

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA
ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 2000/2001

Folha 3

Transposta de uma transformação linear

24. (a) Sendo $J : X \rightarrow X^{ff}$ e $J_1 : Y \rightarrow Y^{ff}$ as aplicações canónicas e $A : X \rightarrow Y$ mostre que

$$J_1 Ax = (A^T)^T Jx, \forall x \in X.$$

- (b) Mostre que sendo n a dimensão de X e $J : X \rightarrow X^{ff}$ e $J_1 : X^f \rightarrow X^{fff}$ as aplicações canónicas, então $J^T = J_1^{-1}$.

25. Seja X um espaço vectorial de dimensão n , $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de X e $(e'_1, \dots, e'_n)$ a base dual em X^f .

- (a) Prove que $\forall x' \in X^f \left(x' = \sum_{i=1}^n \alpha_i e'_i \right)$ e $\forall x \in X \left(x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right)$,

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i.$$

- (b) Considere a transformação linear $A : X \rightarrow X$ definida por

$$A \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i+1} e_i.$$

Determine a transformação transposta $A^T : X^f \rightarrow X^f$.

26. Considere os vectores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$, $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ e $f_3 = (1, 1, 1)$. Dadas as bases $\{e_1, e_2\}$ em $\mathbb{R}^2$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ em $\mathbb{R}^3$ e sabendo que $\mathcal{A}(e_1) = (2, 1, 0)$ e $\mathcal{A}(e_2) = (2, 1, 1)$, determine uma matriz que represente $\mathcal{A}^T$ e calcule

$$\mathcal{A}^T \left(\frac{f'_1}{2} + \frac{f'_2}{2} + \frac{f'_3}{2} \right),$$

onde $\{f'_1, f'_2, f'_3\}$ é a base dual de $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Espaços de sucessões

27. Mostre que a aplicação $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \mapsto (\xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ de ℓ^p em ℓ^p é uma transformação linear não invertível.

28. Considere a matriz infinita $A := [a_{ij}]$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^p \right)$ é convergente, $p > 1$.

Seja $x := (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell^{p'}$.

- (a) Prove que, para cada i , $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$ é convergente.

- (b) Definindo $y := (\eta_1, \eta_2, \dots)$ com $\eta_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$, mostre que $y \in \ell^p$.

29. Em ℓ^2 define-se uma aplicação x' por

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i, \text{ com } a := (\alpha_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2, \text{ e } x := (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Mostre que $x' \in (\ell^2)^f$.

30. Seja ℓ^∞ o conjunto das sucessões limitadas de números reais (ou complexos).

- (a) Verifique que ℓ^∞ é espaço de Banach.
- (b) Mostre que (C_0) é um subespaço vectorial fechado de ℓ^∞ .
- (c) Seja $e := (1, 1, \dots, 1, \dots) \in (C)$, e represente-se por $\langle e \rangle$ o subespaço vectorial de (C) gerado por e . Justifique ser $(C) = (C_0) \oplus \langle e \rangle$.

31. Prove que ℓ^∞ não é separável.

Sugestão: Recorde que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tem a potência do contínuo. Considere o conjunto de todas as sucessões $(x_n)_n$ tais que $x_n = 0$ ou $x_n = 1$.

Espaços de Banach e transformações lineares limitadas

32. Seja X um espaço vectorial normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e M um subespaço fechado de X . Considere a relação de equivalência $\mathcal{R}$, em X :

$$x \mathcal{R} y \iff x - y \in M.$$

Seja X/M o espaço quociente, e para $[x] \in X/M$ defina-se $\|[x]\| := \inf_{m \in M} \|x + m\|$. Mostre que $\|\cdot\|$ define uma norma em X/M .

33. Seja X um espaço normado.

- (a) Prove que se uma sucessão de Cauchy em X tem uma subsucessão convergente, então ela própria é convergente.
- (b) Suponha que sempre que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente. Prove que, nesse caso, X é espaço de Banach.

Sugestão: Sendo $(x_n)_n$ de Cauchy, justifique que existe uma subsucessão x_{n_j} tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| < \infty$.

34. Sendo A_1 e A_2 dois espaços de Banach, define-se $A = A_1 + A_2 := \{a = a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, que é ainda um espaço de Banach com a norma $\|a\| = \inf\{\|a_1\|_1 + \|a_2\|_2 : a = a_1 + a_2\}$. Sejam B_1 e B_2 outros dois espaços de Banach e $B_1 + B_2$ o espaço de Banach definido analogamente. Seja $T \in \mathcal{L}(A_1, B_1) \cap \mathcal{L}(A_2, B_2)$.

- (a) Mostre que com $Ta = Ta_1 + Ta_2$ (para $a = a_1 + a_2$, $a_i \in A_i$) se define, sem ambiguidade, uma aplicação linear de A em B .
- (b) Mostre que T é limitada de A em B .

Sugestão: Se $a \in A$, faça $a = a_1 + a_2 \in A_1 + A_2$ com $\|a\| \geq \frac{\|a_1\|_1 + \|a_2\|_2}{2}$.

- (c) Sejam A_0 e B_0 dois espaços de Banach tais que $A_0 \hookrightarrow A$, $B_0 \hookrightarrow B$ e $T(A_0) \subset B_0$. Designe por T_0 a restrição de T a A_0 . Supondo que $a_n \rightarrow a$ em A_0 e $T_0 a_n \rightarrow b$ em B_0 , justifique que $a_n \rightarrow a$ em A e $T_0 a = b$.