ELEMENTOS de TOPOLOGIA

Exame Duração: 2h30m

I Seja $\mathcal{S}_1 = \{s_x : x \in \mathbb{R}\}$, onde $s_x = \big\{(t, t+x) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\big\}$, e considere-se em $\mathbb{R}^2$ a topologia τ_1 gerada por $\mathcal{S}_1$.

Seja $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cup \{r, s\}$, onde $r = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(t, -t+2) : t \in \mathbb{R}\}$, e considere-se em $\mathbb{R}^2$ a topologia τ_2 gerada por $\mathcal{S}_2$.

Dado o subconjunto

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\big\}$$

de $\mathbb{R}^2$, determinar o interior, a aderência e o exterior de C nos espaços topológicos $\big(\mathbb{R}^2, \tau_1\big)$ e $\big(\mathbb{R}^2, \tau_2\big)$ [*Sugestão*: a interpretação geométrica facilitará a resposta].

II **(a)** Dado um espaço métrico (M, d), provar que d é uma função real contínua.

(b) Seja E um espaço topológico *conexo* e admita-se que existe uma função real $f : E \to \mathbb{R}$ *contínua* e *não-constante*. Mostrar que E é infinito não-numerável.

(c) Provar que todo o espaço *métrico conexo* (M, d) com mais de um ponto é infinito não-numerável.

III Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy num espaço métrico M e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em M tal que $d(z_n, u_n) < \frac{1}{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é de Cauchy.

IV **(a)** Caracterizar (sem demonstração) os compactos de $\mathbb{R}$. Provar que uma função real *contínua* $f : E \to \mathbb{R}$, onde E é um espaço *compacto*, tem em E máximo e mínimo.

Nas alíneas seguintes, (E, d) é um espaço métrico e, para $x \in E$ e $r > 0$, põe-se

$$B(x,r) = \{u \in E : d(x,u) < r\} \quad \text{e} \quad B'(x,r) = \{u \in E : d(x,u) \leq r\}.$$

Além disso, supõe-se $f : E \to \mathbb{R}$ uma função *contínua* e *estritamente positiva.*

(b) Seja K uma parte *compacta* de E. Provar que $\bigcup_{x\in K} B'(x, f(x))$ é um fechado de E que contém K [*Sugestão*: considerar um ponto $u \in E \setminus \bigcup_{x\in K} B'(x, f(x))$ e aplicar **(a)** à função $x \in K \mapsto d(x,u) - f(x) \in \mathbb{R}$].

(c) Dar um exemplo que mostre que se F for um fechado não-compacto de E, o conjunto $\bigcup_{x\in F} B'(x, f(x))$ não é necessariamente fechado [*Sugestão*: poder-se-á, por exemplo, considerar $E = \mathbb{R}$, $F = [1, +\infty[$ e escolher f de modo conveniente].

F I M