ADÉRITO LUÍS MARTINS ARAÚJO

Ajustamento de Curvas

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
1 9 9 2

Módulo constituido por duas aulas teórico--práticas na área de Análise Numérica, com vista à prestação de Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica.

Ajustamento de curvas

1. Introdução

Apresentamos, neste módulo, o plano de duas aulas teórico-práticas de uma disciplina do âmbito da Análise Numérica. De acordo com os planos de curso existentes no Departamento de Matemática da Faculdede de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, estas aulas teriam cabimento na disciplina de Análise Numérica II, disciplina do 3º ano de Matemática dos ramos de investigação operacional, matemática aplicada às ciências da engenharia e do 4º ano do ramo de ciências da computação.

Pressupomos que os alunos a quem estas aulas são destinadas tenham presente os conhecimentos teóricos que lhes foram ministrados nas disciplinas de Álgebra Linear e Geometria Analítica, Análise Infinitésimal I e II e Análise Numérica I, bem como o domínio de uma linguagem de programação.

No que diz respeito à Análise Numérica I, o aluno terá que dominar certos conceitos, tais como, a teoria de interpolação polinomial e métodos numéricos para resolução de sistemas lineares. É conveniente, mas não indispensável, que o aluno tenha alguma experiência na implementação dos algoritmos que estudou nestes capítulos.

Com estas aulas pretende-se que o aluno consolide os conhecimentos que aprendeu nas aulas teóricas sobre ajustamento de curvas. Mais concretamente, é nosso objectivo levantar certos problemas que poderão ocorrer na prática e resolvê-los de forma eficaz. Serão ainda propostas definições alternativas para alguns conceitos apresentados nas aulas teóricas e resolvidos problemas que permitam concluir do seu maior interesse prático. Em muitas das questões aqui apresentadas e outars sugeridas aos alunos é indispensável a utilização do computador, sendo o aluno convidado a elaborar certos algoritmos ou usar os já existentes e a implementá-los. Assim as aulas deverão decorrer numa sala com capacidade para ligar computadores pessoais.

Devido às limitações de tempo, ficarão por abordar muitas outras questões interessantes sobre este assunto. Pensamos, contudo, que o aluno ficará apto a encara-las com bases mais sólidas. Como complemento, será proposta a consulta das referências apresentadas no final deste relatório.

Existem muitos modos de definir uma curva que, de alguma forma, se possa ajustar a um conjunto de dados.

Este assunto – ajustamento de curvas – pertence tradicionalmente ao domínio da teoria da aproximação e podemos defini-lo de modo sumário como a determinação de uma função, pertencente a uma classe pré-definida, que minimize o erro cometido.

Do ponto de vista pedagógico, o modo mais simples de introduzir as curvas aproximantes é usar a teoria da interpolação. Dentro da filosofia desta teoria cabe ainda a interpolação segmentada que permite construir curvas sem ter de recorrer a polinómios de grau elevado e com a regularidade que se pretende.

Este processo pode, no entanto, não ser satisfatório uma vez que os pontos que pertendemos interpolar poderem ser difíceis de determinar com exactidão. Nesta situação a exigência imposta pela interpolação não deverá ser colocada.

Utilizando a ideia de aproximações localmente polinomiais, foram introduzidos os splines-B. Estes splines, devido às suas propriedades, são de fácil obtenção e utilização prática.

Finalmente e com o abjectivo de apresentar aos alunos aplicações não académicas, utilizamos os splines-B para determinar curvas – curvas spline – definidas à custa de um conjunto de pontos designados por vértices de controlo.

2. Plano das aulas

AULA 1

Sumário: *Interpolação polinomial segmentada de Lagrange e de Hermite. Algumas comparações.*

Da disciplina da Análise Numérica I o aluno conhece resultados que lhe permitem garantir a existeência e unicidade do polinómio interpolador de grau n de uma determinada função, f, supondo que esta é conhecida em $n+1$ pontos distintos. Por outro lado, sabe determinar estimativas para o erro que se comete quando se aproxima a função f por esse polinómio.

Com os conhecimentos que possui é levado a concluir que, para certas funções, à medida que o grau do polinómio aumenta o erro – diferença entre a função e o polinómio – diminui. No entanto, do ponto de vista computacional, o uso de polinómios de grau elevado não é eficiente.

Na aula teórica da disciplina a que esta aula se refere foram apresentados resultados que permitem concluir que, se os pontos de interpolação forem criteriosamente escolhidos, o polinómio interpolador pode representar, de um modo bastante rigoroso, a função dada.

Assim, para ilustrar os factos precedentes, propomos o seguinte exercício:

Exercício 1: Determine os polinómios interpoladores de Lagrange e Hermite da função de Runge, definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1,1],$$

considerando $n=3$ e $n=20$. Analise os casos dos pontos de interpolação serem:

a) igualmente distanciados;

b) os zeros dos polinómios de Chebyshev.

Compare os resultados obtidos.

O aluno deve constatar que:

i) a um aumento do grau do polinómio interpolador corresponde um aumento do erro;

ii) o uso dos zeros do polinómio de Chebyshev resolve satisfatoriamente o problema.

Embora com o uso dos zeros do polinómio de Chebyshev seja possível determinar um polinómio suficientemente próximo da função, salientemos que nem sempre se conhece a função a aproximar nesse conjunto de pontos. Uma alternativa à utilização dos zeros do polinómio de Chebyshev pode ser a teoria da interpolação segmentada.

Esta teoria permite determinar funções localmente polinomiais construidas dela "colagem" de vários polinómios definidos em subintervalos considerados no domínio onde pretendemos aproximar a função dada. Nas aulas teóricas foram salientadas algumas vantagens desta teoria, nomeadamente o de evitar o uso de polinómios de grau elevado para obter "boas" aproximações.

Nesta aula é proposta a comparação entre dois tipos de interpolações segmentadas. Estas podem ser determinadas usando técnicas de interpolação sobejamente conhecidas pelos alunos. Nesse sentido, propomos o seguinte problema:

Exercício 2: Determine o polinómio quadrático segmentado de Lagrange e Hermite para a função de Runge definida no exercício 1 e compare os resultados obtidos relativamente a

a) classe de continuidade;

b) esforço computacional.

O aluno irá concluir que a regularidade do interpolador é maior no caso de Hermite – $C^1[-1,1]$ – do que no caso de Lagrange – $C^0[-1,1]$ –. Quanto ao esforço computacional o aluno será convidado a efectuar esse estudo com base na contagem do número de operações concluindo que no caso do polinómio interpolador de Lagrange serão efectuadas menos operações.

Para terminar serão ainda os alunos convidados a implementar os polinómios interpoladores segmentados de Lagrange e Hermite e testá-los para o seguinte problema.

Esta implementação deverá ainda ser testada no caso de funções que apresentem "prefis abruptos" como no caso do exercício que propomos de seguida:

Exercício 3: Determine o polinómio cúbico segmentado de Lagrange e Hermite interpolador de uma determinada função da qual se conhece a tabela

x	y
10.00	0.42
10.20	0.48
10.40	0.51
10.60	0.52
10.80	0.53
11.00	0.55
11.20	0.58
11.40	0.61
11.60	0.65
11.80	0.74
11.89	0.91
11.96	1.29

x	y
12.00	1.52
12.04	1.87
12.08	2.35
12.12	2.89
12.16	3.40
12.20	3.83
12.28	4.27
12.36	4.53
12.44	4.62
12.50	4.64
13.00	4.64
14.00	4.64

Compare os resultados obtidos.

O aluno irá constatar que o polinómio de Hermite resolverá o problema de forma muito eficiente.

AULA 2

Sumário: *Splines-B. Aproximação de curvas a partir de um conjunto de vértices de controlo.*

O termo inglês "spline" pode ser traduzido para o vocábulo português "virote". Um virote é um instrumento usado pelos desenhadores para unir um conjunto de pontos no plano.

Matematicamente falando, foi definido, na aula teórica, spline como sendo um polinómio segmentado de grau n com $n-1$ derivadas contínuas nos pontos de ligação (nós).

Foi também provado na aula teórica que o conjunto constituido por todos os splines de grau n é um espaço linear.

A primeira aplicação dos splines no ajustamento de curvas foi a de usar estas funções para interpolar um conjunto finito de pontos. Em muitos problemas práticos, a localização daqueles pontos não é exactamente conhecida conhecida. Assim, é usual definir um conjunto de vértices de controlo – V_i –, também chamados vértices do polígono de controlo $\mathcal{V}$, e definir um spline que "passe perto" desses pontos e que esteja contida no menor convexo que contém a linha poligonal $\mathcal{V}$.

A fim de determinar a curva pretendida, notamos que, se Q, é um dos pontos da curva, então

$$Q = \sum_i w_i V_i \,,$$

para um conjunto de valores w_i satisfazendo a

$$w_i \geq 0 \,, \qquad \text{para todo o } i \,,$$

e

$$\sum_i w_i = 1\,.$$

Resta-nos determinar os escalares w_i.

Tal é possível usando os splines-B que constituem uma base do espaço lineares dos splines de grau n. Tais splines foram definidos de acordo com a

Definição 1 *Seja* $\{u_i\}_{i=0}^{m+k}$ *uma sequência não decrescente de nós. O i-ésimo spline-B (normalisado) de ordem* k*, associado aos nós* $u_i \ldots u_{i+k}$*, é definido por*

$$B_{i,k}(u) := (-1)^k (u_{i+k} - u_i) T[u_i(k) : t]\,,$$

e $T[u_i(k) : t]$ *representa a k-ésima diferença dividida da função potência truncada*

$$T(u,t) := (u-t)_+^{k-1} = \begin{cases} 0 & u < t \\ (u-t)^{k-1} & u \geq t \end{cases}$$

onde t *é considerado fixo.* □

Assim a curva spline de grau $k-1$ (ordem k) – que representa a curva pretendida – associada a um determinado polígono de controlo $\mathcal{V}$ é dada, na forma paramétrica, por

$$Q(u) := \sum_{i=o}^{k} V_i\, B_{i,k}(u) = \sum_{i=1}^{k} (x_i\, B_{i,k}(u), y_i\, B_{i,k}(u))\,,$$

sendo $V_i = (x_i, y_i)$ os vértices de $\mathcal{V}$.

Estes conceitos foram introduzidos nas aulas teóricas e o aluno está apto a determinar splines-B e as curvas spline. Com o próximo exercício, de natureza teórica, pretendemos dar ao spline-B uma forma mais simples, particularmente bem adaptada ao cálculo computacional.

Exercício 1: Demonstre que, para qualquer $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, se tem

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$B_{i,r}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+r-1} - u_i} B_{i,r-1}(u) + \frac{u_{i+r} - u}{u_{i+r} - u_{i+1}} B_{i+1,r-1}(u)\,,$$

para $r = 2, 3, \ldots, k$, onde os termos

$$\frac{u - u_i}{u_{i+r-1} - u_i} B_{i,r-1}(u) \quad \text{e} \quad \frac{u_{i+r} - u}{u_{i+r} - u_{i+1}} B_{i+1,r-1}(u)\,,$$

são nulos, respectivamente, quando

$$u_{i+r-1} - u_i = 0 \quad \text{e} \quad u_{i+r} - u_{i+1} = 0\,.$$

Deduzidas estas relações de recorrência, pretende-se que o aluno constate, com um exemplo, que elas constituem, de facto, um processo eficaz de calcular splines-B. Assim, é proposto o seguinte exercício:

Exercício 2: Calcule $B_{0,3}(2)$ para as seguintes sequências de nós $0, 1, 3, 4$ e $0, 1, 1, 3$, usando:

a) a definição;

b) a fórmula de recorrência demonstrada no exercício 1.

O aluno deverá verificar que o cálculo de splines-B utilizando a relação de recorrência é um processo efectivamente eficaz.

Com base nas relações de recorrência deduzidas no exercício 1, é agora proposto ao aluno que prove algumas propriedades relativas aos splines-B.

Exercício 3: Demonstre que

a) $B_{i,k}(u) > 0$ para $u_i < u < u_{i+k}$ e $B_{i,k}(u) = 0$ para $u < u_i$ e $u \leq u_{i+k}$;

b) para todo o valor de $u \in [u_{k-1}, u_{m+1})$,

$$\sum_{i=0}^{m} B_{i,k}(u) = 1\,.$$

Este exercício não será para ser resolvido na aula. No entanto, será sublinhada a importância das suas conclusões. Assim:

i) a alínea a) mostra que poderemos usar os splines-B como funções peso na construção de curvas;

ii) a alínea b) permite concluir que o spline definido como uma combinação linear de splines-B pertence ao menor convexo definido pelos vértices do seu polígono de controlo;

iii) como consequência imediata dos resultados demonstrados, podemos concluir que a translacção e a rotação do polígono de controlo de um dado spline não altera a forma da curva.

Para finalizar pretende-se que o aluno construa uma curva spline a partir do conhecimento do seu polígono de controlo. A escolha dos vértices desse polígono, bem como dos nós a usar no cálculo dos splines-B, ficará a cargo do aluno. Propomos então o seguinte exercício:

Exercício 4: Dado um conjunto de vértices e um conjunto de nós calcule o spline que se ajusta aos vértices. Em seguida, faça variar:

a) os vértices;

b) o espaçamento entre os nós.

Analise os resultados obtidos.

Neste exercício pretende-se salientar a importância da escolha dos nós bem como o facto da alteração nos vértices provocar apenas uma alteração local nos splines. Tal facto já era de prever atendendo às características locais das funções spline-B demonstradas no exercício 3 a).

Referências

[1] Bartels, R.; Beatty, J. C.; Barsky, B. A., *An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling*, Morgan Kaufmann publishers, Los Altos, California, 1987.

[2] de Boor, C., *A pratical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] Gordon, W. G.; Riesenfeld, R. F. *B-spline curves and surfaces*, in Computer aided geometric design, Barnhill, R. E.; Riesenfeld, R. (eds), Academic Press, 1974.

[4] Prenter, P. M., *Splines and variational methods*, John Wiley & Sons, New York, 1975.

[5] Rice, J. R., *Numerical methods, software, and analysis*, Mc Graw-Hill, Tokyo, 1983.

[6] Valença, M. R., *Métodos numéricos*, INIC, Braga, 1988.