

ANÉIS

1. Averigüe se os seguintes conjuntos têm estrutura de anel para as operações indicadas:

- (a) $(n\mathbb{Z}, +, \times)$ sendo $n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ com n número natural fixo, $+$ e $\times$ adição e multiplicação usuais de números inteiros.
- (b) $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ sendo $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ com n número natural fixo, $\oplus_n$ e $\otimes_n$ adição e multiplicação módulo n .
- (c) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ sendo $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, com n número natural fixo, o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos num corpo $\mathbb{K}$, $+$ e $\times$ adição e multiplicação usuais de matrizes.
- (d) $(A, +, \cdot)$ sendo $(A, +)$ um grupo abeliano e $a \cdot b = 0$, para quaisquer $a, b \in A$.
- (e) $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ sendo $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X , $X \neq \emptyset$, $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$ e $A \cdot B = A \cap B$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.
- (f) $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ sendo $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X , $X \neq \emptyset$, $A + B = A \cup B$, e $A \cdot B = A \cap B$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.
- (g) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times, +)$ sendo $\times$ e $+$ a multiplicação e adição usuais de números racionais.
- (h) $(A^S, \oplus, \otimes)$ sendo A^S o conjunto das aplicações de S em A com $(A, +, \cdot)$ anel e

$$(f \oplus g)(s) = f(s) + g(s), \forall s \in S, \forall f, g \in A^S$$

$$(f \otimes g)(s) = f(s) \cdot g(s), \forall s \in S, \forall f, g \in A^S.$$

- (i) $(A^A, \oplus, \otimes)$ sendo A^A o conjunto das aplicações de A em A com $(A, +, \cdot)$ anel e

$$(f \oplus g)(a) = f(a) + g(a), \forall a \in A, \forall f, g \in A^A$$

$$(f \otimes g)(a) = f(g(a)), \forall a \in A, \forall f, g \in A^A.$$

- (j) $(A, \oplus, \otimes)$ sendo $(A, +, \cdot)$ um anel com identidade que designamos por 1 e

$$a \oplus b = a + b + 1, \forall a, b \in A,$$

$$a \otimes b = a + b + a \cdot b, \forall a, b \in A.$$

- (k) $(G, +, \times)$ sendo $G = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $+$ e $\times$ adição e multiplicação usuais de números complexos.

2. Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel com identidade e a um elemento invertível de A . Prove as seguintes proposições:

- (a) O inverso de a é único.
- (b) a não é um divisor de zero.
- (c) O simétrico de a é invertível.
- (d) O par $(\mathcal{U}, \cdot)$ sendo $\mathcal{U}$ o conjunto dos elementos invertíveis de A (chamados as *unidades* de A) é um grupo.

3. Quais das seguintes propriedades são válidas em qualquer anel A ? E em qualquer anel comutativo?

- (a) $a^m a^n = a^{m+n}, \forall a \in A, \forall m, n \in \mathbb{N}$
- (b) $(a^m)^n = a^{mn}, \forall a \in A, \forall m, n \in \mathbb{N}$
- (c) $(ab)^m = a^m b^m, \forall a, b \in A, \forall m \in \mathbb{N}$

4. Seja A um anel com identidade 1 e não tendo divisores de zero. Para $a, b \in A$ verifique que:

- (a) $ab = 1$ se e só se $ba = 1$.
- (b) Se $a^2 = 1$ então ou $a = 1$ ou $a = -1$.

5. Indique os divisores de zero de $\mathbb{Z}_9$.

6. Prove que $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ é divisor de zero se e só se $m.d.c.(a, n) \neq 1$.
7. Prove que $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se e só se n é primo.
8. Sejam a e b dois elementos de um anel R com identidade. Se $n \in \mathbb{Z}^+$ e a e b comutam, deduza a expressão binomial

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n a^{n-i} b^i$$

onde

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

9. Sendo A um anel e $a \in A \setminus \{0\}$, prove que
 $(ab = ac \Rightarrow b = c) \wedge (ba = ca \Rightarrow b = c) \Leftrightarrow a$ não é um divisor de zero.
10. Um elemento a de um anel R diz-se *idempotente* se $a^2 = a$ e *nilpotente* se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostre que:
 - (a) Um elemento idempotente diferente de zero não pode ser nilpotente.
 - (b) Qualquer elemento nilpotente diferente de zero é um divisor de zero.
11. Considere o produto cartesiano de dois anéis R e S , com as seguintes operações:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2), \quad (r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S.$$

Prove que $R \times S$, com estas operações, é um anel.

12. Chama-se *centro* de um anel A ao conjunto $\{x \in A \mid xa = ax, \forall a \in A\}$. Mostre que o centro de A é um subanel do anel A . Será um ideal?
13. Mostre que:
 - (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ é um ideal de $\mathbb{Z}$;
 - (b) $\mathbb{Z}$ é um subanel, mas não é um ideal de $\mathbb{Q}$.
14. Averigüe quais dos seguintes conjuntos são subanéis dos anéis indicados:
 - (a) O conjunto dos inteiros pares em $(\mathbb{Z}, +, \times)$;
 - (b) O conjunto dos inteiros ímpares em $(\mathbb{Z}, +, \times)$;
 - (c) O conjunto dos números reais de forma $a + b\sqrt{2}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, em $(\mathbb{R}, +, \times)$;
 - (d) O conjunto dos números complexos da forma ib , com $b \in \mathbb{R}$, em $(\mathbb{C}, +, \times)$.
15. (a) Prove que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um subanel de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ (ver o exercício 137) e que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ tem identidade diferente da identidade de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$.
 (b) Prove que $\mathbb{Z} \times \{0\}$ é um domínio de integridade.
16. Prove que a intersecção de qualquer família de subanéis (resp., ideais) de um anel A é um subanel (resp., ideal) de A .
17. (a) Qual é o menor subanel de $\mathbb{Z}$ que contém o 3?
 (b) Qual é o menor subanel de $\mathbb{R}$ que contém o $\frac{1}{2}$?
18. Seja A um anel. Dados dois ideais I e J de A , considere o conjunto $I + J = \{a + b : a \in I \text{ e } b \in J\}$.
 - (a) Mostre que $I + J$ é um ideal de A .
 - (b) Prove que se N é um subanel de A que contém I e J , então N contém $I + J$.
19. Determine os ideais do anel $\mathbb{Z}_n$ para

$$(a) \ n = 4; \quad (b) \ n = 11; \quad (c) \ n = 12; \quad (d) \ n = 16.$$

20. Considere o conjunto $M_n(\mathbb{Z})$ das matrizes $n \times n$ com elementos inteiros.
 - (a) Verifique que $M_n(\mathbb{Z})$ é um anel para as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes.
 - (b) Prove que $P = \{[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Z}) \mid a_{ij} \text{ é par} \}$ é um ideal do anel $M_n(\mathbb{Z})$.