Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Ano lectivo: 2000/2001 **Folha 1**

Breve introdução às topologias de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e x_0 um ponto de $\mathbb{R}$. Prove que as três formas seguintes de exprimir a continuidade de f em x_0 são equivalentes:

(a) para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, a desigualdade $|x - x_0| < \delta$ implica a desigualdade $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(b) para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \subset]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$;

(c) para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$, com $f(x_0) \in]u, v[$, existem $s, t \in \mathbb{R}$, com $x_0 \in]s, t[$, tais que $f(]s, t[) \subset]u, v[$.

2. Prove que uma parte A de $\mathbb{R}$ é um aberto se, e somente se, para cada $x \in A$ existirem $a_x, b_x \in \mathbb{R}$ tais que

$$x \in]a_x, b_x[\subset A.$$

3. Prove que os intervalos $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ e $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ são abertos de $\mathbb{R}$.

4. Prove que os intervalos $[a, b[$, $[a, b]$, $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[$ são não-abertos de $\mathbb{R}$.

5. Prove que o subconjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais é uma parte não-aberta e não-fechada de $\mathbb{R}$.

6. Mostre que qualquer subconjunto unitário de $\mathbb{R}$ é um não-aberto que é fechado.

7. Prove que todo o subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado.

8. Indique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos e quais são fechados:

(a) $[1, 2[\cup]2, 3[$;

(b) $\{0\} \cup \{x : x^2 > 2\}$;

(c) $\left\{x : x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

(d) $\left\{x : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

9. Mostre que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right[= \{0\} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-3 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] =]-3, 3[.$$

10. Mostre que o interior de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é $]a, b[$.

11. Determine em $\mathbb{R}$ o interior dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Determine em $\mathbb{R}$ o exterior dos conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

13. Mostre que a aderência de $]a, b[$ em $\mathbb{R}$ é $[a, b]$.

14. Prove que a aderência em $\mathbb{R}$ do conjunto

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

é o conjunto $A \cup \{0\}$.

15. Em $\mathbb{R}$, determine o interior, a aderência e o exterior do conjunto

$$S = \left\{y_n : y_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Verifique que $\operatorname{int}(\operatorname{ad} S) = \operatorname{ad}(\operatorname{int} S)$.

Determine um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não verifique a igualdade anterior.

16. Sejam A e B partes não-vazias de $\mathbb{R}$ e $A + B$ o conjunto dado por

$$A + B := \{x + y : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Mostre que se A for aberto, então $A + B$ é aberto.

17. Sendo A e B partes de $\mathbb{R}$, prove que:

(a) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;
(b) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$;
(c) $\operatorname{ad}(A \cap B) \subset \operatorname{ad} A \cap \operatorname{ad} B$;
(d) $\operatorname{ad}(A \cup B) = \operatorname{ad} A \cup \operatorname{ad} B$.

Dê exemplos de conjuntos tais que as inclusões anteriores sejam estritas.

18. Considerem-se as aplicações $\alpha, \beta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dadas por

$$\alpha(A) := \operatorname{int}(\operatorname{ad} A) \qquad \text{e} \qquad \beta(A) := \operatorname{ad}(\operatorname{int} A),$$

para $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(a) Prove que para A aberto se tem

$$\operatorname{int} A = A \subset \alpha(A) \subset \beta(A)$$

e que para A fechado se tem

$$\operatorname{int} A = \alpha(A) \subset \beta(A) \subset A = \operatorname{ad} A.$$

(b) Prove que $\alpha \circ \alpha = \alpha$ e $\beta \circ \beta = \beta$.

(c) Indique uma parte A de $\mathbb{R}$ tal que os conjuntos

$$A, \qquad \operatorname{int} A, \qquad \operatorname{ad} A, \qquad \alpha(A), \qquad \beta(A), \qquad \beta(\operatorname{ad} A) \qquad \text{e} \qquad \alpha(\operatorname{int} A)$$

sejam distintos entre si e verifiquem as relações

$$\operatorname{int} A \subset \alpha(\operatorname{int} A) \subset \beta(\operatorname{ad} A), \quad \operatorname{int} A \subset \alpha(A) \subset \beta(\operatorname{ad} A),$$
$$\alpha(\operatorname{int} A) \subset \alpha(A), \quad \beta(A) \subset \beta(\operatorname{ad} A).$$

(d) Prove que se A e B forem abertos disjuntos, então

$$\alpha(A) \cap \alpha(B) = \emptyset.$$