

70. Sejam  $F$  um corpo de característica  $p \neq 0$  e  $a$  um elemento não nulo de  $F$ . Prove que  $n$  é um número inteiro positivo tal que  $na = 0$  se e só se  $n$  é um múltiplo de  $p$ .
71. Seja  $F$  um corpo de característica  $p \neq 0$ . Prove que a aplicação  $\Pi : F \rightarrow F$ , definida por  $\Pi(x) = x^p$  para qualquer  $x \in F$ , é um homomorfismo.
72. Sejam  $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n$  elementos de um corpo de característica  $p \neq 0$ . Prove que:
- (a)  $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ ;      (b)  $(a-b)^{p^n} = a^{p^n} - b^{p^n}$ ;      (c)  $(c_1 + c_2 + \dots + c_n)^p = c_1^p + c_2^p + \dots + c_n^p$ .
73. Averigüe se os seguintes anéis quociente são corpos e, nos casos afirmativos, determine os elementos que os constituem e a sua característica:
- (a)  $\mathbb{Z}[i]/\langle 1-i \rangle$ ;      (b)  $\mathbb{Z}[i]/\langle 2+i \rangle$ ;      (c)  $\mathbb{Z}[i]/\langle 5 \rangle$ ;  
 (d)  $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+4 \rangle$ ;      (e)  $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3-2 \rangle$ ;      (f)  $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1 \rangle$ .
74. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:
- (a)  $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+5y=3 \end{cases}$  sobre  $\mathbb{Z}_7$ ;      (b)  $\begin{cases} x+iy=-i \\ ix-y=2 \end{cases}$  sobre  $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ .
75. Qual a sua opinião a respeito da seguinte afirmação: No corpo  $\mathbb{Z}_7$ ,  $4+6=3$  e, portanto, o produto dos polinómios  $x^4$  e  $x^6$  em  $\mathbb{Z}_7[x]$  é igual a  $x^3$ .
76. Indique, a menos de associados, todos os divisores de  $x^4-1$  em  $\mathbb{R}[x]$ .
77. Sejam  $F_1, F_2, F_3$  três corpos tais que  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$  e  $\theta \in F_3$ . Verifique que se  $\theta$  é algébrico sobre  $F_1$  então é algébrico sobre  $F_2$ . Mostre que a proposição recíproca é falsa.
78. Sejam  $F_1$  um subcorpo de um corpo  $F$  e  $\alpha, \beta$  elementos de  $F$ . Prove que  $F_1(\alpha, \beta) = F_1(\alpha)(\beta)$ . Generalize para o caso de  $n$  elementos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ .
79. Sejam  $F_1$  um subcorpo de um corpo  $F$  e  $\alpha$  um elemento de  $F$ . Prove que:
- (a) se  $\alpha$  é algébrico sobre  $F_1$ , o mesmo sucede a  $\alpha+c$  e a  $c\alpha$ , qualquer que seja  $c \in F_1$ ;  
 (b) se  $\alpha$  é algébrico sobre  $F_1$ , o mesmo sucede a  $\alpha^2$  e reciprocamente.  
 Conclua que  $\mathbb{C}$  é uma extensão algébrica de  $\mathbb{R}$ .
80. Averigüe quais dos seguintes elementos são algébricos ou transcendentos sobre o corpo  $\mathbb{Q}$ :
- (a)  $\sqrt{7}$       (b)  $\sqrt[3]{2}$       (c)  $\pi^2$       (d)  $e+3$       (e)  $1+i$ .
81. Sejam  $F_1$  um subcorpo de um corpo  $F$  e  $\alpha$  um elemento de  $F$ . Prove que se  $\alpha$  é algébrico sobre  $F_1$  então  $F_1(\alpha) = F_1[\alpha]$ , justificando pormenorizadamente os seguintes passos:
- (a)  $F_1[\alpha]$  é um domínio de integridade.  
 (b) Sendo  $f(\alpha)$  um elemento não nulo de  $F_1[\alpha]$  e  $m$  o polinómio mínimo de  $\alpha$  sobre  $F_1$ , então  
     i.  $f$  não é múltiplo de  $m$ ;  
     ii. existem  $t, s \in F_1[x]$  tais que  $tf + sm = 1$ ;  
     iii.  $t(\alpha).f(\alpha) = 1$ .  
 (c)  $F_1[\alpha]$  é um corpo.
82. Determine o inverso de cada um dos seguintes elementos nas extensões simples  $\mathbb{Q}(\alpha)$  indicadas:
- (a)  $1-2\alpha+3\alpha^2$ , com  $\alpha$  raiz do polinómio  $x^3-x+1$ ;  
 (b)  $-\alpha^2+2\alpha-3$ , com  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ ;  
 (c)  $\alpha+1$  e  $\alpha^2-6\alpha+8$ , com  $\alpha \neq 0$  tal que  $\alpha^4-6\alpha^3+9\alpha^2+3\alpha=0$ .
83. Sejam  $F$  e  $E$  dois corpos tais que  $F \subseteq E$ . Sabendo que, se  $\alpha, \beta \in E$  são elementos algébricos sobre  $F$ ,  $[F(\alpha, \beta) : F]$  é finita, prove que os elementos de  $E$  algébricos sobre  $F$  formam um subcorpo de  $E$ .
84. Seja  $F$  uma extensão dum corpo  $F_1$  e  $\alpha \in F$  um elemento algébrico de grau  $n$  sobre  $F_1$ . Prove que todo o elemento de  $F_1(\alpha)$  se pode exprimir de modo único na forma  $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$  com  $a_i \in F_1$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ).

85. Exprima na forma referida no exercício anterior os seguintes elementos das extensões algébricas  $\mathbb{Q}(\alpha)$  indicadas:
- $\alpha^4, \alpha^2, \alpha^5$  e  $\alpha^5 - \alpha^4 + 2$ , com  $\alpha$  raiz do polinómio  $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ .
  - $(\alpha^3 + 2)(\alpha^3 + 3\alpha)$ ,  $\alpha^4(\alpha^4 + 3\alpha^2 + 7\alpha + 5)$  e  $\frac{\alpha+2}{\alpha^2+3}$ , sendo  $\alpha$  uma solução da equação  $x^5 + 2x + 2 = 0$ .
86. Determine o polinómio mínimo sobre  $\mathbb{Q}$  dos seguintes elementos:
- $2 + \sqrt{3}$
  - $\theta^2 - 1$ , com  $\theta^3 = 2\theta + 2$
  - $\theta^2 + \theta$ , com  $\theta^3 = -3\theta^2 + 3$ .
87. Prove que  $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ,  $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  e  $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(i)$ .
88. Seja  $F$  uma extensão finita de  $F_1$ . Prove que:
- se  $[F : F_1]$  é um número primo, então  $F$  é uma extensão simples de  $F_1$ ;
  - se  $\theta \in F$ , então o grau de  $\theta$  é um divisor de  $[F : F_1]$ ; conclua que se tem  $F = F_1(\theta)$  se e só se o grau de  $\theta$  coincidir com  $[F : F_1]$ ;
  - se  $f \in F_1[x]$  é irredutível em  $F_1[x]$  e o grau de  $f$  é um número primo com  $[F : F_1]$  e maior do que 1, então  $f$  não tem raízes em  $F$ .
89. Sejam  $F, F_1$  e  $F_2$  corpos com  $F \subseteq F_i$ , para  $i = 1, 2$ . Se  $F_1$  e  $F_2$  são extensões finitas de  $F$  tais que  $[F_1 : F]$  e  $[F_2 : F]$  são primos entre si, então  $F_1 \cap F_2 = F$ .
90. Determine o grau sobre  $\mathbb{Q}$  e uma base de cada uma das seguintes extensões de  $\mathbb{Q}$ :
- $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ ;
  - $\mathbb{Q}(\sqrt{18}, \sqrt[4]{2})$ ;
  - $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ ;
  - $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \theta)$ , com  $\theta^4 + 6\theta + 2 = 0$ ;
  - $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \theta)$ , com  $\theta^3 + 3 = 0$ ;
  - $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ , com  $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$  e  $\beta^2 - \beta = 1$ .
91. Determine o grau e uma base da extensão  $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$  de  $\mathbb{Q}(\pi)$ .
92. Sejam  $\alpha^3 = 2$ ,  $w$  uma raiz cúbica da unidade e  $\beta = w.\alpha$ . Determine a dimensão e uma base de  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$  sobre  $\mathbb{Q}$ .
93. Mostre que  $x^2 + 1$  é irredutível sobre  $\mathbb{Z}_3$ . Sendo  $u$  uma raiz deste polinómio determine o número de elementos de  $\mathbb{Z}_3(u)$  e as tabelas de adição e multiplicação.
94. Averigüe se os seguintes polinómios são irredutíveis sobre o corpo indicado:
- $x^2 + 2$  sobre  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
  - $x^2 - 2x + 2$  sobre  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
  - $x^3 - 3x + 3$  sobre  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ .
95. Determine para quais dos seguintes polinómios  $f \in F[x]$  existem extensões  $F(\alpha)$  tais que  $f$  é o polinómio mínimo de  $\alpha$ :
- $x^2 - 4$ ,  $F = \mathbb{Q}$ ;
  - $x^3 + x + 2$ ,  $F = \mathbb{Z}_3$ ;
  - $x^2 + 1$ ,  $F = \mathbb{Z}_5$ .
96. Para cada uma das expressões de  $\mathbb{Q}$  indicadas averigüe se  $\theta$  gera a mesma extensão:
- $\theta = 2 + \sqrt[3]{4}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ;
  - $\theta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ;
  - $\theta = u^2 + u + 1$ ,  $\mathbb{Q}(u)$ , com  $u^2 + 5u - 5 = 0$ .
97. Considere o polinómio  $f = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ . Seja  $\alpha$  uma raiz de  $f$ .
- Determine o inverso de  $\alpha + 1$  em  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , escrevendo-o como polinómio em  $\alpha$  de coeficientes racionais.
  - Considere  $u = \alpha^2 + 1$ . As extensões  $\mathbb{Q}(u)$  e  $\mathbb{Q}(\alpha)$  coincidem?
98. Determine
- o inverso de  $2 + \sqrt[3]{4}$  em  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ;
  - a dimensão e uma base da extensão  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha)$  sobre  $\mathbb{Q}$ , onde  $3\alpha^3 + 7\alpha^2 = 14\alpha - 56$ .
99. Determine a dimensão e uma base da extensão  $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \theta)$  sendo  $\theta$  uma raiz do polinómio  $x^3 + 2x^2 + 2x - 4$  tal que  $[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}] > 1$ .
100. Seja  $\theta$  uma raiz não nula do polinómio  $x^4 - x^3 + x^2 - 2x \in \mathbb{Q}[x]$ . Determine  $\frac{\theta^2}{\theta^2+1}$  e exprima o resultado como combinação linear dos elementos duma base do espaço vectorial  $\mathbb{Q}(\theta)$  sobre  $\mathbb{Q}$ .
101. Considere  $\mathbb{Z}_5(\alpha)$ , sendo  $\alpha^2 + 3 = 0$ , e determine:
- a expressão geral dos elementos desse corpo e o seu cardinal;
  - o polinómio mínimo de  $\beta = \alpha + 1$ ;
  - o inverso de  $\beta$ .