Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Ano lectivo: 2000/2001 **Folha 5**

73. Sejam $E = \{a, b, c, d\}$ e $\tau = \{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$. Seja $f : E \to E$ dada por $f(a) = b$, $f(b) = d$, $f(c) = b$ e $f(d) = c$. Mostre que

(a) f não é contínua em c;

(b) f é contínua em d.

74. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias em E. Quando é que a aplicação identidade $i : (E, \mathcal{T}) \to (E, \mathcal{T}')$ é contínua?

75. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ topologias em E e $f : E \to E$ uma aplicação não-$(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-contínua. Demonstre que se $\mathcal{T}_1$ for uma topologia menos fina do que $\mathcal{T}$ e se $\mathcal{T}''$ for uma topologia mais fina do que $\mathcal{T}'$, então $f : E \to E$ é uma aplicação não-$(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}'')$-contínua.

76. Demonstre que se $f : E \to F$ for uma aplicação constante, então f é contínua em relação a quaisquer topologias em E e F.

77. Mostre que se toda a função $f : E \to \mathbb{R}$ é contínua, então E é um espaço discreto.

78. Prove que uma aplicação bijectiva, contínua e aberta entre dois espaços topológicos é um homeomorfismo.

79. Demonstre que uma aplicação $f : E \to F$ entre dois espaços topológicos é contínua se, e somente se, a imagem recíproca por f de cada elemento de uma base $\mathcal{B}$ (ou sub-base $\mathcal{S}$) da topologia de F for um aberto de E.

80. Seja f uma aplicação de um espaço topológico E no intervalo $[0, 1]$. Prove que se para quaisquer números reais a e b tais que $0 < a < b < 1$ os conjuntos $f^{-1}(]a, 1])$ e $f^{-1}([0, b[)$ são abertos de E, então f é contínua.

81. Sejam $\mathcal{U}$ a topologia usual de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{T}$ a topologia de $\mathbb{R}$ gerada pela colecção de intervalos da forma $]a, b]$, com $a < b$ números reais. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x + 2 & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que f não é $(\mathcal{U},\mathcal{U})$-contínua.

(b) Mostre que f é $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-contínua.

82. Sejam E e F dois espaços topológicos, A e B fechados de E tais que $A \cup B = E$, e $f : A \to F$ e $g : B \to F$ aplicações contínuas tais que $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Mostre que f e g são restrições de uma aplicação contínua $h : E \to F$.

83. Considere-se a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ no conjunto $E = \{a, b, c\}$ e a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, F, \{u\}\}$ no conjunto $F = \{u, v\}$. Determine uma base para a topologia produto em $E \times F$.

84. Sejam A e B partes não-vazias dos espaços topológicos E e F, respectivamente. Mostre que:

(a) $\operatorname{ad}(A \times B) = \operatorname{ad} A \times \operatorname{ad} B$;

(b) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$;

(c) $A \times B$ é fechado em $E \times F$ se, e somente se, A for fechado em E e B for fechado em F.

85. Mostre que se E_1 for homeomorfo a E_2 e F_1 for homeomorfo a F_2, então $E_1 \times F_1$ é homeomorfo a $E_2 \times F_2$.

86. Sejam $(F, \mathcal{T})$ um espaço topológico e E um conjunto, dados por

$$F = \{a, b, c, d\}, \qquad \mathcal{T} = \{\emptyset, F, \{c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\} \qquad \text{e} \qquad E = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Considere-se a aplicação $f : E \to F$ definida por $f(1) = f(2) = a,\ f(3) = d$ e $f(4) = b$.

(a) Determine a topologia $\mathcal{T}^*$, menos fina em E, em relação à qual a aplicação $f : E \to F$ é $(\mathcal{T}^*, \mathcal{T})$-contínua.

(b) Seja $h : E \to F$ a aplicação definida por $h(1) = b,\ h(2) = h(3) = c$ e $h(4) = d$. Determine a topologia inicial associada ao par $((f, \mathcal{T}), (h, \mathcal{T}))$.

87. Sejam $f_i : E \to F_i$ funções constantes de um conjunto E nos espaços topológicos $(F_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. Determine a topologia inicial em E associada à família $((f_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$.

88. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico finito. Demonstre que E é de Hausdorff se, e somente se, $\mathcal{T}$ for a topologia discreta.

89. Sejam E um espaço topológico e $\Delta = \{(x, x) : x \in E\}$ a diagonal de $E \times E$. Prove que E é de Hausdorff se, e somente se, Δ for fechado.

90. Sejam $f, g : E \to F$ aplicações contínuas, sendo F um espaço de Hausdorff. Mostre que o conjunto $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ é fechado em E.

91. Sejam E e F dois espaços topológicos e f uma aplicação contínua de E em F. Prove que o gráfico Γ_f de f, i.e., o conjunto

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\},$$

subconjunto de $E \times F$, é homeomorfo a E.

92. Dado o conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$, considerem-se as colecções de partes de E:

$$\mathcal{B}_1 = \{\{a, b, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{b\}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}.$$

(a) Averigúe se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de filtro em E.

(b) Considerando E munido com a topologia discreta, determine os pontos limites das bases de filtro que encontrou na alínea anterior.

93. Sejam E e F conjuntos e $f : E \to F$ uma aplicação de E em F.

(a) Demonstre que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ forem duas bases de filtro equivalentes em E, então $\operatorname{ad} \mathcal{B}_1 = \operatorname{ad} \mathcal{B}_2$.

(b) Demonstre que todo o ponto limite de uma base de filtro de E é ponto aderente a essa base de filtro.