ELEMENTOS de TOPOLOGIA

Exame Duração: 2h30m

I. No conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$ dos números naturais positivos, considerem-se as colecções de partes

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}^*, A_n, A_{n+1}, ...\}\,, \qquad \text{onde} \quad A_n = \{1, 2, ..., n\},$$
$$\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}^*, B_n, B_{n+1}, ...\}\,, \qquad \text{onde} \quad B_n = \{n, n+1, ...\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Mostrar que τ_1 e τ_2 definem topologias em $\mathbb{N}^*$.

(b) Determinar o interior, o fecho, a fronteira e o derivado do conjunto $\{2, 3\}$, nos espaços topológicos $(\mathbb{N}^*, \tau_1)$ e $(\mathbb{N}^*, \tau_2)$.

II. Determinar a topologia τ em $\mathbb{R}$ de que a colecção $\mathcal{S}$ dos intervalos de comprimento unitário constitui uma sub-base.

III. Sejam τ_1 e τ_2 topologias num mesmo conjunto X.

Mostrar que a aplicação identidade $id_X : x \in X \mapsto id_X(x) = x \in X$ é contínua se, e somente se, τ_2 for menos fina do que τ_1.

IV. Provar que um subconjunto K de um espaço topológico *discreto* (E, cD) é compacto se, e somente se, K for finito.

V. Demonstrar que se $(A_i)_{i \in I}$ for uma família de partes conexas de um espaço topológico cuja intersecção é não vazia, a reunião de tal família é um conexo.

VI. Mostrar que toda a bola aberta de um espaço métrico é um aberto.

VII. Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão num espaço métrico (E, d) e

$$U_n = \{u_n, u_{n+1}, ...\}, \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Provar que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy se, e somente se, a sucessão $(\operatorname{diam} U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dos diâmetros dos conjuntos U_n, convergir para zero.

VIII. Sejam (E, d) um espaço métrico, K um compacto de E e α um ponto de $E \backslash K$.

Provar que existem abertos disjuntos U e V tais que $\alpha \subset U$ e $K \subset V$.

IX. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação *contínua* e *injectiva* de um espaço *compacto* X num espaço *métrico* Y.

Mostrar que X e $f(X)$ são homeomorfos.

F I M