

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 2000/2001

Folha 4

35. Seja Ω um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, com medida finita.

- (a) Mostre que sendo $q > p \geq 1$, a injeção $I : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é uma aplicação contínua.
- (b) Sendo $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $h \in L^r(\Omega)$, prove que $fgh \in L^1(\Omega)$, tendo-se:

$$\|fgh\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega} \cdot \|g\|_{q,\Omega} \cdot \|h\|_{r,\Omega}.$$

36. Considere o espaço $C[0, 1]$ e o operador

$$\begin{aligned} T : C[0, 1] &\longrightarrow C[0, 1] \\ f &\longmapsto Tf \quad \text{com } Tf(t) := \frac{tf(t)}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Prove que T é linear e calcule $\|T\|$.

37. Seja $A := [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n e defina-se o operador real

$$\begin{aligned} A : \ell_{(n)}^2 &\longrightarrow \ell_{(n)}^\infty \\ (x_i)_{i=1}^n &\longmapsto (y_i)_{i=1}^n \quad \text{onde } y_i := \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \end{aligned}$$

Mostre que $A \in \mathcal{L}(\ell_{(n)}^2, \ell_{(n)}^\infty)$ e que $\|A\| = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Sugestão: Prove que o máximo da função $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ sobre a superfície $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ é $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

38. Seja $K \in C(I \times I)$, $f \in C(I)$ com $I := [0, 1]$. Defina-se $Af(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$.

- (a) Prove que $Af \in C(I)$.
- (b) Mostre que $A \in \mathcal{L}(C(I), C(I))$.

39. (a) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tendo em conta que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sse existe um escalar α tal que $Th = \alpha h$, $h \in \mathbb{R}$, mostre que a definição de derivada à Frechet de f em x coincide com a clássica definição de derivada.

(b) Mostre que se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ então a derivada de T em cada $x \in X$ é T .

40. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ diferenciáveis à Frechet, com X e Y espaços normados. Prove que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X$, $(\alpha f + \beta g)'_x = \alpha f'_x + \beta g'_x$ e conclua que a aplicação $D : f(\xi) \mapsto Df(\xi) = f'_\xi$ é linear.

41. Seja Ω um domínio do plano complexo $\mathbb{C}$ e Y um espaço vectorial normado complexo.

- (a) Mostre que a aplicação $\mathcal{L}(\mathbb{C}, Y) \ni T \xrightarrow{\psi} T(1) \in Y$ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(\mathbb{C}, Y)$ e Y .
- (b) A função $f : \mathbb{C} \rightarrow Y$ diz-se **analítica** em Ω se existir a sua derivada à Frechet em todo o ponto $z_0 \in \Omega$, i.e., se $\exists T_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, Y)$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0) - T_0(z - z_0)}{z - z_0} \right\|_Y = 0.$$

Justifique a seguinte definição equivalente:

“ $f : \mathbb{C} \rightarrow Y$ é **analítica** em Ω se existir, para cada $z_0 \in \Omega$, o limite em Y , $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = y_0$.”

Sugestão: Como é evidente, basta mostrar que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $T_0 \leftrightarrow y_0$ tal que $\frac{T_0(z - z_0)}{z - z_0} = y_0$.

Transformações lineares compactas

42. Seja $x = (x_n) \in \ell^2$, $Tx = (y_n)$ onde $y_n = \frac{x_n}{n}$. Prove que $T \in \mathcal{K}(\ell^2, \ell^2)$.

Sugestão: Mostre que $T = \lim_k T_k$, onde $T_k x = (y_n)$ com $y_n = \frac{x_n}{n}$ se $n \leq k$, $y_n = 0$ se $n > k$.

43. Mostre que o operador integral do exercício 38 é compacto.

44. Considere o seguinte teorema: “Seja Z um espaço normado tal que a superfície da bola unitária $B(0, 1)$ é compacta. Então Z tem dimensão finita.”

- (a) Prove que se a transformação identidade num espaço normado Y é um operador compacto, então Y tem dimensão finita.
- (b) Prove que se num espaço normado X toda a sucessão limitada tem uma subsucessão convergente, então X tem dimensão finita.
- (c) Justifique o recíproco do teorema: “Em todo o espaço normado de dimensão finita, a superfície da bola unitária é compacta.”

45. Seja X um espaço normado de dimensão infinita.

- (a) Mostre que $\mathcal{K}(X)$ é um ideal de $\mathcal{L}(X)$.
- (b) Sabendo-se que a identidade em X não é um operador compacto, mostre que uma transformação compacta A em X não admite inversa limitada.
- (c) Seja $A \in \mathcal{L}(C[0, 1])$ definida por $Af(x) = xf(x)$. Mostre que A não é uma transformação compacta.

Sugestão: Mostre que A é invertível no subespaço $Y = \{f \in C[0, 1] : f(x) = 0, x \in [0, \frac{1}{2}]\}$, definindo convenientemente $A^{-1}f$ em $[0, \frac{1}{2}]$ e $(\frac{1}{2}, 1]$.

Espaços duais e transformações duais

46. Mostre que $(aA + bB)' = aA' + bB'$ e que $(AB)' = B'A'$.

47. Seja $K \in C(I \times I)$, $I = [0, 1]$ e suponha que $A \in \mathcal{L}(L^p(I), L^q(I))$, onde

$$Af(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

Determine o operador dual de A ($1 \leq p, q < \infty$).