Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Ano lectivo: 2000/2001 **Folha 3**

41. Sejam E um espaço topológico e x um ponto de E. Mostre que a colecção $\mathcal{V}(x)$ das vizinhanças de x goza das seguintes propriedades:

(a) $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ e se $V \in \mathcal{V}(x)$, então $x \in V$;

(b) se $V \in \mathcal{V}(x)$ e $W \supset V$, então $W \in \mathcal{V}(x)$;

(c) se $V \in \mathcal{V}(x)$ e $W \in \mathcal{V}(x)$, então $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$;

(d) para todo o $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $W \in \mathcal{V}(x)$, com $W \subset V$, tal que para todo o $y \in W$ se tem $W \in \mathcal{V}(y)$.

42. Mostre que em qualquer espaço topológico discreto E, a colecção $\{\{x\}\}$ é uma base de vizinhanças do ponto x de E.

43. Em $\mathbb{R}$, mostre que:

(a) as colecções

$$\mathcal{B}_1(x) = \left\{]a,b[: x \in]a,b[\text{ e } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
$$\mathcal{B}_2(x) = \left\{ [x-\delta, x+\delta] : \delta \in \mathbb{R}^*_+ \right\} \text{ e}$$
$$\mathcal{B}_3(x) = \left\{]x-\delta, x+\delta[: \delta \in \mathbb{R}^*_+ \right\}$$

são bases de vizinhanças de x.

(b) as colecções

$$\mathcal{B}_4(x) = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}_5(x) = \left\{ \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] : n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

são bases numeráveis de vizinhanças de x.

44. Mostre que em qualquer espaço topológico a colecção dos abertos que contêm um ponto é uma base de vizinhanças desse ponto.

45. Seja A um subconjunto de um espaço topológico E. Prove que A é aberto se, e somente se, A for vizinhança de cada um dos seus pontos.

46. Seja (X, τ) o e.t. tal que $X = \{a,b,c,d,e\}$ e $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$.

(a) Indique os fechados de X.

(b) Determine os fechos de $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{c,e\}$.

(c) Seja $C = \{a,b,c\}$. Determine $\operatorname{int} C$ e $\operatorname{fr} C$.

(d) Determine os conjuntos derivados de $A = \{c,d,e\}$ e $B = \{b\}$.

47. Seja $\mathcal{T}$ a colecção dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ constituída pelo vazio e pelos subconjuntos de $\mathbb{N}$ da forma $E_n = \{n, n+1, \ldots\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}$ define uma topologia em $\mathbb{N}$.

(b) Determine os abertos que contêm o ponto 5.

(c) Determine a colecção dos fechados de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

(d) Sendo P o subconjunto de $\mathbb{N}$ constituído pelos números pares, determine $\operatorname{int} P$, $\operatorname{ext} P$, $\operatorname{fr} P$, $\operatorname{ad} P$ e P^d.

(e) Determine as vizinhanças do ponto 3.

(f) Determine os subconjuntos densos em $\mathbb{N}$.

48. Considere o par $(\mathbb{R}, \tau)$ em que τ é formado por $\emptyset$ e todos os intervalos da forma $(a, +\infty)$, podendo a ser $-\infty$.

(a) Prove que τ é uma topologia para $\mathbb{R}$.

(b) Determine os subconjuntos fechados de $(\mathbb{R}, \tau)$.

(c) Determine os fechos dos conjuntos $[3, 7)$, $\{7, 24, 47, 85\}$ e $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

(d) Determine o interior e a fronteira do intervalo $[7, +\infty)$.

49. Em $\mathbb{R}^2$, considere-se a seguinte colecção de subconjuntos:

$$\mathcal{T} = \left\{\emptyset, \mathbb{R}^2\right\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\},$$

onde $G_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\right\}$.

(a) Prove que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine em $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}\right)$ as aderências dos conjuntos

$$D = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad F = \{(0, 0)\}.$$

(c) Determine um subconjunto não-vazio M de $\mathbb{R}^2$ tal que $\overline{M} = \operatorname{fr} M$.

50. Considerem-se as colecções

$$\mathcal{S}_1 = \{r_x : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cup \{S\},$$

onde $r_x = \{(x, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $S = \{(t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, e sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ as topologias de $\mathbb{R}^2$ geradas pelas sub-bases $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, respectivamente. Dado o conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ 1 \leq y \leq 2\right\},$$

determine o interior e a aderência de A em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1)$ e em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_2)$.

51. Seja (X, τ) um espaço topológico e A um subconjunto não vazio de X. Determine $\overline{A}$, A^d, $\operatorname{int} A$ e $\operatorname{fr} A$ quando

(a) τ é a topologia discreta;

(b) τ é a topologia grosseira.

52. Sejam A e B partes de um espaço topológico E. Mostre que:

(a) se $A \subset B$, então $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$;

(b) se A é aberto e $A \subset B$, então $A \subset \operatorname{int} B$;

(c) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;

(d) $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

Dê exemplos em que as inclusões anteriores sejam estritas.