos admitam, desde logo, a verdade desta afirmação; por outro lado, a maioria dos leitores sentir-se-á muito desapontada ao saber que com esta banalíssima observação se desvenda o segredo da continuidade. Devo dizer, a este respeito, que me sinto satisfeito por todos poderem achar o princípio expresso evidente em harmonia com a sua própria ideia de linha, porquanto sou completamente incapaz de aduzir uma única prova da sua verdade, como de resto ninguém tem poderes para tal. A aceitação desta propriedade da linha é apenas um axioma pelo qual atribuímos à linha a sua continuidade, pelo qual definimos a sua continuidade. Se admitirmos que o espaço tem existência real, não é necessário que ele seja contínuo; manter-se-iam muitas das suas propriedades mesmo que fosse descontínuo. E ainda que soubéssemos o espaço descontínuo, nada nos poderia impedir, se assim o desejássemos, de preencher mentalmente as suas lacunas, tornando-o desta maneira contínuo; esse preenchimento consistindo em criarmos novos pontos, o que teria de ser realizado de acordo com o princípio atrás expresso."

4. O significado das ideias de Dedekind

Analisemos o princípio de Dedekind na prática. Tal como Cantor, Dedekind toma como ponto de partida o domínio dos números racionais mas, em vez de identificar o número real como uma sucessão convergente de racionais, vê o número real como se fosse gerado pela faculdade mental de classificar os números racionais. A este processo especial de classificação, chama ele *schmitt*, termo que pode ser traduzido por *partição de Dedekind*.

Esta partição é a réplica exacta do conceito de que Dedekind se serviu para definir continuidade numa linha. Tal como um ponto da linha a divide em duas regiões contíguas, não sobrepostas, assim constitui todo o número real um meio de dividir os números racionais em duas classes sem elementos comuns, mas que, justapostas, cobrem todo o domínio dos números racionais.

Reciprocamente, toda a equação, todo o sistema de classificação, todo o processo capaz de efectuar tal separação no domínio dos números racionais, identifica-se por essa razão com um número, é por definição um número real, um elemento do novo domínio.

Os números racionais constituem uma parte deste vasto domínio porque cada um deles pode ser considerado individualmente como um tal sistema de classificação (exemplo: os números menores ou iguais a 2 e os números maiores que 2). Mas, é evidente que não se podem esgotar com tão triviais partições as potencialidades de um princípio de tão vasto alcance. Nada, por exemplo, nos impede de separar, nos números racionais, todos aqueles cujos quadrados são inferiores ou iguais a um racional dado, por exemplo, o 2, e aqueles cujos quadrados são superiores a 2. Esta partição define, tal como no caso anterior, um número real, que poderemos identificar como o nosso velho amigo $\sqrt{2}$.

Por outro lado, embora as partições possam definir igualmente números racionais ou irracionais, a escolha de umas ou de outras, para base, não é indiferente porque há uma diferença essencial entre partições racionais e irracionais. O separador racional faz parte da classe *inferior*: é como o *político* que tivesse dividido um partido e aderido à ala esquerda; mas o separador irracional fica isolado: é como uma *questão* que tivesse dividido o partido, não ficando a fazer parte, evidentemente, de nenhuma das alas. E assim também o irracional que provocou a partição não pertence à classe inferior nem à superior, Por outras palavras: no caso racional a classe inferior tem um elemento máximo e a superior não tem mínimo, no caso irracional nem a classe inferior tem máximo nem a superior tem mínimo.

De acordo com a teoria de Dedekind, é este o único aspecto que distingue os dois tipos de números: é a característica do número racional *pertencer a uma das classes* e é a característica do irracional de *não pertencer a nenhuma*.

5. O postulado de Dedekind-Cantor

Apesar de Cantor e Dedekind não terem conseguido emancipar o contínuo da intuição do tempo, o antiquíssimo conflito entre as nossas noções de continuidade e o conceito científico de número, terminou com a vitória decisiva deste. A vitória foi-lhe garantida pela necessidade de confirmar, de legitimar, como se fora caso disso, um procedimento que desde os dias de Fermat e Descartes se tornara uma ferramenta indispensável da análise: a *geometria analítica*.

Ora a suposição tácita em que assentava a geometria analítica era a possibilidade de se representar os pontos de uma linha, e portanto pontos do plano e do espaço, por meio de números. Esta suposição equivale a admitir que se pode estabelecer uma correspondência perfeita entre os pontos de uma linha e os números reais. O grande êxito da geometria analítica, o facto de ela servir tão perfeitamente os objectivos quer da análise, quer da geometria, deram àquela suposição uma força pragmática irresistível. Tornava-se fundamental incluir tal princípio na estrutura lógica geral da matemática. Mas como?

Havia, por um lado, o conceito logicamente consistente do número real e do seu conjunto, o contínuo aritmético; por outro, as noções vagas do ponto e do seu conjunto, o contínuo linear. Tudo quanto havia a fazer era declarar-se a identidade dos dois, ou, o que vinha a dar no mesmo, a afirmar-se que:

É possível fazer corresponder a qualquer ponto da uma linha um único número real, e, reciprocamente, a qualquer número real corresponde um único ponto da linha.

É este o famoso postulado de Dedekind-Cantor. Este axioma, ao consagrar a suposição tácita em que se apoiou a geometria analítica durante mais de dois séculos, tornou-se o axioma fundamental desta disciplina. Tal como sucede com muitos outros, ele é na verdade uma definição encoberta: define uma nova entidade matemática, a *linha aritmética*. A partir deste momento, a linha - e por consequência o plano e o espaço - deixa de ser uma noção intuitiva para se reduzir a um mero portador de números.

Referências

1. Dantzig, Tobias, Número a Linguagem da Ciência, Astler, Lisboa, 1960.

CAPÍTULO 7. A NOÇÃO DE FUNÇÃO

1. Introdução

Toda a gente sabe que o volume de um cubo varia como a terceira potência da aresta, e que a superfície de um círculo varia como o quadrado do comprimento do seu raio. Ambas as relações se denominam funções. Mas as funções não interessam só aos matemáticos, pois também se utilizam em muitos outros campos, e disto poderíamos dar numerosos exemplos.

Todo o contribuinte sabe que os impostos que deverá pagar ao fim do ano estarão em função do seu rendimento durante esse ano (será?...). Se colocarmos uma determinada quantia de dinheiro a prazo num banco, sabemos que a quantia que retiraremos uma vez acabado o prazo dependerá da taxa de juro e da duração do prazo. Os alpinistas sabem que a pressão atmosférica varia em função da altitude.

Seguidamente trataremos de compreender como os matemáticos chegaram à formulação deste conceito que hoje nos é tão familiar.

2. Brevíssima digressão histórica

A definição geral de função dada no século passado pelo matemático alemão Gustav Dirichlet foi: *"Dizemos que y é função de x quando para qualquer valor de x se deduz um valor de y e só um"*. A x chama-se *variável independente* e a y chama-se *variável dependente*.

O facto de considerar uma grandeza como função de outra grandeza não é uma ideia recente: dois séculos antes da nossa era, o astrónomo grego Hiparco fez uma tabela em que se davam os valores das cordas correspondentes a vários arcos de circunferência, com o fim de facilitar os cálculos para localizar os astros no céu.

Durante muitos séculos foram frequentes nos livros de matemática as tabelas que davam para determinados valores de uma grandeza variável os valores correspondentes de outra grandeza dependente da primeira. As tabelas mais comuns deste tipo eram as trigonométricas e as logarítmicas.

No século XVII, o filósofo e matemático René Descartes descobriu que era possível "visualizar" as correspondências entre as grandezas dessas tabelas através de uma representação geométrica. Parece que foi exactamente no dia 10 de Novembro de 1619 que teve esta ideia simultaneamente simples e genial, que poderíamos resumir assim: traçam-se num plano dois eixos perpendiculares, OX e OY; procura-se sobre o eixo OX um ponto x_1 cujo comprimento seja proporcional a um determinado valor da variável independente; a partir deste ponto traça-se um segmento paralelo ao eixo OY e cujo valor seja proporcional ao valor y_1 que toma a variável dependente para o valor x_1 da variável independente. O conjunto de pontos obtidos deste modo representa a relação entre ambas as variáveis.

Até à definição rigorosa de função dada no século passado muitos são os exemplos de funções que foram sendo definidas e que contribuíram decisivamente para o crescimento científico da Humanidade. A título de exemplo, citemos apenas um caso. Ao tentar descobrir as leis que regem a queda dos corpos, o ilustre cientista italiano Galileu Galilei (1564-1642) deu-se conta de que no movimento de queda livre de um corpo a velocidade parece aumentar com o tempo. Dada uma série de intervalos iguais e consecutivos de tempo, a velocidade parece que aumenta em cada intervalo, isto é, a velocidade parece ser proporcional ao tempo decorrido a partir do momento em que o corpo é solto.

Isaac Newton, no seu Tratado das Curvas associa nitidamente à ideia de função a concepção de fluência: *"Considero aqui as quantidades matemáticas, não formadas pela adjunção de partes mínimas, mas descritas por um movimento contínuo. As linhas descritas, e portanto geradas, não por aposição de partes, mas pelo movimento contínuo de pontos; as superfícies pelo movimento de linhas; os sólidos pelo movimento de superfícies; os ângulos pela rotação de lados; o tempo por um fluxo contínuo, e assim para as outras. Estas gerações têm verdadeiramente lugar na natureza das coisas e revelam-se todos os dias no movimento dos corpos"*.

Não se pode ser mais nítido, não é verdade? De resto, o próprio nome que Newton dá às funções revela bem a sua atitude mental - chama-lhes *fluentes*; o uso do nome *função* só mais tarde se generaliza.

Surgido, lentamente, da necessidade de estudar leis naturais, o conceito de função achou-se, breve trecho, identificado com a relação analítica que define a correspondência entre duas variáveis. No princípio do século XVIII, um ilustre matemático suiço Jean Bernoulli (1654-1705), definiu função assim: *"chama-se aqui função duma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constantes"*. Para ele, portanto, função era a expressão analítica, e esse ponto de vista prevaleceu durante muito tempo e impregna ainda a linguagem de hoje.

Reconheceu-se porém que, devido a circunstâncias que não iremos desenvolver aqui, esse ponto de vista era insuficiente e que havia vantagem em *depurar* o conceito de função pondo em evidência o que nele havia de essencial - a correspondência das duas variáveis. Chegou-se deste modo, pelo final do século XIX, à definição moderna de *Riemann-Dirichlet*.

Conta a tradição que para verificar a exactidão da sua hipótese, Galileu mediu o tempo que demorava a cair uma bola do alto da Torre de Pisa. Na realidade, o que fez foi medir as distâncias percorridas por uma bola ao longo de um plano inclinado durante diferentes intervalos de tempo. Deste modo, a velocidade que a bola adquire é bastante menor, o que lhe facilitou as medições. Depois, através de um cálculo simples, pôde generalizar as suas experiências ao caso de um corpo que cai livremente.

Analisemos agora a questão da noção de função com um pouco mais de profundidade. Como surgiu concretamente? Qual a sua essência?

3. Ciência e realidade

O objectivo final da Ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenómenos naturais - fenómenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social.

Duas são as exigências fundamentais a que esse quadro explicativo deve satisfazer:

1. *Exigência de compatibilidade*. Obediência ao princípio de acordo da razão consigo própria.

2. *Exigência de acordo com a realidade.* Os homens pedem à Ciência que lhes forneça um meio, não só de conhecer, mas de prever fenómenos.

É evidente que, se as previsões fornecidas pelo quadro explicativo não forem confirmadas pela realidade, esse quadro pode satisfazer altamente a primeira exigência, mas nunca poderá ser o instrumento que os homens necessitam.

Entendamo-nos bem. A Ciência não tem, nem pode ter, como objectivo descrever a realidade tal como ela é. Aquilo a que ela aspira é a de construir quadros racionais de *interpretação* e *previsão*; a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação.

Em nenhum momento, o homem de ciência pode dizer que *atingiu a essência última* da realidade; o mais que pode desejar é dar uma descrição, uma imagem, que satisfaça às duas exigências fundamentais.

A *Realidade* que a inteligência dos homens se esforça por compreender, o Mundo, no seu sentido mais largo, apresenta-se com duas características essenciais:

1. *Interdependência*. Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda a *Realidade* em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros.

2. *Fluência*. O Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flui*, tudo *devém*. Isto, que é a afirmação fundamental do filósofo Heraclito de Efeso

foi, posteriormente, reconhecido por grandes pensadores e pode ser verificado por qualquer de nós, seja qual for aquele objecto em que fixemos a nossa atenção.

Comecemos por observar que as duas características fundamentais que apontámos - *interdependência* e *fluência* - nos colocam sérios embaraços ao pretendermos empreender o estudo de qualquer facto natural.

Se tudo depende de tudo, como fixar a nossa atenção num objecto particular de estudo? temos que estudar tudo ao mesmo tempo? mas qual o cérebro que o pode fazer?

Por outro lado, se tudo *devém*, como encontrar, no mundo movente da fluência, os factos, os seres, os próprios objectos do nosso estudo?

Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador *recorta, destaca*, dessa totalidade um conjunto de seres e factos, abstraindo-se de todos os outros que com ele estão relacionados. A um tal conjunto daremos o nome de *isolado*.

Tomemos um certo *isolado* de estudo; arrastado na fluência de todas as coisas, ele transforma-se - cada um dos seus componentes *devém* a todo o instante uma coisa nova. Alterando-se constantemente os elementos constitutivos, alteram-se as suas relações, isto é, as suas *qualidades*, e o *isolado* aparece a todo o momento com qualidades novas.

Rigorosamente , deveríamos dizer que a cada momento temos um *isolado novo*, mas, pelo mesmo acto (acto justificado pela necessidade e comodidade de estudo), diremos que o isolado *evoluciona* e que os diferentes estados observados correspondem, não a *isolados* novos, mas a diferentes *fases de evolução* do isolado inicial. Este modo de ver é, naturalmente, condicionado e limitado pela própria natureza da evolução - pode chegar uma certa altura em que o isolado apresente qualidades de tal modo diferentes que não haja vantagem ou possibilidade de o considerar o mesmo. Vai aqui muito do bom-senso do observador e das conveniências do seu estudo.

O aparecimento de qualidades novas no decurso da evolução de um isolado, ou sua transformação noutro com estrutura qualitativa diferente, põe em evidência a ligação íntima entre os conceitos de *qualidade* e quantidade. A intensificação de uma quantidade, que contraria a qualidade estrutural de um isolado, pode chegar a destruir essa qualidade e a fazer surgir uma qualidade nova. É com esse significado que se fala na *transformação de uma quantidade em qualidade*. O ponto (ponto como indicativo de um conjunto de condições) em que essa transformação se dá chama-se *ponto crítico* da evolução do isolado.

4. Noção de lei

À evolução de um isolado chamaremos *lei natural*. Fenómenos naturais são, portanto, o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a acção do calor, a passagem duma corrente eléctrica num condutor, a germinação duma semente, o exercício de direitos políticos pelos cidadãos, etc. Em virtude desta definição, explicar um fenómeno é explicar a evolução dum isolado.

Essa evolução manifesta-se pela alteração das qualidades dos componentes do isolado; logo, *explicar um fenómeno é dar o porquê da alteração das qualidades*. Mas, esse porquê como atingi-lo?

O trabalho do cientista é, portanto, o de observar e descrever os fenómenos e ordenar os resultados da sua observação num *quadro explicativo* - construção intelectual - coerente, e cujas consequências e previsões sejam confirmadas pela observação e experimentação.

A observação mostra que há certos fenómenos que apresentam *regularidades*, isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas. A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a *repetição* e *previsão*, desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, *repetir* e *prever* é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de "dominar" a Natureza. Toda a *técnica* se baseia nisso.

Daqui resulta que uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a *procura de regularidades* dos fenómenos naturais.

Definição: *Chamaremos* ***lei natura****l a toda a regularidade de evolução de um isolado.*

Com esta explicação, e do que anteriormente se disse, fica estabelecido que o quadro explicativo que os homens procuram construir deve assentar sobre leis naturais, e que na sua procura e ordenação deve consistir o objectivo essencial da Ciência.

5. Diferentes tipos de lei

Estamos de posse do conceito de lei; percebe-se que, conforme a natureza do isolado e da sua evolução, possa haver dois tipos fundamentais de lei:

lei qualitativa - aquela que diz respeito a variação de qualidade;

lei quantitativa - aquela que diz respeito a variação de quantidade.

Que estes dois tipos não podem ser rigidamente separados é evidente em virtude do que já foi dito; *a utilidade da distinção está em que a lei acentua, por vezes, um ou outro aspecto da Realidade*. Frequentemente, mesmo, a lei põe em evidência a ligação íntima da qualidade e quantidade, de modo tal que se não pode classifica-la em nenhum dos dois tipos; diremos então que se trata duma lei *qualitativa-quantitativa* (em rigor, todas o são).

Vejamos alguns exemplos de leis:

1. [1ª Lei de Kepler (1571-1630)] Cada planeta descreve em torno do Sol uma elipse, da qual o Sol ocupa um dos focos.

2. [Lei da gravitação de Newton (1642-1727)] Entre dois corpos desenvolve-se uma força atractiva que é directamente proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa.

3. [1ª Lei da psicologia funcional de Claparède] Toda a necessidade tende a provocar as reacções próprias e dar-lhe satisfação.

4. [Lei da queda dos graves] Para todo o corpo em queda livre no vácuo, as alturas de queda são directamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda.

Destas quatro leis, a primeira e a terceira podem ser consideradas leis qualitativas, a segunda e a quinta como leis quantitativas, com as restrições que acima pusemos à classificação.

6. Primado da explicação quantitativa

A Realidade existe independentemente da nossa vontade. Mergulhados na fluência universal e tendo necessidade, para fins humanos, de a explicar, lançamos, sobre ela, toda uma teia de leis - regularidades dos fenómenos tais como se nos revelam.

A tonalidade geral dessas leis, o tipo dominante delas, é qualitativo ou quantitativo? A história da Ciência dá a esta pergunta uma resposta nítida - *à medida que a Realidade se vai conhecendo melhor, o primado tende a pertencer ao tipo quantitativo.*

Não é que a Ciência, no seu avanço, tenda a pôr de parte a *qualidade*, e isso seria, mesmo, absurdo, uma vez que as qualidades traduzem as relações de interdependência dos seres uns com os outros, e a *interdependência* é, precisamente, uma das características essenciais da Realidade. Mas a Ciência não se ocupa apenas de *descrever*, empreende a tarefa de *explicar* e, nesta, há um facto que se impõe com força cada vez maior - *para obter a explicação das variações de qualidade há que aprofundar o estudo das variações de quantidade*.

Por exemplo, a *1ª Lei de Kepler* é uma lei qualitativa; pois muito bem: essa lei e as outras duas leis de Kepler (estas quantitativas) estão englobadas, como se demonstra sem grande dificuldade, na lei da gravitação universal de Newton, que é o tipo perfeito de lei quantitativa.

Por toda a parte, em todos os ramos do conhecimento, há esta tendência para o quantitativo, para a medida, de modo tal que pode afirmar-se que o estado *propriamente científico* de cada ramo só começa quando nele se introduz a *medida* e o estudo da variação quantitativa como explicação da variação qualitativa.

7. Intervenção da Matemática

É natural esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a *lei quantitativa*, surja também o conceito matemático próprio para o seu estudo; esperar aqui, ainda, que a necessidade crie o instrumento.

Não poderemos esperar, decerto, que esse instrumento tenha saído dum jacto, pronto e acabado; que aos cientistas se tenha apresentado a questão assim: - temos aqui uma multidão de leis quantitativas, vamos criar o instrumento próprio de estudo. Muito longe disso! Deu-se uma gestação lenta em que a necessidade e instrumento inter-actuaram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente.

Suponhamos que temos que estudar uma variação de quantidade; seja, para fixar ideias, a variação quantitativa de espaço e tempo no fenómeno da queda dos graves no vácuo. Suponhamos realizadas as condições físicas necessárias - o isolado conveniente - e procuremos a *regularidade* do fenómeno: a *lei quantitativa*. Que fazemos? Medimos as alturas da queda em intervalos de tempo iguais, e estudamos depois a variação dessas alturas de queda: é claro que, quanto mais pequenos forem os intervalos de tempo em que fazemos as medições, melhor se conhecerá a variação. Suponhamos que se fizeram as medições de segundo em segundo e que se encontraram os valores seguintes:

tempo (segundos)	0	1	2	3	4	...
espaços (metros)	0	4.9	19.6	44.1	78.4	...

Não é, evidentemente, nesta simples tabela que se encontra toda a regularidade, a *lei quantitativa*; mas ela dá uma primeira ideia dessa lei. Em que consiste, no fundo, esta tabela? Em duas sucessões, dois conjuntos, de números - o dos tempos, que representaremos por t, e o dos espaços, que representaremos por e - postos em correspondência um com o outro, correspondência essa da qual podemos afirmar que é *unívoca no sentido de t para e*, visto que não podemos evidentemente, conceber um movimento de queda em que, ao fim de um certo tempo, o mesmo corpo tenha percorrido dois espaços diferentes. Onde está a lei quantitativa de que aquela tabela nos dá uma apenas uma primeira aproximação? - A lei está na forma como essa correspondência de conjunto t ao conjunto e se realiza; se a correspondência mudar, mudarão os consequentes - aqui os espaços - mudará, por consequência, a variação, mudará a lei.

Então em que consiste, afinal, a lei? - Na forma de correspondência dos dois conjuntos. Se, por consequência, queremos estudar as leis quantitativas, *temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos*.

8. Noção de variável

Estamos de posse da ideia fundamental do instrumento a criar; de que se trata agora é de, com os materiais colhidos, fazer a montagem do instrumento e aperfeiçoá-lo.

O instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar facilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos. Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de *variável*, o que se faz de forma seguinte:

Definição: *Seja (E) um conjunto qualquer de números, finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo x. A esse símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto E, chamamos* ***variável****.*

Quando dizemos, por exemplo: seja E o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua *variável*, que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da *vida* *colectiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, *mas não se reduz a ela*.

A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível de isolado - o conjunto - superior ao número, é, ela própria, de uma natureza superior. Isto é perfeitamente compreensível dentro do quadro geral de ideias que esboçámos; no entanto, o carácter contraditório do conceito - a variável *é e não é* cada um dos elementos do conjunto - deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu carácter essencial - síntese do *ser e não ser* - ela sai fora daquele quadro de ideias que quer ver na Realidade uma *permanência* e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na *fluência* a primeira das suas características.

Uma variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que representa - a sua *substância*, o seu *domínio*, como daqui em diante diremos.

9. Noção de função

Voltemos ao exemplo da lei da queda dos graves. Como foi dito, esta consiste na correspondência do conjunto dos tempos ao conjunto dos espaços; estamos agora em condições de criar o instrumento matemático cuja essência seja essa correspondência. Seja t a *variável* do conjunto dos tempos e e a *variável* do conjunto dos espaços; a lei consiste na existência duma dada correspondência entre t e e, correspondência de que sabemos que é unívoca no sentido $t \rightarrow e$. Diremos que a *variável* e é função da *variável* t, e escrevemos simbolicamente $e = f(t)$; à variável t, antecedente da correspondência, chamamos *variável independente*; à variável e chamaremos *variável dependente*.

Assim o conceito de *função* aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis. Reparemos que, quando dizemos que $e = f(t)$, dizemos mais qualquer coisa do que o que está na tabela apresentado no ponto 7; nesta, estão apenas indicados *alguns* pares de valores da correspondência, ao passo que na afirmação $e = f(t)$ está implicado que a *qualquer* valor t corresponde um valor (e um só) de e. Por aqui pode começar a ver-se já a força latente que este novo instrumento traz em si.

Definição: *Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é* ***função*** *de x e escreve-se*

$$y = f(x)$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. *A x chama-se variável independente e a y variável dependente.*

Referências

1. Caraça, Bento de Jesus, Conceitos Fundamentais da Matemática, Livraria Sá Costa, 9ª edição, Lisboa, 1989.

2. Castro, Francisco Lyon (ed.), Enciclopédia Juvenil Alfa Estudante, Alfa, Lisboa, vol. 10, pp 194-200.

CAPÍTULO 8. A GEOMETRIA ANALÍTICA E O CÁLCULO

Geometria analítica

1. Introdução

Quando ouvimos falar das profundas alterações que a ciência introduziu na nossa forma de viver, pensamos naturalmente na física e química. Menos evidentes, porque mais difusos, são os benefícios que a matemática nos concedeu. É um facto, e nós sabemo-lo, que a matemática desempenhou o seu papel nas teorias que tornaram possíveis essas invenções, e da mesma forma nos projectos que a elas levaram. Mas a matemática é do puro domínio dos especialistas. Enquanto, na vida do dia-a-dia, o homem pode colher benefícios do conhecimento dos elementos que compõem a água ou da diferença entre ondas curtas e ondas longas, o estudo da geometria ou do cálculo pouco contribuirá para o seu bem-estar.

Entre as ricas conquistas matemáticas há, porém, algumas que, mesmo neste sentido prático se podem considerar invenções úteis, por terem penetrado na vida diária do homem. A elas pertencem a numeração de posição que colocou as operações ao alcance do homem médio. De tal utilidade imediata é também o simbolismo da álgebra, especialmente a *logística speciosa* de Viète, que, nos fins do século XVI, marcou o ponto de viragem da história da álgebra. Viète ou, à latina, Fanciscus Vieta, pôs à nossa disposição as formas condensadas das relações gerais, até então apenas acessíveis a muito poucos. Também a esta categoria pertence a grande invenção que René Descartes (1596-1650) deu ao mundo, o *diagrama analítico* - o qual dá um relance, uma imagem gráfica da lei que rege um fenómeno, ou da correlação que existe entre acontecimentos interdependentes, ou das alterações produzidas numa situação com o correr do tempo.

É um facto a registar o de as invenções matemáticas mais acessíveis às massas terem sido as que maior influência exerceram no desenvolvimento da matemática pura. O princípio da posição deu-nos o *zero* sem o qual não se teria desenvolvido o conceito de número negativo; deu-nos também a possibilidade de uniformizar as equações e tornou possível o teorema da sua decomposição em factores. A notação literal fez com que a matemática deixasse de ser o estudo do particular para passar a estudar o geral, e, simbolizando o impossível preparou o caminho para o conceito generalizado de número.

Finalmente a invenção de Descartes, não criou apenas a importante disciplina da geometria analítica, mas deu a Newton, Leibniz, Euler e aos Bernoulli a arma sem a qual Arquimedes teve de deixar inarticuladas as suas ideias profundas e de tão vasto alcance.

2. *Proles sine mater creata*

"Filhos sem mãe". Com estas palavras classificou Casles a conquista de Descartes. Com igual injustiça para quanto os precedeu, podia ter-se dito o mesmo do princípio de posição ou da notação literal! A origem do primeiro fomos nós encontra-la na coluna vazia do ábaco, e a segunda não é senão o aperfeiçoamento do simbologismo retórico praticado desde os tempos imemoriais, por matemáticos e para-matemáticos.

De modo semelhante, a grande invenção cartesiana tem as suas raízes nos famosos problemas da antiguidade, nascidos nos dias de Platão. Ao tentar resolver os problemas de trissecção do ângulo, do dobro do cubo e da quadratura do círculo, nada conseguindo com régua e compasso, os geómetras gregos procuraram novas curvas. Tropeçaram então nas *cónicas*, ou seja, as curvas segundo as quais um plano pode cortar um cone de revolução: a *elipse*, a *hipérbole* e a *parábola*. A elegância destas curvas, de tal modo fascinou os geómetras gregos que estes passaram a estuda-las em consideração por elas mesmas. O grande Apolónio escreveu, sobre elas, um tratado em que descreveu e demonstrou as suas propriedades mais importantes.

Nele encontramos o embrião do método que mais tarde Descartes elevou à categoria de princípio. Apolónio referiu a parábola ao eixo e à tangente principal e mostrou que a semi-corda era o meio proporcional entre o Latus Rectum e a altura do segmento. Exprime-se hoje essa relação pela equação cartesiana $x^2 = Ly$, chamando-se à altura y a *ordenada* e à semi-corda x a *abcissa*; o Latus Rectum é o coeficiente de y, isto é, o L.

É significativo o facto de os gregos chamarem a estas curvas, e a muitas outras que descobriram, *lugares geométricos*; descreviam-nas assim como sendo os *lugares* de todos os pontos que tinham determinada posição mensurável em relação a um determinado sistema de referência. Deste modo, a elipse era o *lugar geométrico* dos pontos tais que era constante a soma das suas distâncias a dois pontos fixos. Uma tal equação era de facto uma *equação retórica* da curva, pois exprimia o critério que permitia verificar se um dado ponto pertencia ou não pertencia à curva.

E foi, realmente, nesse sentido que, de tais curvas, se serviu Omar Khayyam, nos finais do século XI e princípios do século XII (morreu em 1123), para descobrir uma solução gráfica para a equação cúbica por meio de duas cónicas. Estes métodos foram depois aperfeiçoados pelos matemáticos italianos da Renascença e por Vieta. Na realidade, foram problemas desta natureza que levaram Vieta a desenvolver a sua *logística speciosa*.

Por último, mas nem por isso menos importante, considere-se o seguinte trecho dum ensaio escrito por Pierre Fermat (1601-1665) em 1629 mas publicado apenas 40 anos mais tarde, ou seja 30 anos depois da publicação da *Geometria* de Descartes:

"Sempre que duas incógnitas entram numa equação final, temos um lugar geométrico, descrevendo, a extremidade de uma das incógnitas uma linha recta ou curva. A linha recta é simples e única; as classes de curvas são infinitamente numerosas: círculo, hipérbole, parábola, etc...

É desejável, para melhor se conceber a equação, supor-se que as incógnitas formam entre si um ângulo, que admitimos ser um ângulo recto."

Não, a geometria cartesiana será tudo menos um filho sem mãe. Poderemos dizer que a concepção de Descartes tinha, não só uma mãe - a geometria dos gregos -, mas também um irmão gémeo. Na verdade, basta um estudo superficial da *Geometria* de Descartes e da *Introdução aos lugares planos e sólidos* de Fermat para revelar a existência de um desses fenómenos geminados que a história da matemática é tão fértil. No mesmo século na verdade, na mesma geração, assistimos à descoberta de Desargues-Pascal da geometria projectiva e à descoberta de Pascal-Fermat dos princípios da teoria matemática das probabilidades. Mas esses fenómenos de modo algum se confinam ao século XVII. No século XVIII deu-se o incidente Newton-Leibniz; o século XIX assistiu à descoberta quase simultânea duma interpretação das grandezas complexas, por Wessel, Argand e Gauss; a concepção quase simultânea das geometrias não euclidianas, por Lobatchevski, Bolyai e Gauss; e, nas últimas décadas do século passado à formulação do contínuo de Dedekind-Cantor.

3. Um princípio unificador

Nem Fermat nem Descartes imaginavam todo o significado da sua descoberta. Estavam ambos interessados na criação de um princípio unificador da geometria, Fermat como matemático (apesar de amador), Descartes do ponto de vista do filósofo. A geometria grega, que atingiu a sua expressão final nas obras de Euclides e Apolónio, não tem essa unidade: cada teorema, cada construção, mais parece ser uma criação artística que a aplicação de princípios gerais. Qual a ideia que se ocultava por detrás desta ou daquela construção? Porque razão se podiam resolver alguns problemas com uma simples régua, enquanto outros igualmente exigiam compasso e outros ainda não cediam à habilidade dos gregos, os velhos mestres da régua e do compasso? Estas e outras dúvidas semelhantes agitavam os espíritos matemáticos da época, entre os quais Fermat e Descartes.

Estes buscaram na álgebra a chave do enigma; procederam, por isso, à *algebrização* da geometria e o resultado foi a geometria analítica. Assentaram, assim, os alicerces do processo por meio do qual se pode reduzir a prosaicas manipulações algébricas qualquer problema de geometria. Deste modo, os famosos problemas da antiguidade, nascidos envoltos em esplendor lendário, durante séculos motivo de fascinação para muitos matemáticos de envergadura, foram postos de lado por Descartes pela razão evidente de que todo o problema que leva a uma equação do primeiro grau admite solução geométrica por meio de uma régua simples; uma construção com régua e compasso é equivalente à solução duma equação quadrática; mas se o problema leva a uma equação *irredutível* de grau superior ao segundo, a sua solução geométrica não é possível apenas por meio da régua e do compasso.

4. As bases da nova matemática

Descartes (e o mesmo se aplica, naturalmente, a Fermat) não suspeitava de que estava lançando as bases de uma matemática nova; o seu intuito confessado era a sistematização da geometria dos antigos. Foi esse, efectivamente, o papel que o século XVII desempenhou na história da matemática: ele foi a *idade da liquidação* da cultura matemática antiga. Na obra de Galileu, Fermat, Descartes, Pascal e vários outros, vê-se a culminação de um processo histórico que nunca poderia ter alcançado o vértice num período de declínio geral. A indiferença romana e a longa Idade das Trevas de obscurantismo religioso impediram o ressurgimento daquele processo durante quinhentos anos.

Simultaneamente, enquanto se removiam os escombros da antiga matemática, o génio destes homens preparava o terreno para a nova. As características essenciais do pensamento matemático moderno são a *permanência das leis formais* e o *princípio da correspondência*. O primeiro levou ao conceito generalizado de número, o segundo permitiu a determinação do parentesco entre conceitos aparentemente remotos ou dissemelhantes. Embora faltasse a Descartes o conhecimento, ainda que simplesmente implícito, destes dois princípios fundamentais da moderna matemática, a sua geometria analítica continha tudo quanto era necessário para os criar.

Tratava-se de uma álgebra que implicitamente admitia os irracionais em pé de igualdade com as grandezas racionais. Uma álgebra que se aplicava aos problemas clássicos da geometria e que, por processos metódicos e directos levava aos mesmos resultados que os gregos - presos, como estavam, ao mais estrito rigor, e peados pelo medo dos irracionais e do infinito - obtinham por processos engenhosos, mas não metódicos. Em segundo lugar, a geometria analítica representa o primeiro exemplo histórico do estabelecimento de laços de parentesco entre dois ramos da matemática, não apenas remotos pela sua própria natureza, mas até mesmo considerados, desde os primeiros dias, como sendo directamente antagónicos: *aritmética* e *geometria*.

Descartes admitiu implicitamente que, entre os números reais e os pontos de um eixo, existia perfeita correspondência. Mas ele admitiu mais que isso tacitamente, porque o facto parecia tão natural que dispensava palavras, aceitou como axiomático que *se pode estabelecer uma correspondência perfeita entre os pontos dum plano e o conjunto de todos os pares de números reais*. Deste modo, o postulado de Dedekind-Cantor, generalizado a duas dimensões, incorpora-se tacitamente numa disciplina criada duzentos anos antes de Dedekind ou Cantor terem vindo à luz. Esta disciplina, de facto, tornou-se o campo de experiência para todas as realizações dos dois séculos que se seguiram: o cálculo, a teoria das funções, a mecânica, a física. Nunca ela, a geometria analítica, esbarrou com contradições; e tal é o seu poder de sugerir novos problemas e prever os seus resultados que, onde quer que se aplicasse, depressa se tornou uma indispensável ferramenta de investigação.

5. A geometria cartesiana

Tomem-se dois eixos perpendiculares e atribua-se a cada um deles um sentido; qualquer ponto contido no plano definido pelos eixos pode agora representar-se por dois números. Qualquer destes pode ser positivo ou negativo, racional ou irracional, e representa a *medida* das distâncias do ponto dado aos eixos de referência, precedidas dos sinais mais ou menos, conforme o *quadrante*, definido pelos eixos, em que o ponto se encontra.

O princípio é tão simples, tão natural, que custa a acreditar que tenham sido necessários três mil anos para o descobrirem. O fenómeno é tão impressionante como o que se passou com o princípio de posição, na numeração. Este contém-se implicitamente na estrutura da nossa linguagem numérica e apesar disso só ao cabo de quinhentos anos foi descoberto. O primeiro é consequência directa da estrutura simétrica do corpo humano e usou-se, desde tempos imemoriais, para definir a posição mútua dos objectos. Vamos mesmo encontrar este princípio utilizado nas velhas histórias de fadas em que se define a localização de um tesouro; vemos que os velhos topógrafos egípcios o aplicavam explicitamente traçando uma linha Norte-Sul e outra Este-Oeste e a estes eixos referiam a posição de qualquer objecto.

A transição do processo prático para a geometria analítica dependia, sem dúvida, da criação do zero e do conceito do número negativo. Mas estes já eram conhecidos na Europa desde os tempos de Fibonacci. Porque não ocorreu então mais cedo aos matemáticos o *princípio coordenativo*? Pode encontrar-se a resposta na profunda influência que a opinião grega exerceu no pensamento europeu. A emancipação do número das inibições que os gregos lhe impuseram não foi tarefa fácil.

O cálculo

1. Introdução

Não pretendo efectuar uma abordagem exaustiva à história do cálculo pois, além de ser uma tarefa para a qual não estou preparado, os seus primórdios são mais ou menos conhecidos de todos. Assim irei concentrar-me apenas nas contribuições de alguns matemáticos como é o caso de Fermat, Newton e Leibniz e, ainda assim, de uma forma muito superficial. Um estudo mais completo pode ser feito com a consulta da História da Matemática de Boyer, por exemplo.

2. Integração no século XI no Egipto

Desde que Arquimedes, no século III a.C., desenvolveu o método da exaustão que aplicou à determinação da área de um sector parabólico, até que Newton e Leibniz inventaram o cálculo diferencial nos séculos XVII-XVII e desenvolveram as técnicas necessárias para a determinação de áreas e volumes de (quase) todas as figuras irregulares, muitos resultados parciais apareceram. Em particular, durante a Idade Média, em que toda a cultura europeia marcava passo e a actividade científica era particularmente desenvolvida no mundo islâmico, na Índia e na China, vários resultados apareceram, essencialmente baseados no método de Arquimedes, que permitiram a determinação de áreas e volumes de figuras relativamente complexas.

Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (965-1039) era conhecido na Europa pelo nome de Alhazen, tendo-se tornado célebre o seu problema de encontrar o ponto ou pontos numa superfície reflectora onde a luz de um de dois pontos fora da superfície se reflecte no outro; este problema, que ficou conhecido como "problema de Alhazen" foi resolvido no seu trabalho de óptica em sete volumes, que foi traduzido para latim no século XII. Ibn al-Haytham nasceu em Basra (no actual Iraque) e foi contratado pelo califa egípcio al-Hakim para colaborar num projecto de controlo do rio Nilo.

Durante esse trabalho, ibn al-Haytham determinou o volume de um parabolóide de revolução, baseado no método de exaustão e numa interessante fórmula que, na simbologia actual, pode ser escrita na forma

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^k\right)$$

e que se pode provar, para todo o k, pelo método de indução sobre n.

3. A Europa da Renascença

Ainda antes de Newton e Leibniz, Fermat e Roberval, em 1636, usaram métodos semelhantes para concluir que a área sob o gráfico de x^k, no intervalo $[0,a]$, é dada por

$$\frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Além destes dois matemáticos, Cavalieri, em 1626, tinha já desenvolvido um método para calcular a referida área usando um método muito próximo do de Arquimedes. As investigações históricas não permitem concluir se estes matemáticos tiveram conhecimento dos trabalhos dos cientistas islâmicos ou indianos. Isso é admissível, pois muitos trabalhos de autores islâmicos (ou traduções para árabe) foram traduzidas para latim no século XII, no sul de Espanha. A título exemplificativo, iremos abordar apenas o contributo dado por Fermat.

Como já foi dito, Fermat foi um dos co-autores da geometria analítica. No entanto, Fermat não publicou quase nada durante toda a sua vida. É uma pena, pois a sua exposição era muito mais sistemática e didáctica que a de Descartes. Além disso, a sua geometria analítica era tanto mais próxima da nossa no facto de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abcissas. É possível que Fermat, desde 1629 estivesse de posse da sua geometria analítica, pois por essa época ele fez duas descobertas que se relacionam de perto com o seu trabalho sobre lugares. A mais importante dessas foi descrita alguns anos depois num tratado, também não publicado durante a sua vida, chamado *Método para achar máximos e mínimos*.

Fermat estava a estudar os lugares dados (na notação moderna) por equações da forma $y = x^k$; por isso elas são chamadas frequentemente "parábolas de Fermat" se $n > 0$ e "hipérboles de Fermat" se $n < 0$. Aqui temos uma geometria analítica de curvas planas de grau superior; mas Fermat foi além. Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto x com o valor de $f(x+E)$ num ponto vizinho. Em geral, esses valores eram bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação era quase imperceptível. Portanto, para achar os pontos de máximo e de mínimo, Fermat igualava $f(x)$ a $f(x+E)$, percebendo que os valores, embora não exactamente iguais, são quase iguais. Quanto maior o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação a ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E, fazia $E = 0$. Os resultados davam-lhe as abcissas dos pontos de máximo e de mínimo do polinómio. Aqui temos, em essência, o processo que hoje chamamos diferenciação, pois o método de Fermat equivale a achar

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

e igualar isso a zero.

Evidentemente, Fermat não tinha o conceito de limite, mas por outro lado o seu método para máximos e mínimos assemelha-se ao usado no cálculo de hoje, só que agora usa-se, em geral, o símbolo h ou Δx em lugar do E de Fermat. O processo de Fermat de mudar ligeiramente a variável e considerar valores vizinhos é a essência da análise infinitesimal.

Durante os anos em que Fermat desenvolveu a sua geometria analítica, ele descobriu também como aplicar o seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$. Se P é um ponto da curva $y = f(x)$ da qual se procura a tangente, e se as coordenadas de P são $(a, f(a))$, então um ponto vizinho P' da curva com coordenadas $(a+E, f(a+E))$ estará tão perto da tangente que se pode pensar nele como estando aproximadamente sobre a tangente. Portanto, se considerarmos T o ponto de intersecção da tangente com o eixo das abcissas, Q o ponto de coordenadas $(a, 0)$ e Q' o ponto de coordenadas $(a+E, 0)$, os triângulos TQP e $TQ'P'$ podem ser considerados (praticamente) semelhantes. Tem-se então a proporção

$$\frac{f(a)}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E},$$

em que c é a distância que vai de T a Q. Multiplicando em cruz, dividindo tudo por E e, finalmente, tomando $E = 0$, acha-se o valor de c, ou seja, a recta tangente.

O processo de Fermat equivale a dizer que

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

é a inclinação da tangente em $x = a$; mas Fermat não explicou satisfatoriamente o seu processo dizendo apenas que era semelhante ao seu método para máximos e mínimos.

Fermat não só tinha um método para achar a tangente de curvas da forma $y = x^k$, mas também, algum tempo depois de 1629, achou um teorema sobre a área dessas curvas - o teorema que Cavalieri publicou em 1635 e 1647. Para achar a área Fermat a princípio parece ter usado fórmulas para as somas das potências dos inteiros, ou desigualdades da forma

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k > \frac{n^{k+1}}{k+1} > 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k$$

para estabelecer o resultado para todos os inteiros positivos de k. Isto já era um progresso sobre a obra de Cavalieri que se limitou aos casos $k = 1, 2, \ldots, 9$; mas mais tarde Fermat desenvolveu um método para melhor tratar o problema, que se aplicava a valores tanto fraccionários como inteiros de k.

Seja a curva $y = x^k$ e suponhamos que se procura a área sob a curva desde $x = 0$ até $x = a$. Então Fermat subdividia o intervalo $\left[0, a\right]$ numa infinidade de subintervalos, tomando os pontos $a, aE, aE^2, aE^3, \ldots$, onde E é uma quantidade menor que um. Nesses pontos ele levantava ordenadas da curva e depois aproximava a área sob a curva por meio de rectângulos. As áreas dos rectângulos circunscritos, a começar pelo maior, são dadas pelos termos da progressão geométrica

$$a^k(a - aE), a^k E^k(aE - aE^2), a^k E^{2k}(aE^2 - aE^3), \ldots .$$

A soma infinita desses termos é

$$\frac{a^{k+1}(1-E)}{1-E^{k+1}} = \frac{a^{k+1}}{1 + E + E^2 + \cdots + E^k}.$$

Quando E tende para um (os rectângulos tornam-se cada vez mais estreitos), a soma das áreas aproxima-se da área da curva. Fazendo $E = 1$ na fórmula acima, obtemos

$$\frac{a^{k+1}}{k+1},$$

a área procurada.

Para mostrar que isso vale para valores racionais fraccionários, tomemos $k = p/q$. A soma da progressão geométrica é então

$$\frac{a^{(p+q)/q}(1-E^q)}{1-E^{p+q}} = \frac{a^{(p+q)/q}}{1 + E + E^2 + \cdots + E^{p+q+1}}$$

e, quando $E = 1$, fica

$$\frac{q}{p+q} a^{(p+q)/q}.$$

Se, em notação moderna, queremos obter

$$\int_a^b x^k dx$$

basta observar que isso é

$$\int_0^b x^k dx - \int_0^a x^k dx.$$

Para valores negativos de k (excepto $k = -1$), Fermat usava um processo semelhante, só que E é tomado como maior que um e se aproxima de um "por cima", sendo a área encontrada a que se acha sob a curva desde $x = a$ até infinito. O raciocínio era semelhante ao caso anterior quando se pretendia calcular a área num intervalo $\left[a, b\right]$.

Para $k = -1$ o processo falha; mas um contemporâneo (mais velho) de Fermat, Gregório St. Vincent (1584-1667) resolveu esse caso, no seu trabalho *Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cónicas*. Grande parte dessa obra tinha sido concluída antes de Fermat trabalhar com tangentes e áreas, talvez entre 1622 e 1625, embora não fosse publicada até 1647.

Nesse tratado St. Vincent mostrava que se ao longo do eixo das abcissas se marcarem pontos a partir de $x = a$ tais que os intervalos entre eles cresçam em progressão geométrica, e se nesses pontos se levantarem as ordenadas da hipérbole $xy = 1$, então as áreas sob a curva interceptadas entre ordenadas sucessivas são iguais. Isto é, enquanto que a abcissa cresce geometricamente, a área cresce aritmeticamente. Assim, o equivalente a

$$\int_a^b x^{-1} dx = \ln b - \ln a,$$

era conhecido no tempo de St. Vincent. Infelizmente, uma aplicação errada do método dos indivisíveis levara St. Vincent a acreditar que tinha quadrado o círculo, erro que prejudicou a sua reputação.

Fermat ocupara-se de muitos aspectos da análise infinitesimal. Dificilmente poderia deixar de notar que ao achar as tangentes de $y = cx^k$ multiplica-se o coeficiente pelo expoente e baixa-se o expoente de uma unidade, ao passo que para achar áreas aumenta-se o expoente uma unidade e divide-se pelo novo expoente. Poderia a natureza inversa destes dois problemas ter-lhe escapado? Embora isso seja improvável, no entanto ao que parece em lugar nenhum ele chamou a atenção para a relação a que hoje se chama o *teorema fundamental do cálculo*.

4. Newton

Isaac Newton nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, o ano da morte de Galileu. O jovem Newton ingressou no Trinity College em 1661, provavelmente sem pensar a ser um matemático, pois não estudou particularmente o assunto. Porém, no início do seu primeiro ano, ele comprou e estudou um exemplar de Euclides, e logo depois leu a *Clavis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Des Cartes* de Shooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Vieta, e o que talvez tenha sido o mais importante de todos para ele, *Arithmetica infinitorum* de Wallis. Além disso, a esse estudo devemos acrescentar as aulas que Barrow deu como *"lucasian professor"*, e < que Newton assistiu, depois de 1663. Também veio a conhecer as obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros. Não admira que Newton mais tarde escrevesse a Hooke, *"Se eu vi mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes"*.

Durante boa parte de 1665-1666, o Trinity College foi fechado por causa da peste, e Newton foi para casa para viver e pensar. O resultado foi o mais produtivo período de descoberta matemática jamais referido, pois foi durante esses meses, Newton mais tarde afirmou, que ele fez quatro das suas principais descobertas: (1) o teorema binomial, (2) o cálculo, (3) a lei da gravitação e (4) a natureza das cores. A primeira delas parece-nos tão evidente agora que é difícil ver por que é que a descoberta tardou tanto. Havia pelo menos meio milénio que os coeficientes binomiais para potências inteiras eram conhecidos. Cardan e Pascal, entre outros, conheciam perfeitamente a regra de sucessão para coeficientes; mas eles não usavam a notação exponencial de Descartes, por isso não podiam fazer a transição relativamente simples de potência inteira para fraccionária. Só com Wallis os expoentes fraccionários entraram no uso comum, e mesmo ele não foi capaz de escrever uma expansão para $(x - x^2)^{1/2}$ ou para $(1 - x^2)^{1/2}$. Coube a Newton fornecer tais expansões como parte do seu método de séries infinitas.

O próprio Newton nunca publicou o teorema binomial, nem o provou; mas redigiu e finalmente publicou várias exposições da sua análise infinita. A primeira dessas, cronologicamente, foi a *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta em 1669 com base em ideias adquiridas em 1665-1666, mas publicada em 1711. Nela Newton afirmou que os processos infinitos também são matemática legítima e, como tal, deveriam ser usados sem qualquer receio, isto é, Newton acabou de matar o fantasma do infinito herdado dos gregos.

A *De analysi* de Newton tinha mais conteúdo, é claro, que algum outro trabalho sobre séries infinitas; é também de grande importância por ser a primeira exposição sistemática da principal descoberta de Newton - o cálculo. Em 1666 ele não tinha ainda desenvolvido a sua notação para fluxos, mas tinha formulado um método sistemático de diferenciação que não estava muito longe do publicado por Barrow em 1670. Newton representou por *o* um intervalo de tempo muito pequeno e por *op* e *oq* pequenos incrementos pelos quais x e y variam nesse intervalo. A razão p/q, portanto, será a razão das taxas instantâneas de variação de y e x - isto é, a inclinação da curva $f(x, y) = 0$. A inclinação de curva $y^m = x^n$, por exemplo, é encontrada a partir de $(y + oq)^m = (x + op)^n$ expandindo ambos os termos pelo teorema binomial, dividindo tudo por *o*, e desprezando os termos que ainda contenham *o*, sendo o resultado

$$\frac{p}{q} = \frac{n}{m} x^{n/m-1}.$$

Expoentes fraccionários já não preocupavam Newton, pois o seu método de séries infinitas tinha-lhe dado um algoritmo universal.

Lidando mais tarde com uma função explícita só de *x*, Newton abandonou o seu *p* e *q* e usou *o* como pequena variação da variável independente, notação que foi também usada por Gregory. Em *De analysi*, por exemplo, Newton provou como se segue que área sob a curva $y = ax^{n/m}$ é dada por

$$\frac{m}{m+n} ax^{n/m+1}.$$

Seja z a área e suponhamos que

$$z = \frac{m}{m+n} a x^{n/m+1}.$$

Representemos o momento ou acréscimo infinitesimal da abcissa por o. Então a nova abcissa será $x + o$ e a área aumentada será

$$z + oy = \frac{m}{m+n} a(x+o)^{n/m+1}.$$

Se aplicarmos aqui o teorema binomial, cancelarmos os termos iguais

$$z \quad \text{e} \quad \frac{m}{m+n} a x^{n/m+1},$$

dividirmos tudo por o e cancelarmos os termos que ainda contêm o, o resultado será $y = ax^{n/m}$. Reciprocamente, se a curva é $y = ax^{n/m}$, então a área será

$$z = \frac{m}{m+n} a x^{n/m+1}.$$

Parece ter sido essa a primeira vez na história da matemática que uma área foi achada pelo inverso do que chamamos diferenciação, embora a possibilidade de usar tal processo fosse conhecida por Barrow e Gregory, e talvez também por Torricelli e Fermat. Newton tornou-se o efectivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através da sua nova análise infinita e consolidar todos os elementos disponíveis num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam elas algébricas ou transcendentes. Por isso é que, mais tarde, ele viu com maus olhos toda a tentativa de separar o cálculo da sua análise de séries infinitas.

Sabe-se que na mais popular apresentação de Newton dos seus métodos infinitesimais ele considerou x e y como quantidades que fluem, ou fluentes, de que as quantidades p e q (acima) eram fluxos ou taxas de variação; quando redigiu essa visão de cálculo por volta de 1671 ele substituiu p e q pelas "letras ponteadas" $\dot{x}$ e $\dot{y}$. As quantidades ou fluentes, de que x e y são os fluxos, ele designou por x' e y'. Deve-se notar que o título da obra, quando publicada muito mais tarde, em 1742, (embora uma tradução para o inglês aparecesse antes, em 1736) não era simplesmente o método dos fluxos mas *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*.

Newton descobriu o seu método das séries infinitas em 1665-1666, e durante a década seguinte ele escreveu pelo menos três exposições substanciais da nova análise. O *De analysi* circulou entre amigos, inclusive John Collins e Isaac Barrow, e a expansão binomial infinita foi enviada a Oldenburg e Leibniz; mas Newton não fez nada para publicar os seus resultados, embora soubesse que Gregory e Mercator em 1668 tinham revelado a sua obra sobre séries infinitas. A primeira exposição sobre o cálculo que Newton imprimiu apareceu em 1687 em *Philosophiae naturalis principia mathematica*, o mais admirado tratado científico de todos os tempos. Esse livro é geralmente descrito como apresentando os fundamentos da física e da astronomia na linguagem da geometria pura.

Na primeira edição dos *Principia*, Newton reconheceu que Leibniz estava na posse de um método semelhante, mas na terceira edição em 1726, após amarga disputa entre aderentes dos dois homens quanto à independência e prioridade da descoberta do cálculo, Newton omitiu a referência ao cálculo de Leibniz. Agora está bastante claro que a descoberta de Leibniz foi independente da de Newton. Além disso, Leibniz tem prioridade de publicação, pois imprimiu uma exposição do seu cálculo em 1684 na *Acta Eruditorum*, espécie da "revista científica" mensal que fora fundada apenas dois anos antes.

6. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, onde aos quinze anos entrou na universidade e aos dezassete obteve o grau de bacharel. Estudou teologia, direito, filosofia, e matemática na universidade, e é considerado por muitos como o último sábio a conseguir o conhecimento universal. Aos vinte anos estava preparado para o grau de doutor em direito, mas esse foi-lhe recusado por causa da sua pouca idade. Deixou então Leipzig e obteve o grau de doutor na Universidade de Altdorf em Nuremberg onde lhe foi oferecido o lugar de professor de direito, que ele recusou.

Leibniz entrou para o serviço diplomático e nessa altura teve oportunidade de viajar muito. Em 1672 foi a Paris tendo-se encontrado com Huygens, que lhe sugeriu que se ele desejava tornar-se um matemático deveria ler os tratados de Pascal de 1658-1659. Em 1673 uma missão política levou-o a Londres, onde comprou um exemplar da *Lectiones geometricae* de Barrow, encontrou Oldenburg e Collins, e tornou-se membro da Royal Society. É em grande parte em torno dessa visita que gira a querela posterior sobre a prioridade, pois Leibniz poderia ter visto o *De analysi* de Newton em manuscrito; mas é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava ainda preparado em geometria ou análise.

Em 1676 Leibniz visitou novamente Londres, trazendo consigo a sua máquina de calcular; foi durante esses anos, entre duas visitas a Londres, que o cálculo diferencial tomou forma. Tal como Newton, as séries infinitas desempenham um papel importante nos primeiros trabalhos de Leibniz. Dos estudos sobre séries e o triângulo harmónico Leibniz voltou-se para a leitura das obras de Pascal sobre o ciclóide e outros aspectos da análise infinitesimal. Em particular, foi ao ler a carta de Amos Dettonville sobre *Traité des sinus du quart de cercle* que Leibniz diz ter uma luz jorrado sobre ele. Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das *diferenças* das ordenadas e das abcissas, quando estas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma das ordenadas dos rectângulos infinitamente finos que formam a área. Como nos triângulos aritmético e harmónico os processos de tomar somas ou diferenças estão em relação oposta, também na geometria os problemas de quadratura e tangentes, dependendo de somas e diferenças respectivamente, são inversos um do outro. O elo de ligação parecia ser o triângulo infinitesimal ou "característico", pois se Pascal o tinha utilizado para achar a quadratura de senos, Barrow aplicara-o ao problema de tangentes.

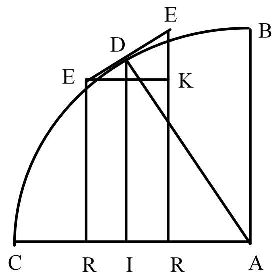

Figura 1. Método de Leibniz

Se *EDE* é tangente em *D* ao quadrante de círculo unitário *BDC* então, Pascal percebeu, *AD* está para *DI* como *EE* está para *RR* ou *EK*. Para um intervalo *RR* muito pequeno o segmento *EE* pode ser considerado como virtualmente igual ao arco de círculo. Portanto, na notação que Leibniz desenvolveu poucos anos depois, temos

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{d\theta}{dx},$$

onde θ é o ângulo *DAC*. Como

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

e $\cos\theta = x$, temos

$$d\theta = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Leibniz, por volta de 1676, tinha chegado à mesma conclusão a que Newton chegara vários anos antes: que possuía um método que era altamente importante por causa da sua generalidade. Quer uma função fosse racional ou irracional, algébrica ou transcendente (palavra que Leibniz inventou), as suas operações de achar somas e diferenças podiam ser sempre aplicadas. Cabia pois a ele desenvolver linguagem e notação adequada ao novo assunto. Depois de algumas tentativas ele fixou dx e dy para as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y. A princípio ele escrevia omn. y (ou "todos os y") para a soma das ordenadas sob a curva, mas mais tarde ele usou o símbolo $\int y$, e ainda $\int ydx$, o sinal de integral sendo uma letra s (para a soma) aumentada . Achar tangentes exigia o uso do *calculus* *differentialis* e achar quadraturas o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, frases de onde resultam as expressões que hoje usamos.

A primeira exposição do cálculo diferencial foi publicada por Leibniz em 1684 sob o longo mas significativo título de *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur*. Aqui Leibniz deu as fórmulas $dxy = xdy + ydx$, $dx / y = (ydx - xdy) / y^2$ e $dx^n = nx^{n-1}dx$ para produtos, quocientes e potências (ou raízes) juntamente com as aplicações geométricas. Essas fórmulas eram obtidas desprezando os infinitésimos de ordem superior.

Dois anos mais tarde, novamente na *Acta Eruditorum*, Leibniz publicou uma explicação de cálculo integral em que mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso da das tangentes. Aqui Leibniz deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo.

Leibniz nutria uma profunda admiração pelo trabalho de Newton, chagando a dizer: *"Tomando a matemática desde o início até ao tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor parte."* No entanto, em 1716, chegou a desafiar, Newton, que conservou a sua extraordinária capacidade matemática até ao fim, a encontrar as trajectórias ortogonais de uma família a um parâmetro de curvas planas. Newton em poucas horas resolveu o problema e deu um método para achar trajectórias em geral.

Referências

1. Boyer, Carl B., História da Matemática, Edgard Blücher, 12ª edição, São Paulo, 1996.

2. Dantzig, Tobias, Número a Linguagem da Ciência, Astler, Lisboa, 1960.

3. Silva, Jaime e Leal, Carlos, Análise Matemática Aplicada, McGraw Hill, Lisboa, 1996.