

Desigualdades de Hölder e Minkowski

1. Representa-se por $\ell_{(n)}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço linear $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) munido da norma:

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

(a) Seja $1 \leq p \leq \infty$, e p' o seu conjugado, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = \infty$ se $p = 1$; $p' = 1$ se $p = \infty$). Mostre que:

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'} \quad \text{para } a, b \geq 0.$$

Sugestão: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é evidente. Seja então $1 < p < \infty$.

i. Se $a = 0$ ou $b = 0$ a conclusão é imediata.

ii. Suponha então que a e b são positivos.

Se $k \in (0, 1)$ defina a função $f(t) = k(t-1) - t^k + 1$ para $t \geq 1$. Note que $f(1) = 0$ e $f'(t) \geq 0$ e daí conclua que $t^k \leq kt + (1-k)$.

iii. Se $a \geq b$ faça $t = \frac{a}{b}$ e $k = \frac{1}{p}$.

Se $a < b$ faça $t = \frac{b}{a}$ e $k = \frac{1}{p'}$.

(b) Prove a desigualdade de **Hölder**:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Sugestão: Se $p = 1$ ou $p = \infty$, a desigualdade é evidente. Seja então $1 < p < \infty$.

i. Se $x = 0$ ou $y = 0$ a desigualdade é óbvia.

ii. Suponha então que são ambos não nulos e faça

$$a_i = \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \right)^p \quad \text{e} \quad b_i = \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}} \right)^{p'}$$

usando a) para obter

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{p'}.$$

Nota: No caso $p = p' = 2$ obtemos

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que toma o nome de desigualdade de **Cauchy-Schwarz**.

(c) Prove a desigualdade de **Minkowski**:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Sugestão:

- i. Se $p = 1$ ou $p = \infty$ a desigualdade é evidente.
- ii. Suponha $1 < p < \infty$ e use b) para obter o seguinte:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{\frac{p}{p'}} \end{aligned}$$

2. (a) Prove que a função f definida por $f(x) := (1 + x)^\rho - (1 + x^\rho)$ é crescente em $[0, \infty)$, para $\rho \geq 1$.
- (b) Prove que com $\rho \geq 1$ e $a, b \geq 0$, temos $(a + b)^\rho \geq a^\rho + b^\rho$.
- (c) Prove a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p \leq q < \infty.$$

Desigualdades de Hölder e de Minkowski para integrais

3. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, mostre que $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^{p'}}{p'}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, 1 < p < \infty$.

4. Fazendo $\alpha = \frac{|f(x)|}{[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}}$ e $\beta = \frac{|g(x)|}{[\int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx]^{\frac{1}{p'}}}$, obtenha a desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left[\int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} |g|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} .$$

5. Use a identidade $(|\alpha| + |\beta|)^p = (|\alpha| + |\beta|)^{p-1}|\alpha| + (|\alpha| + |\beta|)^{p-1}|\beta|$ para obter a desigualdade de Minkowski,

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

6. Suponha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Sendo $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, mostre que $fg \in L^r(\Omega)$ e $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

7. Uma função real $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa se é convexo o conjunto $E = \{(x, y) : x \in \mathcal{D} \wedge y \geq f(x)\}$.

(a) Mostre que, se $\mathcal{D}$ é convexo, então $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa sse $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$, $x, y \in \mathcal{D}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

(b) Mostre que f é convexa sse

$$f \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i), \quad x_i \in \mathcal{D}, \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$