

ANÁLISE FUNCIONAL

Ano lectivo: 2000/2001

Folha 6

61. Considere no espaço $L^2[-1, 1]$, as funções $1, x, x^2$.
- (a) Aplique o método de **Schmidt** a estas funções (pela ordem indicada) para obter um sistema ortonormado $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.
 - (b) Representando por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ as três raízes de índice 3 da unidade, mostre que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, onde $\psi_i = \alpha_i \phi_i$, é uma base ortonormada do subespaço X gerado por $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.
 - (c) Sendo $f \in X$, $(\psi_1, f) = 2i$, $(f, \psi_2) = 1 - i$, $(f, \psi_3) = 1 + i$, calcule $\|f\|_2$.
 - (d) Calcule a distância das funções x e x^2 ao subespaço das funções constantes de $L^2[-1, 1]$.

62. Seja X um espaço com produto interno, completo. Se $y' \in X'$ é tal que $\langle x, y' \rangle = (x, y)$, seja $\mathcal{R}$ o operador de X em X' tal que $\mathcal{R}y = y'$. Mostre que os anuladores e os complementos ortogonais verificam as relações:

$$S^o = \mathcal{R}(S^\perp); \quad S^\perp = \mathcal{R}^{-1}(S^o); \quad {}^o(S^o) = S^{\perp\perp}.$$

Mostre também que se S é subespaço fechado de X então $S = S^{\perp\perp}$.

63. Considere o operador A do exercício 47 com $p = q = 2$. Determine o operador adjunto de A .
64. Seja $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definida por $A(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Determine A^* e mostre que A é uma isometria mas não unitária.
65. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ normal.

(a) Prove que:

- i. $\|Ax\| = \|A^*x\|, x \in X$.
- ii. $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.
- iii. $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A)^\perp$, logo $X = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A)$.

(b) Seja X um espaço de Hilbert complexo. Sabendo que $[(Ax, x) = (Bx, x), \forall x \in X] \Rightarrow A = B$, prove que A é normal sse $\|Ax\| = \|A^*x\|, \forall x \in X$.

66. Seja A uma transformação autoadjunta num espaço complexo e λ um valor próprio de A . Prove que:

- (a) λ é real;
- (b) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $Ax_i = \lambda_i x_i (i = 1, 2)$, então $x_1 \perp x_2$.

67. Seja X um espaço de Hilbert. Prove que o produto de um número finito de operadores unitários de $\mathcal{L}(X, Y)$ é ainda um operador unitário.

68. Seja $U \in \mathcal{L}(X)$ uma transformação unitária. Prove que:

- (a) $(Ux, Uy) = (x, y), \forall x, y \in X$;
- (b) U é uma isometria bijectiva em X ;
- (c) se λ é valor próprio de U , então $|\lambda| = 1$.