Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 1**

Desigualdades

1. Representa-se por $\ell^p_{(n)}, 1 \leq p \leq \infty$, o espaço linear $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) munido da norma:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

(a) Seja $1 \leq p \leq \infty$, e p' o seu conjugado, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = \infty$ se $p = 1$; $p' = 1$ se $p = \infty$). Mostre que:

$$a^{\frac{1}{p}}.b^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'} \quad \text{para} \quad a, b \geq 0.$$

Sugestão: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é evidente. Seja então $1 < p < \infty$.

i. Se $a = 0$ ou $b = 0$ a conclusão é imediata.

ii. Suponha então que a e b são positivos.
Se $k \in (0, 1)$ defina a função $f(t) = k(t-1) - t^k + 1$ para $t \geq 1$. Note que $f(1) = 0$ e $f'(t) \geq 0$ e daí conclua que $t^k \leq kt + (1 - k)$.

iii. Se $a \geq b$ faça $t = \frac{a}{b}$ e $k = \frac{1}{p}$.
Se $a < b$ faça $t = \frac{b}{a}$ e $k = \frac{1}{p'}$.

(b) Prove a desigualdade de **Hölder**:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \ .$$

Sugestão: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é evidente. Seja então $1 < p < \infty$.

i. Se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é óbvia.

ii. Suponha então que são ambos não nulos e faça

$$a_i = \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p \quad \text{e} \quad b_i = \left(\frac{|\ y_i|}{\|y\|_{p'}}\right)^{p'}$$

usando a) para obter

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{p'}.$$

Nota: No caso $p = p' = 2$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

que toma o nome de desigualdade de **Cauchy-Schwarz**.

(c) Prove a desigualdade de **Minkowski**:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \ .$$

Sugestão:

i. Se $p=1$ ou $p=\infty$ a desigualdade é evidente.

ii. Suponha $1<p<\infty$ e use b) para obter o seguinte:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x+y\|_p^{\frac{p}{p'}}\end{aligned}$$

2. (a) Prove que a função f definida por $f(x) := (1+x)^\rho - (1+x^\rho)$ é crescente em $[0,\infty)$, para $\rho \geq 1$.

(b) Prove que com $\rho \geq 1$ e $a, b \geq 0$, temos $(a+b)^\rho \geq a^\rho + b^\rho$.

(c) Prove a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0<p\leq q<\infty.$$

Transformações lineares

3. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear, tal que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X$ e $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset Y$, onde X e Y são espaços vectoriais. Prove que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ é um subespaço de Y.

4. Prove que o inverso de um operador linear $\mathcal{A}$ existe sse $\mathcal{A}x=0$ implica $x=0$.
Mostre também, que se $\mathcal{A}^{-1}$ existe, é um operador linear.

5. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = X$ e $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subset Y$, com $\dim X = n$. Mostre que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ tem dimensão finita m, com $m \leq n$.

6. Acrescentando às hipóteses do exercício anterior que $\mathcal{A}^{-1}$ existe, prove que $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ tem a mesma dimensão que X.

7. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear de X em Y, com $\dim X = \dim Y < \infty$. Demonstre que $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = Y$ sse $\mathcal{A}^{-1}$ existe.

8. Verifique se as seguintes aplicações são ou não funcionais lineares:

(a) $\begin{array}{rccc} I_1: & C[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_0^1 f(x)dx \end{array}$

(b) $\begin{array}{rccc} I_2: & C[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_0^1 |f(x)|dx \end{array}$

(c) $\begin{array}{rccc} T_1: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_i)_{i=1}^n & \longmapsto & \sum_{i=1}^n |x_i| \end{array}$

(d) $\begin{array}{rccc} T_2: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_i)_{i=1}^n & \longmapsto & x_1 \end{array}$

9. Mostre que toda a funcional linear não nula é sobrejectiva.

10. Sejam E, E', F e F' espaços lineares sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, tais que existe um isomorfismo de E em E' e um isomorfismo de F em F'.
Seja L (resp. L') o conjunto de todas as aplicações lineares de E em F (resp. de E' em F'). Mostre que L e L' são espaços lineares isomorfos.

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 2**

11. Seja X um espaço vectorial complexo, e designe-se por X_r o mesmo espaço considerado como real.

(a) Se $x'_1 \in (X_r)^f$ mostre que fazendo $x'_2(x) = x'_1(x) - ix'_1(ix)$ se tem $x'_2 \in X^f$.

(b) Se $x' \in X^f$ e se $x'_1 = \mathrm{Re}(x')$ e $x'_2 = \mathrm{Im}(x')$, prove que:

i. $x'_1, x'_2 \in (X_r)^f$;

ii. x'_1 e x'_2 verificam a relação:

$$x'(x) = x'_1(x) - ix'_1(ix) = x'_2(ix) + ix'_2(x), \forall x \in X.$$

Sugestão: Calcule $x'(ix)$ por dois processos diferentes.

(c) Mostre que os espaços $(X^f)_r$ e $(X_r)^f$ são isomorfos.

12. Prove que a aplicação canónica $J : X \to X^{ff}$ é linear.

13. Mostre que se X é algebricamente reflexivo, o mesmo sucede com X^f.

Sugestão: Sejam J e J' as aplicações canónicas de X em X^{ff} e de X^f em X^{fff}, respectivamente. Pretende-se provar que $\mathcal{R}(J') = X^{fff}$. Considere-se um elemento $x''' \in X^{fff}$ e defina $x' \in X^f$ por $< x, x' >=< Jx, x''' >$. Mostre que $x''' = J'x'$.

14. Determine em $(\mathbb{R}^3)^f$ a base dual da base $\{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 2, 1)$ e $e_3 = (0, 1, 2)$.

15. Sejam $x'_1, \ldots, x'_n$ elementos de X^f. Seja Y outro espaço linear e $y_1, \ldots, y_n$ vectores de Y. Mostre que é linear a aplicação $A : X \to Y$ definida por

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} < x, x'_i > y_i.$$

Reciprocamente, seja $A : X \to Y$ uma aplicação linear cujo contradomínio é de dimensão finita n. Mostre que, então, existem vectores $y_1, \ldots, y_n$ em Y e funcionais lineares $x'_1, \ldots, x'_n$ em X^f, tais que $\forall x \in X, Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} < x, x'_i > y_i$.

Sugestão: Se $\{y_1 \ldots, y_n\}$ é uma base do contradomínio de A, $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$. Para verificar a linearidade das funções f_i, utilize a base dual $\{y'_1, \ldots, y'_n\}$.

Variedades lineares e hiperplanos

16. Seja $H := \{x :< x, x' >= 0\}$ um hiperplano em $\ell^p_{(n)}$ e $x_0 \notin H$. Defina a reflexão relativamente a H, paralela a x_0: $Ax := x - 2\dfrac{< x, x' >}{< x_0, x' >} x_0$. Mostre que:

(a) A é linear;

(b) $\dfrac{x + Ax}{2} \in H$;

(c) se x_0 é um dos vectores $e_k := (\delta_{kj})$ da base canónica e x' é tal que $< e_j, x' >= \delta_{kj}$, então A é uma isometria.

17. Seja X um espaço normado real e $S := B(0, r)$ a bola aberta de centro em 0 e raio r.

(a) Define-se a **funcional de Minkowski** de S como sendo a função real em X dada por $p_S(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\}$. Mostre que p_S é uma semi-norma em X.

(b) Seja V uma variedade linear disjunta de S e M o subespaço linear gerado por V. Seja m' a funcional linear definida em M por $< x, m' >= 1$ se $x \in V$. Prove que:

$$| < x, m' > | \leq p(x), x \in M.$$

(c) Prove que existe um hiperplano H contendo V e disjunto de S.

Anuladores

18. Seja X um espaço vectorial. Prove que:

(a) se $S_1 \subset X, S_2 \subset X^f$ (S_1 e S_2 não vazios), então S_1^a e ${}^aS_2$ são subespaços lineares de X^f e X, respectivamente;

(b) se $\emptyset \neq S_1 \subset S_2 \subset X$, então $S_2^a \subset S_1^a$;

(c) se $\emptyset \neq S_1 \subset S_2 \subset X^f$, então ${}^aS_2 \subset {}^aS_1$;

(d) se $S \subset X^f$, então $J({}^aS) = J(X) \cap S^a$;

(e) $\{0\}^a = X^f$, $X^a = \{0\}$;

(f) ${}^a\{0\} = X$, ${}^a(X^f) = \{0\}$.

Transposta de uma transformação linear

19. (a) Sendo $J : X \to X^{ff}$ e $J_1 : Y \to Y^{ff}$ as aplicações canónicas e $A : X \to Y$ mostre que

$$J_1 Ax = (A^T)^T Jx, \forall x \in X.$$

(b) Mostre que sendo n a dimensão de X e $J : X \to X^{ff}$ e $J_1 : X^f \to X^{fff}$ as aplicações canónicas, então $J^T = J_1^{-1}$.

20. Seja X um espaço vectorial de dimensão n, $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de X e $(e_1', \ldots, e_n')$ a base dual em X^f.

(a) Prove que $\forall x' \in X^f \left(x' = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i'\right)$ e $\forall x \in X \left(x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right)$,

$$< x, x' >= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i.$$

(b) Considere a transformação linear $A : X \to X$ definida por

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i+1} e_i.$$

Determine a transformação transposta $A^T : X^f \to X^f$.

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 3**

21. Considere os vectores $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (1,1)$, $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,1,0)$ e $f_3 = (1,1,1)$. Dadas as bases $\{e_1, e_2\}$ em $\mathbb{R}^2$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ em $\mathbb{R}^3$ e sabendo que $\mathcal{A}(e_1) = (2,1,0)$ e $\mathcal{A}(e_2) = (2,1,1)$, determine uma matriz que represente $\mathcal{A}^T$ e calcule

$$\mathcal{A}^T\left(\frac{f_1'}{2} + \frac{f_2'}{2} + \frac{f_3'}{2}\right),$$

onde $\{f_1', f_2', f_3'\}$ é a base dual de $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Espaços de sucessões

22. Mostre que a aplicação $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \mapsto (\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ de ℓ^p em ℓ^p é uma transformação linear não invertível.

23. Considere a matriz infinita $A := [a_{ij}]$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^p\right)$ é convergente, $p > 1$.

Seja $x := (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell^{p'}$.

(a) Prove que, para cada i, $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$ é convergente.

(b) Definindo $y := (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ com $\eta_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$, mostre que $y \in \ell^p$.

24. Em ℓ^2 define-se uma aplicação x' por

$$< x, x' >= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i, \text{ com } a := (\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2, \text{ e } x := (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Mostre que $x' \in (\ell^2)^f$.

25. Seja ℓ^∞ o conjunto das sucessões limitadas de números reais (ou complexos).

(a) Verifique que ℓ^∞ é espaço de Banach.

(b) Mostre que (C_0) é um subespaço vectorial fechado de ℓ^∞.

(c) Seja $e := (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in (C)$, e represente-se por $< e >$ o subespaço vectorial de (C) gerado por e. Justifique ser $(C) = (C_0) \oplus < e >$.

26. Prove que ℓ^∞ não é separável.

Sugestão: Recorde que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tem a potência do contínuo. Considere o conjunto de todas as sucessões $(x_n)_n$ tais que $x_n = 0$ ou $x_n = 1$.

Desigualdades de Hölder e de Minkowski para integrais

27. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, mostre que $\alpha\beta \leq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^{p'}}{p'}$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, 1 < p < \infty$.

28. Fazendo $\alpha = \dfrac{|f(x)|}{[\int_\Omega |f(x)|^p \, dx]^{\frac{1}{p}}}$ e $\beta = \dfrac{|g(x)|}{[\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, dx]^{\frac{1}{p'}}}$, obtenha a desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \left[\int_\Omega |f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |g|^{p'} dx\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

29. Use a identidade $(|\alpha| + |\beta|)^p = (|\alpha| + |\beta|)^{p-1}|\alpha| + (|\alpha| + |\beta|)^{p-1}|\beta|$ para obter a desigualdade de Minkowski,

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

30. Suponha $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Sendo $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, mostre que $fg \in L^r(\Omega)$ e $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

31. Uma função real $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita convexa se é convexo o conjunto $E = \{(x, y) : x \in \mathcal{D} \wedge y \geq f(x)\}$.

(a) Mostre que, se $\mathcal{D}$ é convexo, então $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convexa sse $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$, $x, y \in \mathcal{D}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

(b) Mostre que f é convexa sse

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i), \qquad x_i \in \mathcal{D}, \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

Espaços de Banach e transformações lineares limitadas

32. Seja X um espaço vectorial normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e M um subespaço fechado de X. Considere a relação de equivalência $\mathcal{R}$, em X:

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in M.$$

Seja X/M o espaço quociente, e para $[x] \in X/M$ defina-se $\|[x]\| := \inf\limits_{m \in M} \|x + m\|$. Mostre que $\|.\|$ define uma norma em X/M.

33. Seja X um espaço normado.

(a) Prove que se uma sucessão de Cauchy em X tem uma subsucessão convergente, então ela própria é convergente.

(b) Suponha que sempre que $\sum\limits_{n_1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, a série $\sum\limits_{n_1}^{\infty} x_n$ é convergente. Prove que, nesse caso, X é espaço de Banach.

Sugestão: Sendo $(x_n)_n$ de Cauchy, justifique que existe uma subsucessão x_{n_j} tal que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| < \infty$.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 4**

34. Sendo A_1 e A_2 dois espaços de Banach, define-se $A = A_1 + A_2 := \{a = a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, que é ainda um espaço de Banach com a norma $\|a\| = \inf\{\|a_1\|_1 + \|a_2\|_2 : a = a_1 + a_2\}$. Sejam B_1 e B_2 outros dois espaços de Banach e $B_1 + B_2$ o espaço de Banach definido analogamente. Seja $T \in \mathcal{L}(A_1, B_1) \cap \mathcal{L}(A_2, B_2)$.

(a) Mostre que com $Ta = Ta_1 + Ta_2$ (para $a = a_1 + a_2$, $a_i \in A_i$) se define, sem ambiguidade, uma aplicação linear de A em B.

(b) Mostre que T é limitada de A em B.

Sugestão: Se $a \in A$, faça $a = a_1 + a_2 \in A_1 + A_2$ com $\|a\| \geq \dfrac{\|a_1\|_1 + \|a_2\|_2}{2}$.

(c) Sejam A_0 e B_0 dois espaços de Banach tais que $A_0 \hookrightarrow A$, $B_0 \hookrightarrow B$ e $T(A_0) \subset B_0$. Designe por T_0 a restrição de T a A_0. Supondo que $a_n \to a$ em A_0 e $T_0 a_n \to b$ em B_0, justifique que $a_n \to a$ em A e $T_0 a = b$.

35. Seja Ω um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, com medida finita.

(a) Mostre que sendo $q > p \geq 1$, a injecção $I : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$ é uma aplicação contínua.

(b) Sendo $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $h \in L^r(\Omega)$, prove que $fgh \in L^1(\Omega)$, tendo-se:

$$\|fgh\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} \cdot \|g\|_{q,\Omega} \cdot \|h\|_{r,\Omega}.$$

36. Considere o espaço $C[0,1]$ e o operador

$$\begin{array}{rccc} T: & C[0,1] & \longrightarrow & C[0,1] \\ & f & \longmapsto & Tf \quad \text{com } Tf(t) := \dfrac{tf(t)}{1+t^2}. \end{array}$$

Prove que T é linear e calcule $\|T\|$.

37. Seja $A := [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n e defina-se o operador real

$$\begin{array}{rccc} A: & \ell^2_{(n)} & \longrightarrow & \ell^\infty_{(n)} \\ & (x_i)_{i=1}^n & \longmapsto & (y_i)_{i=1}^n \quad \text{onde } y_i := \sum\limits_{j=1}^n a_{ij} x_j. \end{array}$$

Mostre que $A \in \mathcal{L}(\ell^2_{(n)}, \ell^\infty_{(n)})$ e que $\|A\| = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Sugestão: Prove que o máximo da função $\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i$ sobre a superfície $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = 1$ é $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

38. Seja $K \in C(I \times I)$, $f \in C(I)$ com $I := [0,1]$. Defina-se $Af(x) := \int\limits_0^1 K(x,y) f(y) dy$.

(a) Prove que $Af \in C(I)$.

(b) Mostre que $A \in \mathcal{L}(C(I), C(I))$.

39. (a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tendo em conta que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sse existe um escalar α tal que $Th = \alpha h$, $h \in \mathbb{R}$, mostre que a definição de derivada à Frechet de f em x coincide com a clássica definição de derivada.

(b) Mostre que se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ então a derivada de T em cada $x \in X$ é T.

40. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ diferenciáveis à Frechet, com X e Y espaços normados. Prove que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X, (\alpha f+\beta g)'_x = \alpha f'_x+\beta g'_x$ e conclua que a aplicação $D : f(\xi) \mapsto Df(\xi) = f'_\xi$ é linear.

41. Seja Ω um domínio do plano complexo $\mathbb{C}$ e Y um espaço vectorial normado complexo.

(a) Mostre que a aplicação $\mathcal{L}(\mathbb{C},Y) \ni T \overset{\psi}{\mapsto} T(1) \in Y$ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(\mathbb{C},Y)$ e Y.

(b) A função $f : \mathbb{C} \to Y$ diz-se **analítica** em Ω se existir a sua derivada à Frechet em todo o ponto $z_0 \in \Omega$, i.e., se $\exists\, T_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C},Y)$ tal que

$$\lim_{z\to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0) - T_0(z - z_0)}{z - z_0} \right\|_Y = 0.$$

Justifique a seguinte definição equivalente:
"$f : \mathbb{C} \to Y$ é **analítica** em Ω se existir, para cada $z_0 \in \Omega$, o limite em Y, $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = y_0$."
Sugestão: Como é evidente, basta mostrar que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $T_0 \leftrightarrow y_0$ tal que $\dfrac{T_0(z - z_0)}{z - z_0} = y_0$.

Transformações lineares compactas

42. Seja $x = (x_n) \in \ell^2$, $Tx = (y_n)$ onde $y_n = \dfrac{x_n}{n}$. Prove que $T \in \mathcal{K}(\ell^2, \ell^2)$.

Sugestão: Mostre que $T = \lim\limits_k T_k$, onde $T_k x = (y_n)$ com $y_n = \dfrac{x_n}{n}$ se $n \le k$, $y_n = 0$ se $n > k$.

43. Mostre que o operador integral do exercício **38** é compacto.

44. Considere o seguinte teorema: "Seja Z um espaço normado tal que a superfície da bola unitária $B(0,1)$ é compacta. Então Z tem dimensão finita."

(a) Prove que se a transformação identidade num espaço normado Y é um operador compacto, então Y tem dimensão finita.

(b) Prove que se num espaço normado X toda a sucessão limitada tem uma subsucessão convergente, então X tem dimensão finita.

(c) Justifique o recíproco do teorema: "Em todo o espaço normado de dimensão finita, a superfície da bola unitária é compacta."

45. Seja X um espaço normado de dimensão infinita.

(a) Mostre que $\mathcal{K}(X)$ é um ideal de $\mathcal{L}(X)$.

(b) Sabendo-se que a identidade em X não é um operador compacto, mostre que uma transformação compacta A em X não admite inversa limitada.

(c) Seja $A \in \mathcal{L}(C[0,1])$ definida por $Af(x) = xf(x)$. Mostre que A não é uma transformação compacta.

Sugestão: Mostre que A é invertível no subespaço $Y = \{f \in C[0,1] : f(x) = 0, x \in [0, \frac{1}{2}]\}$, definindo convenientemente $A^{-1}f$ em $[0, \frac{1}{2}]$ e $(\frac{1}{2}, 1]$.

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 5**

Espaços duais e transformações duais

46. Mostre que $(aA+bB)' = aA' + bB'$ e que $(AB)' = B'A'$.

47. Seja $K \in C(I \times I)$, $I = [0,1]$ e suponha que $A \in \mathcal{L}(L^p(I), L^q(I))$, onde $Af(x) := \int\limits_0^1 K(x,y)f(y)dy$. Determine o operador dual de A $(1 \leq p, q < \infty)$.

48. Seja X um espaço normado e X' o seu dual. Sendo $x_1, \ldots, x_n$ vectores linearmente independentes em X e $u'_1, \ldots, u'_n$ elementos de X', define-se

$$T = \sum_{i=1}^{n} u'_i \otimes x_i : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} < x, u'_i > x_i. \end{array}$$

(a) Prove que $T \in \mathcal{L}(X)$.

(b) Mostre que o operador dual T' é definido por $T'x' = \sum\limits_{i=1}^{n} < x_i, x' > u'_i$, $x' \in X'$.

49. Considere a transformação linear definida por

$$T: \begin{array}{ccc} \ell^1 & \to & (C_0) \\ (x_n)_n & \mapsto & (y_n)_n \quad \text{com } y_n := \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k. \end{array}$$

(a) Mostre que T é limitada.

(b) Determine a transformação dual $T' : \ell^1 \to \ell^\infty$.

50. Considere os espaços de sucessões (reais ou complexos) ℓ^1 e ℓ^∞.

(a) Como sabe, o dual de ℓ^1 é isometricamente isomorfo a ℓ^∞: se $x = (x_n) \in \ell^1$, $x' \in (\ell^1)'$, então $< x, x' >= \sum\limits_n x_n a_n$, $(a_n) \in \ell^\infty$, $\phi : x' \mapsto (a_n)$ é um isomorfismo isométrico entre $(\ell^1)'$ e ℓ^∞. Identificando, então, estes dois subespaços, determine o anulador de ℓ^1:

$$(\ell^1)^o = \{x' \in \ell^\infty :< x, x' >= 0, x \in \ell^1\} \subset (\ell^1)'.$$

(b) Sendo $X = \ell^1$, podemos escrever $\ell^\infty \subset X^f$. Seja $M = \{(a_n) \in \ell^\infty : \sum\limits_n |a_n| < \infty\} \subset X^f$.

i. Determine o anulador ${}^aM = \{x \in \ell^1 :< x, x' >= 0, x' \in M\}$.

ii. Mostre que $\ell^\infty \subset ({}^aM)^a$ e que, portanto, $M \not\supseteq ({}^aM)^a$.

Espaços de Hilbert

51. Calcule os ângulos do triângulo em $L^2(-1,1)$ com os seguintes vértices:

$$f_1(x) \equiv 0, \qquad f_2(x) \equiv 1, \qquad f_3(x) \equiv x.$$

52. (a) Prove a regra do paralelogramo para uma norma definida por um produto interno.

(b) Mostre que uma norma que satisfaz a regra do paralelogramo, é definida por um produto interno.

53. Sejam H_1 e H_2 dois espaços de Hilbert definidos sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Munindo $H = H_1 \times H_2$ dum produto interno tal que

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2))_H = (x_1, y_1)_{H_1} + (x_2, y_2)_{H_2},$$

mostre que H é um espaço de Hilbert.

54. Seja H um espaço de Hilbert e $\mathcal{R} : H' \to H$ a aplicação do teorema de **Riesz**. Prove que H' é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$(x', y')_{H'} = (\mathcal{R}y', \mathcal{R}x')_H, \qquad x', y' \in H'.$$

55. Seja X um espaço com produto interno sobre o corpo $\mathbb{K}$.

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que $\|x + y\| = \|x - y\|$ sse $(x, y) = 0$.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diga o que sucede.

(b) Prove também que se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow (x, x - y) = (y, y - x).$$

(c) Se A for um operador linear em X, prove que

$$\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in X \Leftrightarrow (Ax, Ay) = (x, y), \forall x, y \in X.$$

(d) Considerando ainda $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e fixado um vector $x \in X$, justifique que existe um e um só $\xi \in X'$ tal que $(x, y) =< y, \xi >, \forall y \in X$.

(e) Dada a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^2$, mostre que, no ponto x referido na alínea anterior, a derivada de f é $f'_x = 2\xi$.

56. Define-se o **gramiano** dos vectores $x_1, \ldots, x_n$, num espaço com produto interno, por

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \det[(x_i, x_j)].$$

Prove que $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se e só se os vectores $x_1, \ldots, x_n$ são linearmente dependentes.

Sugestão: Considere o sistema homogéneo $\sum\limits_{j=1}^{n} (x_i, x_j)\alpha_j = 0;\ i, \ldots, n$. Caso admita uma solução não nula $(\overline{\beta_1}, \ldots, \overline{\beta_n})$, multiplique por β_i a i-ésima equação $(i = 1, \ldots, n)$ e adicione as equações obtidas.

57. Mostre que é ortonormado em $L^2(0, 1)$ o conjunto definido pelo sistema das funções de **Haar** ϕ_{mn} $(m \in \mathbb{N}_0, 1 \leq n \leq 2^m)$ definidas por:

$$\phi_{mn}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}} & \text{se} \quad x \in [\frac{n-1}{2^m}, \frac{n-1/2}{2^m}) \\ -2^{\frac{m}{2}} & \text{se} \quad x \in [\frac{n-1/2}{2^m}, \frac{n}{2^m}] \\ 0 & \text{se} \quad x \notin [\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}]. \end{cases}$$

58. Mostre que é ortonormado em $L^2(0, 1)$ o sistema das funções de **Rademacher** ϕ_m:

$$\phi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}; \qquad m = 0, 1, \ldots$$

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 6**

59. Considere o conjunto $S = \{\Psi_k(x), k = 1, 2, \ldots\} \subset L^2(-\pi, \pi)$, onde $\Psi_k(x) = \dfrac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$.

(a) Prove que S é um subconjunto ortonormado.

(b) Prove que $(\operatorname{sen} x, \Psi_1(x)) = 0$. Supondo provado que $(\operatorname{sen} x, \Psi_k(x)) = 0, \forall k$, i.e.,

$$\sum_{\Psi_k \in S} (\operatorname{sen} x, \Psi_k(x)).\Psi_k(x) \neq \operatorname{sen} x,$$

poder-se-á afirmar que S é completo? Justifique.

60. Considere o seguinte subconjunto de $L^2[0,1]$:

$$S = \{\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = e^{2\pi xi}, \phi_2(x) = e^{-2\pi xi}, \ldots, \phi_{2k-1}(x) = e^{2k\pi xi}, \phi_{2k}(x) = e^{-2k\pi xi}, \ldots\}.$$

(a) Prove que S é um subconjunto ortonormado.

(b) Sabendo que S é completo, verifique que os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x - \dfrac{1}{2}$ são $\alpha_0 = 0, \alpha_{2k-1} = \dfrac{i}{2k\pi}, \alpha_{2k} = \dfrac{-i}{2k\pi}$.

(c) Utilizando a fórmula de Parseval, calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

61. Considere no espaço $L^2[-1,1]$, as funções $1, x, x^2$.

(a) Aplique o método de **Schmidt** a estas funções (pela ordem indicada) para obter um sistema ortonormado $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

(b) Representando por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ as três raízes de índice três da unidade, mostre que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, onde $\psi_i = \alpha_i \phi_i$, é uma base ortonormada do subespaço X gerado por $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

(c) Sendo $f \in X, (\psi_1, f) = 2i, (f, \psi_2) = 1 - i, (f, \psi_3) = 1 + i$, calcule $\|f\|_2$.

(d) Calcule a distância das funções x e x^2 ao subespaço das funções constantes de $L^2[-1,1]$.

62. Seja X um espaço com produto interno, completo. Se $y' \in X'$ é tal que $< x, y' >= (x, y)$, seja $\mathcal{R}$ o operador de X em X' tal que $\mathcal{R}y = y'$. Mostre que os anuladores e os complementos ortogonais verificam as relações:

$$S^o = \mathcal{R}(S^\perp); \qquad S^\perp = \mathcal{R}^{-1}(S^o); \qquad {}^o(S^o) = S^{\perp\perp}.$$

Mostre também que se S é subespaço fechado de X então $S = S^{\perp\perp}$.

63. Considere o operador A do exercício **47** com $p = q = 2$. Determine o operador adjunto de A.

64. Seja $A : \ell^2 \to \ell^2$ definida por $A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Determine A^* e mostre que A é uma isometria mas não unitária.

65. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ normal.

(a) Prove que:

i. $\|Ax\| = \|A^*x\|, x \in X$.

ii. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.

iii. $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A)^\perp$, logo $X = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A)$.

(b) Seja X um espaço de Hilbert complexo. Sabendo que $[(Ax, x) = (Bx, x), \forall x \in X] \Rightarrow A = B$, prove que A é normal sse $\|Ax\| = \|A^*x\|, \forall x \in X$.

66. Seja A uma transformação autoadjunta num espaço complexo e λ um valor próprio de A. Prove que:

(a) λ é real;

(b) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $Ax_i = \lambda_i x_i (i = 1, 2)$, então $x_1 \perp x_2$.

67. Seja X um espaço de Hilbert. Prove que o produto de um número finito de operadores unitários de $\mathcal{L}(X, Y)$ é ainda um operador unitário.

68. Seja $U \in \mathcal{L}(X)$ uma transformação unitária. Prove que:

(a) $(Ux, Uy) = (x, y), \forall x, y \in X$;

(b) U é uma isometria bijectiva em X;

(c) se λ é valor próprio de U, então $|\lambda| = 1$.