

21. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel.

- (a) Suponha que existe $a \in A - \{0\}$ tal que a não é divisor de zero e, além disso, $a^k = a$ para algum $k \in \mathbb{N} - \{1\}$. Prove que o anel A tem identidade.
- (b) Suponha que I e J são ideais de A tais que $I \cap J = \{0\}$. Mostre que, quaisquer que sejam $x \in I$ e $y \in J$, verifica-se $xy = 0$.

22. Averigüe quais das seguintes aplicações são homomorfismos de anéis.

- (a) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
 $a \longmapsto 5a$
- (b) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$
 $a \longmapsto \text{resto da divisão de } a \text{ por } n$
- (c) $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}$
 $a + ib \longmapsto a^2 + b^2$, sendo G o anel dos inteiros de Gauss.

23. Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Prove que se I é um ideal de A então $f(I)$ é um ideal de $f(A)$.

24. Seja R um anel e f um endomorfismo de R . Mostre que $S = \{a \in R \mid f(a) = a\}$ é um subanel de R .

25. Sejam A e A' anéis isomorfos. Prove que:

- (a) A tem identidade se e só se A' tem identidade.
- (b) A é comutativo se e só se A' é comutativo.
- (c) A não tem divisores de zero se e só se A' não tem divisores de zero.

26. Considere os seguintes subanéis de $\mathbb{R}$:

$$R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{e} \quad S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Verifique que $\theta : R \longrightarrow S$ definida por $\theta(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{3}$ não é um isomorfismo de anéis.

- 27. (a) Sejam R e S dois anéis com identidade, respectivamente, e_1 e e_2 , isomorfos. Prove que se $x^2 = e_1 + e_1$ tem uma solução em R , então $x^2 = e_2 + e_2$ tem uma solução em S .
- (b) Verifique que $x^2 = 2$ tem uma solução no anel R do exercício anterior.
- (c) Mostre que os anéis R e S do exercício anterior não são isomorfos.

28. Seja f um homomorfismo de um domínio de integridade D num domínio de integridade S . Prove que $f(D) = \{0\}$ ou $f(1_D) = 1_S$.

29. Seja $f : R \longrightarrow R'$ um homomorfismo sobrejectivo de anéis. Prove que:

- (a) $f(Z(R)) \subseteq Z(R')$ sendo $Z(R)$ e $Z(R')$, respectivamente, o centro de R e de R' .
- (b) Se R é um anel comutativo com identidade em que todo o ideal é principal, também R' o é.
- (c) Se o elemento $a \in \mathbb{R}$ é nilpotente, então a sua imagem $f(a)$ é nilpotente.

30. Considere o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

- (a) Prove que o ideal gerado por $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ é um ideal primo se e só se p é um número primo.
- (b) Determine o ideal gerado por $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$, com $m.d.c.(a, b) = 1$.

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m.d.c.(m, n) = 1 \text{ e } n \text{ é ímpar} \right\},$$

31. Sejam

$$B = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m.d.c.(m, n) = 1, n \text{ é ímpar e } m \text{ é par} \right\}.$$

Prove que:

- (a) A é um anel para as operações usuais de adição e multiplicação de números racionais.
 (b) B é um ideal maximal de A .
32. Considere o anel A definido no exercício anterior. Mostre que:
- (a) Se $I \neq \{0\}$ é um ideal de A , então $\mathbb{N} \cap I \neq \emptyset$.
 (b) A é um domínio de ideais principais.
33. Seja D um domínio de ideais principais. Prove que se I é um ideal primo de D , $I \neq \{0\}$, então I é um ideal maximal de D .
34. Considere os ideais $\langle 2 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle$ do anel $\mathbb{Z}$. Determine o anel quociente respectivo e diga se é um corpo.
35. Seja A um anel com identidade $e \neq 0$, no qual todo o subanel é um ideal. Prove que A é isomorfo a $\mathbb{Z}$ ou A é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.
36. Seja f um homomorfismo não nulo de um anel comutativo A num domínio de integridade D . Prove que $\text{Nuc } f$ é um ideal primo de A .
37. Sejam D um domínio de integridade e a e b elementos de D . Mostre que $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$ e indique uma condição necessária e suficiente para que $\langle ab \rangle = \langle a \rangle$.
38. Determine o produto dos polinômios f e g do anel $A[x]$, sendo
- (a) $f = 2x^5 + 1$, $g = 2x^5 + 1$ e $A = \mathbb{Z}_4$;
 (b) $f = 2x^2 + 2x - 2$, $g = 3x - 3$ e $A = \mathbb{Z}_6$;
 (c) $f = 2x^2 - 4x + 3$, $g = 4x - 5$ e $A = \mathbb{Z}_8$.
39. (a) Sejam D um domínio de integridade e f um elemento não nulo de $D[x]$. Prove que f é invertível se e só se $\text{gr}(f) = 0$ e f for invertível considerado como elemento de D . Conclua que se $\mathbb{K}$ for um corpo, então os únicos elementos invertíveis de $\mathbb{K}[x]$ são os polinômios de grau zero.
 (b) O resultado da alínea anterior é válido se D for um anel comutativo qualquer?
40. Sendo f e g elementos de $\mathbb{K}[x]$, determine o quociente e o resto da divisão de f por g , para
- (a) $f = x^4 + 4x^2 + 4$, $g = x^2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;
 (b) $f = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g = x + 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$;
 (c) $f = x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$, $g = 2x^3 - 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$.
41. Averigüe se os ideais $\langle x \rangle$ e $\langle 2, x \rangle$ do domínio $\mathbb{Z}[x]$ são (a) primos; (b) maximais.
42. Determine o corpo dos quocientes
- (a) do anel dos inteiros pares;
 (b) do anel dos inteiros de Gauss;
 (c) do anel $\mathbb{Z}_2[x]$.
43. Sejam A um anel comutativo e a um elemento fixo de A . Considere a aplicação
- $$\phi_a : \begin{array}{ccc} A[x] & \longrightarrow & A \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array},$$
- denotando por $f(a)$ o valor da função polinomial associada a f no ponto a .
- (a) Mostre que ϕ_a é um homomorfismo de anéis.
 (b) Determine o núcleo de ϕ_a .
44. Prove que são domínios euclidianos:
- (a) $\mathbb{Z}$; (b) qualquer corpo; (c) o domínio G dos inteiros de Gauss.
45. Mostre que $g(a) = |a|$ não é uma função euclidiana no corpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.