Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Ano lectivo: 2000/2001 **Folha 6**

94. Considere-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 1 \\ +1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

e seja $\mathcal{B}$ a base de filtro aderente a $+1$.

(a) Determine a aderência de f segundo $\mathcal{B}$.

(b) Existe limite segundo $\mathcal{B}$?

(c) Tendo em conta as alíneas (a) e (b), comente a afirmação "não existe limite de $f(x)$ quando x tende para $+1$".

95. Seja E um espaço topológico. Demonstre que E é de Hausdorff se, e somente se, uma das propriedades seguintes for verificada:

(a) cada base de filtro convergente em E não pode ter mais do que um ponto limite;

(b) se uma base de filtro em E admitir um ponto limite, então este é o único ponto aderente a essa base de filtro.

96. Considere $\mathbb{R}$ munido com a topologia cofinita. Mostre que qualquer sucessão de elementos distintos é convergente para todo o real.

97. Averigúe quais os limites da sucessão $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \tau)$, onde τ é a topologia

(a) discreta;

(b) grosseira;

(c) $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

Espaços métricos

98. Sejam E um conjunto e

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$$

Mostre que (E, d) é um espaço métrico.

99. Sejam $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espaços métricos. Prove que nos casos a seguir indicados, a aplicação $d : (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) \to \mathbb{R}_+$ é uma distância:

(a) $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$;

(b) $d(x, y) = \left(d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2\right)^{1/2}$;

(c) $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$;

100. Seja (E,d) um espaço métrico e A um subconjunto limitado de E. Prove que se $\emptyset \neq B \subset A$ então B é limitado e $\operatorname{diam} B \leq \operatorname{diam} A$.

101. Sejam (E,d) um espaço métrico e $x \in E$. Prove que se A é um subconjunto de E com diâmetro menor que r, intersectando $B(x,r)$, então $A \subset B(x,2r)$.

102. Seja (E,d) um espaço métrico. Mostre que $d' = \frac{d}{1+d}$ e $d'' = \inf(1,d)$ são ambas topologicamente equivalentes à métrica d.

103. Seja E o conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Considere, em E, as distâncias d e d', definidas por $d(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ e $d'(f,g) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$.

(a) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2$. Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções de $B_{d'}(f,1)$.

(b) Sendo $0 < r \leq 2$, defina-se $g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{r} + 4 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ 2 & \text{se} \quad \frac{r}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

Mostre que $g \in B_d(f,r) \backslash B_{d'}(f,1)$.

(c) Deduza que d e d' não são topologicamente equivalentes.

(d) Mostre que $\mathcal{T}_d \leq \mathcal{T}_{d'}$.

104. Considere definida em $\mathbb{R}^2$ a métrica

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d_1(x,x'), d_2(y,y')\},$$

onde d_1 e d_2 são as métricas usual e discreta em $\mathbb{R}$, respectivamente.

(a) Determine as distâncias $d((0,0),(0,1/2))$ e $d((3,5),(7,7))$.

(b) Determine e represente geometricamente as bolas abertas $B((0,0),2)$ e $B((5,3),1/3)$.

(c) Verifique se são convergentes as sucessões $\left((\frac{1}{n} + n^2, \frac{1}{n} + n^2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left((\frac{1}{n} + n^2, 0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

105. Mostre que se (x_n) é uma sucessão de Cauchy em (E,d), onde d é a métrica trivial, então existe uma ordem a partir da qual (x_n) é constante.

106. Mostre que, num espaço métrico (E,d):

(a) toda a sucessão convergente é de Cauchy;

(b) toda a sucessão de Cauchy é limitada;

(c) toda a subsucessão de uma sucessão de Cauchy é de Cauchy.

107. Mostre que as translações em $\mathbb{R}^n$ são isometrias.

108. Seja (E,d) um espaço métrico. Prove que $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ é contínua.

109. Seja d a métrica definida em $]0,1[$ por

$$\begin{array}{rccc} d: &]0,1[\times]0,1[& \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| \end{array}.$$

Mostre que d não é uniformemente equivalente à métrica usual.

110. Seja (E,d) um espaço métrico. Mostre que $d' = \frac{d}{1+d}$ e $d'' = \inf(1,d)$ são ambas uniformemente equivalentes à métrica d.