Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA

Outros exercícios de exame

1. Sejam A e F um aberto e uma parte finita, respectivamente de $\mathbb{R}$. Mostrar que o conjunto $A \backslash F$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

2. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço topológico, com $E = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, E\}$. Considere-se o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Determinar:

(a) a colecção das vizinhanças do ponto b;

(b) o interior, a fronteira e o derivado do conjunto A;

(c) a topologia induzida em A por $\mathcal{T}$.

3. No conjunto $\mathbb{R}^2$ considere-se a topologia $\mathcal{T}$ gerada pela colecção de partes

$$\mathcal{S} = \{s_y : y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{onde} \qquad s_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

No espaço $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é a topologia anterior, determinar o interior e a fronteira dos conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \qquad \text{e} \qquad B = \{(0, 0)\}.$$

4. Seja $f : E \to F$ uma aplicação contínua entre dois espaços topológicos E e F. Provar que se tem:

(a) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo o $A \subset E$;

(b) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, se $f(\overline{A})$ for fechado, com $A \subset E$.

5. Seja $f : E \to F$ uma aplicação entre dois espaços topológicos E e F. Provar que f é aberta sse $f(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{int} f(A)$, para qualquer $A \subset E$.

6. Sejam E, F e G espaços topológicos, $f : E \to F$ e $g : F \to G$ aplicações. Se $g \circ f$ for aberta e g for injectiva e contínua, mostrar que f é aberta.

7. No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, seja $\mathcal{T}_{CN}$ a colecção constituída pelo vazio e pelos subconjuntos de $\mathbb{R}$ cujos complementares são finitos ou numeráveis.

(a) Provar que $\mathcal{T}_{CN}$ define uma topologia no conjunto $\mathbb{R}$.

(b) Mostrar que no espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$ um subconjunto sequencialmente fechado pode não ser fechado. [*Sugestão*: Começar por provar que toda a sucessão convergente em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$ é constante, a partir de alguma ordem]

(c) Provar que uma aplicação sequencialmente contínua do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, onde $\mathcal{U}$ é a topologia usual de $\mathbb{R}$, pode não ser contínua. [*Sugestão*: Usar o resultado da sugestão da alínea anterior]

8. (a) Demonstrar que num espaço separado toda a parte unitária é fechada.

(b) A recíproca da proposição da alínea anterior é verdadeira? Justificar.

9. Sejam (E, d) um espaço métrico, $x_0 \in E$ e $\delta > 0$.

(a) Provar que a bola fechada $B'(x_0, \delta)$ é um fechado de E.

(b) Mostrar que a função $d' : E \times E \to \mathbb{R}$, dada por $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ é uma métrica em E.

10. Sejam (E, d) um espaço métrico, $x_0 \in E$ e $\delta > 0$.

(a) Mostrar que a função $d' : E \times E \to \mathbb{R}$ dada por $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ é uma métrica em E.

(b) Seja A uma parte não vazia de E. Admita-se provado que $\overline{A} = \{x \in E : \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$. Se A for fechado e p for um ponto de E que não pertence a A, mostrar que $\operatorname{dist}(p, A) > 0$. Esta afirmação permanece verdadeira se A não for fechado? Justificar.

11. (a) Em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mostrar que se obtém uma métrica d pondo

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

(b) Considere-se o subespaço $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ de $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d)$. Em X, determinar a bola aberta $B((1, 0), 1)$ e a bola fechada $B'((1, 0), 1)$, de centro $(1, 0)$ e raio 1, e mostrar que o fecho da primeira não coincide com a segunda.

12. Seja F o conjunto das funções reais contínuas definidas no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ (supõe-se $a < b$).

(a) Mostrar que se obtém uma função real d, definida em $F \times F$, pondo

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \qquad f, g \in F,$$

e que ela é uma métrica em F.

(b) Sendo $[a, b] = [0, 2\pi]$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 0$, para todo o $x \in [0, 2\pi]$, determinar $d(f, g)$ e interpretar geometricamente o resultado.

(c) Substituindo no enunciado "contínuas" por "integráveis", d ainda continua a ser uma métrica em F? Justificar.

13. Sejam A e B partes não-vazias de um espaço métrico E.

(a) Mostrar que a função $f : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, B), \qquad x \in E,$$

é contínua.

(b) Sejam $M = \{x \in E : \operatorname{dist}(x, A) < \operatorname{dist}(x, B)\}$ e $N = \{x \in E : \operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(x, B)\}$. Mostrar que M é aberto e que N é fechado.

14. Seja $d' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $d'((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$, para $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

(a) Mostrar que d' é uma métrica no conjunto $\mathbb{R}^2$.

(b) Sendo d a métrica usual de $\mathbb{R}$, verificar se a aplicação $s : (\mathbb{R}^2, d') \to (\mathbb{R}, d)$, definida por $s(x, y) = x + y$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é (ou não é) uniformemente contínua.

(c) Provar que um espaço métrico conexo, com mais de um ponto, tem necessariamente cardinal infinito.

15. (a) Demonstrar que toda a parte compacta de um espaço métrico E é uma parte fechada de E.

(b) Provar que a intersecção de qualquer família de compactos de um espaço métrico E é um compacto de E.

16. (a) Sejam E e F espaços topológicos. uma aplicação $f : E \to F$ diz-se *própria* sse for contínua, fechada e, para cada $y \in F$, o conjunto $f^{-1}(\{y\})$ for um compacto de E. Mostrar que se E for compacto e F for separado, toda a aplicação contínua de E em F é própria.

(b) Provar que num espaço métrico a intersecção de uma parte compacta com uma parte fechada é uma parte fechada.

17. Considere-se o conjunto $E = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup \{a, b\}$.

(a) Provar que a colecção $\mathcal{B} = \{E, \{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \ldots\}$ é base para uma topologia $\mathcal{T}$ em E.

(b) Demonstrar que a e b são pontos limite da sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Demonstrar que os subconjuntos

$$K_a = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup \{a\} \qquad \text{e} \qquad K_b = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup \{b\}$$

são compactos em $(E, \mathcal{T})$ (como é óbvio, basta fazer a demonstração para um deles).

(d) Que se pode afirmar quanto à compacidade do subconjunto $K = K_a \cap K_b$?

18. Em $\mathbb{R}$, com a topologia usual, os intervalos $[1, 3]$ e $]2, 5[$ são homeomorfos? Justificar.

19. Sejam (E, d) um espaço métrico compacto e $f : E \to E$ uma aplicação contínua tal que $f(x) \neq x$, para todo o $x \in E$. Provar que existe um número real $K > 0$ tal que $d(x(f(x)) \geq K$, para todo o $x \in E$. [*Sugestão*: Considerar a função $g : E \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = d(x, f(x))$]

20. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias definidas no mesmo conjunto E. Se E for conexo segundo a topologia $\mathcal{T}_1$ e desconexo segundo a topologia $\mathcal{T}_2$, mostrar que existe um conjunto A tal que $A \in \mathcal{T}_2$ e $A \notin \mathcal{T}_1$.

21. Sejam E e F espaços topológicos e $f : E \to F$ uma aplicação contínua. Se o espaço E for conexo, provar que $f(E)$ é um subconjunto conexo de F.

22. Demonstrar que em qualquer espaço topológico o fecho de uma parte conexa é uma parte conexa.

23. (a) Provar que em $\mathbb{R}$, com a topologia usual, o subconjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é desconexo.

(b) Provar que toda a função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{Q}$ é constante.

24. (a) Demonstrar que um espaço topológico é desconexo se, e somente se, existir alguma sobrejecção contínua de E sobre o espaço discreto $\{a, b\}$.

(b) Provar que num espaço métrico a intersecção de uma família qualquer de compactos é um compacto.

25. No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, considere-se a colecção $\mathcal{T}$ constituída pelo vazio e pelos subconjuntos A de $\mathbb{R}$ tais que $\mathbb{R} \backslash A$ é finito.

(a) Mostrar que $\mathcal{T}$ define uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Mostrar que cada conjunto singular do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é fechado, mas que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é um espaço de Hausdorff.

(c) Justificar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo.

(d) Mostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço compacto.

(e) Seja $\mathcal{U}$ a topologia usual de $\mathbb{R}$.

i. Seja $f : (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ uma aplicação sobrejectiva. Será f contínua? Justificar.

ii. Seja $g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uma aplicação contínua. Será g sobrejectiva? Justificar.

26. Seja $(E, \mathcal{T})$ um espaço separado e não compacto. Defina-se $\mathcal{T}'$ pondo

$$\mathcal{T}' = \{\emptyset\} \cup \{S \subset E : E \backslash S \text{ é compacto segundo } \mathcal{T}\}.$$

(a) Mostrar que $\mathcal{T}'$ define uma topologia em E e que $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

(b) Provar que $(E, \mathcal{T}')$ é um espaço conexo e compacto.

27. Sejam E um espaço topológico e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é *localmente constante* se, e somente se, para cada ponto x de E existir um aberto U, contendo x, tal que a restrição $f|_U$ seja constante. Provar que se E for conexo toda a função localmente constante é constante.

28. Sejam $f : M \to M'$ uma aplicação uniformemente contínua entre os espaços métricos M e M' e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em M.

(a) Provar que $(f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em M'.

(b) A afirmação anterior é verdadeira se f for apenas contínua? Justificar.

29. Seja (E, d) um espaço métrico. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy em E e $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sua subsucessão convergente, provar que a própria sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e tem o mesmo limite daquela subsucessão.

30. Sejam E e F espaços métricos e $f : E \to F$ uma bijecção uniformemente contínua, com inversa também uniformemente contínua. Se um dos espaços E ou F for completo, provar que o outro também o é.

31. Sejam E um espaço métrico completo e f uma aplicação de E em E tal que a aplicação $f^{(i)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (i vezes), para algum $i \in \mathbb{N}$, seja uma contracção de E em si mesmo. Mostrar que f tem um e um só ponto fixo em E.

32. Sejam E e F espaços métricos e F uma aplicação de E em F cuja restrição a qualquer compacto de E é contínua. Provar que f é contínua. [*Sugestão*: Usar o facto de, em espaços métricos, continuidade e continuidade sequencial serem conceitos equivalente e o resultado do exercício **17**(c)]