Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Ano lectivo: 2000/2001 **Folha 4**

53. Sejam A e B partes de um espaço topológico E. Mostre que:

(a) se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) se B é fechado e $A \subset B$, então $\overline{A} \subset B$;

(c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(d) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Dê exemplos em que as inclusões anteriores sejam estritas.

54. Mostre que se o conjunto E estiver munido com a topologia co-finita, toda a parte infinita de E é densa em E.

55. Sejam A, B e C partes de um espaço topológico E. Mostre que:

(a) $\operatorname{fr} A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$;

(b) B é fechado se, e somente se, $\operatorname{fr} B \subset B$;

(c) C é aberto e fechado se, e somente se, $\operatorname{fr} C = \emptyset$;

(d) $\operatorname{fr} A$ é fechado.

56. Sejam $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A e B partes de E.

(a) $A \subset B$ implica $A^d \subset B^d$;

(b) $(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$;

(c) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$;

(d) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dê exemplos em que as inclusões anteriores sejam estritas.

57. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Prove que para qualquer $x \in E$ se tem $\operatorname{ad}(\{x\}) = E$ se, e somente se, $\mathcal{T}$ for a topologia grosseira.

58. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Prove que são equivalentes as afirmações:

(a) $\mathcal{T}$ é a topologia discreta;

(b) o único subconjunto denso em $(E, \mathcal{T})$ é E;

(c) para todo o elemento x de E tem-se $\operatorname{int}(\{x\}) = \{x\}$.

59. Sejam $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A uma parte de E. Prove que:

(a) $\operatorname{fr} \overset{\circ}{A} \subset \operatorname{fr} A$;

(b) $\operatorname{fr} \overline{A} \subset \operatorname{fr} A$.

Dê um exemplo em $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ em que as inclusões anteriores sejam estritas.

60. Determine um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$ e um subconjunto M de E tais que

$$(M^d)^d \not\subset M^d \qquad \text{e} \qquad M^d \not\subset (M^d)^d.$$

61. Em $E = \{a, b, c, d, e\}$, considere-se a topologia

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

(a) Determine em extensão a topologia relativa $\mathcal{T}_A$, onde $A = \{a, c, e\}$.

(b) Indique um aberto de A que não seja um aberto de E.

(c) Indique um fechado de A que não seja um fechado de E.

62. Considere-se o espaço topológico $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ do exercício **47**.

(a) Sendo $C = \{3, 5, 7\}$, determine $\mathcal{T}_C$.

(b) Em $(C, \mathcal{T}_C)$, determine $\operatorname{int}\{7\}$, $\operatorname{ad}\{7\}$ e $\{7\}^d$.

(c) Quais as vizinhanças do ponto 3 em $(C, \mathcal{T}_C)$?

63. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $B_x = \{(x, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{B} = (B_x)_{x \in \mathbb{R}}$ é base para uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine as topologias induzidas por $\mathcal{T}$ em $\mathbb{R} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}$.

64. Sejam $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $x \in E$ e $\mathcal{B}(x)$ uma base de vizinhanças de x. Se A for uma parte de E contendo x, prove que $\mathcal{B}(x) \cap A$ é uma base de vizinhanças de x em $(E, \mathcal{T}_A)$.

65. Sejam A e B partes de um espaço topológico $(E, \mathcal{T})$, com A aberto e $A \subset B$. Mostre que A é também aberto segundo a topologia induzida em B por $\mathcal{T}$.

66. Sejam $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A e B partes não-vazias de E. Demonstre que se uma parte M de E tal que $M \subset A \cap B$ for um aberto (resp. fechado) em $(A, \mathcal{T}_A)$ e $(B, \mathcal{T}_B)$, então M é aberto (resp. fechado) em $(A \cup B, \mathcal{T}_{A \cup B})$.

67. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Prove que são equivalentes as afirmações:

(a) para todo o ponto x de E, o conjunto $\{x\}$ é fechado;

(b) para todo o subconjunto finito F de E, o espaço $(F, \mathcal{T}_F)$ é discreto.

68. Sejam $f : E_1 \to E_2$ e $g : E_2 \to E_3$ homeomorfismos de E_1 sobre E_2 e de E_2 sobre E_3. Prove que $g \circ f : E_1 \to E_3$ é um homeomorfismo de E_1 sobre E_3.

69. Num dado conjunto $\mathcal{E}$, de espaços topológicos, considere-se a seguinte relação:

"$E \sim F$ se, e somente se, E for homeomorfo a F".

Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{E}$.

70. Prove que dois espaços discretos homeomorfos são equipotentes.

71. Prove que qualquer intervalo $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, com a topologia relativa, é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

72. Sejam E e F espaços topológicos e f uma aplicação de E em F. Demonstre que f é contínua se, e somente se, para subconjunto S de E se tiver $f(\operatorname{ad} S) \subset \operatorname{ad}(f(S))$.