DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Ano lectivo: 2000/2001 **Folha 7**

Espaços compactos

111. Considere-se o intervalo $I =]0,1]$ de $\mathbb{R}$ e seja $(O_x)_{x\in I}$ a família de subconjuntos onde cada O_x é o intervalo aberto $O_x :=]\frac{x}{2}, 2x[$. Mostre que $(O_x)_{x\in I}$ é uma cobertura aberta de I. Este é compacto? Justifique.

112. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia τ' que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Mostre que $[0,1]$ não é um subespaço compacto de $(\mathbb{R}, \tau')$.

113. Considere o espaço topológico (E, τ) onde τ é a topologia cofinita. Prove que (E, τ) é compacto.

114. Prove que a reunião de uma família finita de partes compactas de E é um parte compacta de E.

115. Seja E um espaço topológico. Supondo que existe um ponto x_0 tal que $\text{ad}\{x_0\} \neq \{x_0\}$, mostrar que:

(a) E não é de Hausdorff;

(b) existe um subconjunto compacto de E que não é fechado.

116. Seja $\mathcal{T}$ a topologia de $\mathbb{N}$ gerada pela colecção

$$\mathcal{S} := \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \ldots\}$$

e seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$.

(a) Prove que A contém um ponto de acumulação;

(b) O espaço $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ é compacto?

117. Demonstrar que a intersecção de um compacto com um fechado de um espaço topológico é um espaço compacto.

118. Seja A um subconjunto compacto do espaço E de Hausdorff e suponha-se que $p \in E \backslash A$. Prove que existem abertos G e H tais que $p \in G$, $A \subset H$ e $G \cap H = \emptyset$.

119. Sejam E um conjunto e $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ topologias em E tais que $(E, \mathcal{T})$ é um espaço compacto e $(E, \mathcal{T}')$ é um espaço de Hausdorff. Mostre que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ implica $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

120. Prove que se $A \subset \mathbb{R}$ não for compacto, então existe uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada.

121. Em $\mathbb{N}$, considere-se a colecção $\mathcal{T}$ de partes constituídas pelo vazio, por $\mathbb{N}$ e pelos subconjuntos $A_n := \{0, 1, \ldots, n\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{N}$.

(b) Prove que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não é compacto.

(c) Prove que toda a aplicação contínua de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ num espaço de Hausdorff é uma aplicação constante.

(d) Conclua que todas as funções contínuas de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ em $\mathbb{R}$ são limitadas, apesar de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não ser compacto.

122. Seja $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \alpha, \beta\}$.

(a) Defina uma topologia $\mathcal{T}$ em E de modo que cada $x_n, n \in \mathbb{N}$, seja ponto isolado e a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admita α e β como limites.

(b) Mostre que E é compacto, assim como os seus subconjuntos

$$A := \{x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots, \alpha\} \qquad \text{e} \qquad B := \{x_0, x_1, \ldots, x_n \ldots, \beta\},$$

mas que $A \cap B$ não é compacto.

123. Mostre que num espaço de Hausdorff localmente compacto toda a parte fechada é localmente compacta.

Espaços conexos

124. Seja $E = \{a, b, c, d, e\}$, com a topologia

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, E\}$$

Será E conexo? E os seus subespaços $\{a, e\}$ e $\{b, c, d\}$?

125. Sejam G e H abertos não vazios e disjuntos do espaço E, tais que $E = G \cup H$. Seja A um subconjunto não vazio conexo de E. Mostre que ou $A \cap H = \emptyset$ ou $A \cap G = \emptyset$, isto é, que ou $A \subset G$ ou $A \subset H$.

126. Indique uma condição necessária e suficiente para que um espaço discreto seja conexo.

127. Determine uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{R}$, estritamente mais fina do que a topologia usual, tal que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não seja conexo.

128. No espaço topológico E considere-se a relação definida por

$$x \sim y \text{ se } x \text{ e } y \text{ estão conectados.}$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

129. Sejam $I = [0, 1]$ e $f : I \to I$ uma aplicação contínua. Mostre que existe um ponto $p \in I$ tal que $f(p) = p$.

130. Sejam f e h funções contínuas de $I = [0, 1]$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) \neq g(x)$, para todo o $x \in I$. Prove que se tem $f(x) > g(x)$, para todo o $x \in I$, ou $f(x) < g(x)$, para todo o $x \in I$.

131. Seja f uma aplicação contínua de $I = [0, 1]$ em E e A um subconjunto de E. Demonstre que se $f(0) \in \operatorname{int} A$ e $f(1) \in \operatorname{ext} A$, então $f(I) \cap \operatorname{fr} A \neq \emptyset$.

132. Caracterize as aplicações contínuas de $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{U}$ é a topologia usual e $\mathcal{T}$ é a topologia conumerável.