Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

MECÂNICA RACIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 17**

Dinâmica

1. Considere o sistema de referência cartesiano rectangular $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Determine a expressão das forças que actuam sobre o ponto material $P \equiv (x, y, z)$:

(a) uma força atractiva exercida por O, cuja intensidade é proporcional à distância a essa origem (α, a constante de proporcionalidade);

(b) uma força repulsiva exercida pelo eixo $O\vec{e}_3$, com intensidade inversamente proporcional à distância a esse eixo (β, a constante de proporcionalidade);

(c) uma força atractiva exercida pelo plano $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, cuja intensidade é proporcional ao cubo da distância a esse plano (γ, a constante de proporcionalidade);

(d) uma força repulsiva exercida por O, cuja intensidade é proporcional ao inverso do quadrado da distância a O (δ, a constante de proporcionalidade);

Resposta: (a) $\vec{F} = -\alpha(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)$; (b) $\vec{F} = \frac{\beta}{x^2+y^2}(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2)$;
(c) $\vec{F} = -\gamma z^3\vec{e}_3$; (d) $\vec{F} = \frac{\delta}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)$

2. Diga, justificando, quais das seguintes forças derivam de um potencial e determine, sempre que possível, o potencial:

(a) $\vec{F}_1 = -mg\vec{e}_3$ (a força da gravidade);

(b) $\vec{F}_2 = (y+2)\vec{e}_1 + (x+2)\vec{e}_2 + (x+y)\vec{e}_3$;

(c) $\vec{F}_3 = yz\vec{e}_1 + xz\vec{e}_2 + xy\vec{e}_3$;

(d) $\vec{F}_4 = k\rho\vec{e}_\rho$;

(e) $\vec{F}_5 = \dfrac{k}{\rho^2}\vec{e}_\rho$.

Resposta: (a) $V_1(x,y,z) = mgz(+C)$; (c) $V_3(x,y,z) = -xyz(+C)$;
(d) $V_4(\rho) = -\frac{k}{2}\rho^2(+C)$; (e) $V_5(\rho) = -\frac{k}{\rho}(+C)$

3. (a) Determine as constantes a, b e c de forma que a força

$$\vec{F} = (x+2y+az)\vec{e}_1 + (bx-3y-z)\vec{e}_2 + (4x+cy+2z)\vec{e}_3$$

derive de um potencial.

(b) Calcule esse potencial.

Resposta: (a) $a=4,\ b=2,\ c=-1$; (b) $V(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}y^2 - z^2 - 2xy - 4xz + yz(+C)$

4. A potência aplicada a um ponto material (P, m) por um campo de forças $\vec{F}$, em cada instante t, é dada por

$$P(t) = 3t^2 - 4t + 2.$$

Determine o trabalho realizado por $\vec{F}$ entre os instantes $t_1 = 2$ e $t_2 = 4$.

Resposta: $W(2,4) = 36$

5. Uma partícula de massa 2 move-se sob a acção da força $\vec{F}$,

$$\vec{F}(t) = t^2\vec{i} - 3t\vec{j} + (t+2)\vec{k}, \qquad \forall t,$$

em relação ao referencial inercial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, partindo do repouso. Calcule o trabalho efectuado por $\vec{F}$ entre os instantes $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$, por dois processos diferentes.

Resposta: $W(1,3) = \frac{821}{9}$

6. O ponto material P, de massa unitária, move-se, em relação a um referencial inercial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sendo

$$\vec{p}(t) = 3e^{-t}\vec{i} - 2\cos t\vec{j} - 3\,\mathrm{sen}\,t\vec{k}$$

a sua quantidade de movimento em cada instante t. Determine:

(a) a expressão da força total $\vec{F}$ que solicita P;

(b) as equações finitas do movimento do ponto, sabendo que, no instante $t = 0$, este ocupa a posição $(0, 0, 0)$;

(c) a potência aplicada P no instante t.

Resposta: *(a)* $\vec{F} = -3e^{-t}\vec{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\vec{j} - 3\cos t\vec{k}$
(b) $x(t) = -3(e^{-t}-1);\ y(t) = -2\,\mathrm{sen}\,t;\ z(t) = 3(\cos t - 1)$
(c) $P(t) = -9e^{-2t} + 5\,\mathrm{sen}\,t\cos t$

7. Uma bala, de massa 2, penetra num bloco de madeira com uma velocidade escalar igual a 5, até uma profundidade $d = 10$. Determine a intensidade da resistência que a madeira opõe ao movimento, supondo-a constante.

Resposta: $\|\vec{R}\| = \frac{5}{2}$

8. Um ponto material P de massa m, sujeito à acção de uma força $\vec{F}$, desloca-se sobre o eixo $O\vec{i}$ de um sistema de referência inercial de tal forma que

$$x = a\sqrt{v} - b$$

onde $v \geq 0$ representa a componente única da velocidade de P e a e b são duas constante não negativas. Sabendo que P parte da origem O,

(a) prove que $x(t) = \dfrac{a^2 b}{a^2 - bt} - b, \forall t$;
Sugestão: na resolução da equação diferencial faça a mudança de variável $u = x + b$;

(b) determine o instante t_1 em que a velocidade escalar é o dobro da velocidade escalar no instante inicial;

(c) calcule a expressão da força total $\vec{F}$ aplicada a P.

Resposta: *(b)* $t_1 = \frac{a^2}{b^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; *(c)* $\vec{F}(t) = \frac{2a^2b^3m}{(a^2-tb)^3}\vec{i}$

9. Uma partícula M, de massa m, descreve a curva de equação

$$\rho = e^{-\theta};\ z = 0$$

em relação a um sistema de referência inercial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Sabendo que a força total que a solicita é central de centro O, mostre que a intensidade dessa força é inversamente proporcional a ρ^3.

Resposta: $\|\vec{F}\| = \frac{2mk^2}{\rho^3}$, *onde k representa a constante do integral das áreas*

MECÂNICA RACIONAL

Ano lectivo: 1999/2000 **Folha 18**

10. Um avião de massa m aterra na pista de um porta-aviões com velocidade de grandeza v_0. Para além dos travões que exercem uma força constante de intensidade c_3, actuam sobre o avião os cabos de aterragem que exercem uma força de retardamento de intensidade $F = c_1 t^2 + c_2 t$ (c_1, c_2 constantes). Mostre que o tempo necessário para parar o avião é uma solução da equação

$$2c_1 t^3 + 3c_2 t^2 + 6c_3 t - 6mv_0 = 0.$$

11. Um ponto material (P, m) está sujeito à acção da força

$$\vec{F} = -\frac{k}{x^2}\vec{i} \qquad (k \text{ constante positiva}).$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a velocidade de P, em relação ao referencial inercial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, é nula e que $P(0) \equiv (x_0, 0, 0)$ com $x_0 \neq 0$, determine a expressão da velocidade de P em função da sua abcissa x.

Resposta: $\vec{v} = -\sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}\vec{i}$

12. Considere o referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, inercial. Um ponto material $M \equiv (x, y, 0)$, de massa unitária, parte de $A \equiv (2, 0, 0)$ com velocidade $\vec{v}_0 = -2\vec{i}$, sujeito apenas à acção da força

$$\vec{F} = \frac{5}{x^3}\vec{i}.$$

(a) Mostre que o movimento de M é rectilíneo.

(b) Calcule a zona acessível do movimento e determine a velocidade em função da abcissa x.

Resposta: $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{20}{21}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{20}{21}}, +\infty\right[$ *(x toma apenas valores no 2º intervalo)*

$$\vec{v} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{21}{4} - \frac{5}{x^2}}\vec{i} & \textit{quando } M \textit{ se desloca de } (2,0,0) \textit{ a } \left(\sqrt{\frac{20}{21}}, 0, 0\right) \\ \sqrt{\frac{21}{4} - \frac{5}{x^2}}\vec{i} & \textit{quando } M \textit{ se afasta de } \left(\sqrt{\frac{20}{21}}, 0, 0\right) \end{cases}$$

13. Seja $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial inercial. Sobre o ponto material $(M, 2)$ actua a força $\vec{F}$ que deriva do potencial

$$V(x) = 2x - x^2.$$

Sabendo que a energia mecânica total é igual a 1 e que M parte de $(4, 0, 0)$, tendo, nesse instante, velocidade com sentido contrário ao de $\vec{i}$,

(a) mostre que o movimento é rectilíneo;

(b) calcule a velocidade em função da abcissa x;

(c) determine a lei do movimento;

(d) determine a zona acessível do movimento.

Resposta: (b) $\vec{v} = (1 - x)\vec{i}$ *(c)* $\vec{r}(t) = (3e^{-t} + 1)\vec{i}$ *(d)* $\mathbb{R}$

14. O ponto material (P, m) está animado de um movimento rectilíneo em relação ao referencial inercial $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, sob a acção da força $\vec{F} = \vec{v}$, onde $\vec{v}$ representa a velocidade do ponto. Determine a lei do movimento.

Resposta: $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 m \left(e^{\frac{t}{m}} - 1\right) \vec{i}$ *supondo, sem perda de generalidade, que a trajectória de P está contida em* $O\vec{i}$

15. Um avião de massa $m = 9000\ Kg$ prepara-se para levantar voo. A força desenvolvida pelos seus motores é constante de grandeza 1800. A grandeza da resistência que se opõe ao movimento é proporcional ao quadrado da velocidade escalar (constante de proporcionalidade 1/8). Determine o comprimento mínimo da pista, sabendo que o avião levanta voo com uma velocidade de grandeza 60 m/s.

Resposta: $36 \times 10^3 \ln \frac{4}{3}$

16. Um projéctil é lançado com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ de grandeza 10, fazendo um ângulo de $30°$ com a horizontal. Determine:

(a) a posição do projéctil em qualquer instante;

(b) a altura máxima atingida;

(c) o tempo que demora a atingir o ponto mais alto;

(d) o tempo que demora a chegar de novo à horizontal.

Resposta: (a) $\overrightarrow{OP}(t) = 5\sqrt{3}t\vec{i} + \left(-\frac{g}{2}t^2 + 5t\right)\vec{j}$ *em relação ao referencial com origem no ponto de lançamento e* $O\vec{j}$ *segundo a vertical ascendente;*
(b) $h_{max} = \frac{25}{2g}$; *(c)* $t_1 = \frac{5}{g}$; *(d)* $t_2 = \frac{10}{g}$

17. Um ponto material P, de massa unitária, efectua um movimento no plano $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ de um referencial $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ previamente dado. Sabe-se que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k(x+y) \\ \dfrac{dy}{dt} = k(x-y) \end{cases}$$

(a) Mostre que a força total $\vec{F}$ que actua sobre o ponto é central de centro O.

(b) Determine as equações finitas do movimento, sabendo que parte de $(0, \sqrt{2})$.

(c) Determine a equação cartesiana da trajectória.

Resposta: (a) $\vec{F} = 2k^2\overrightarrow{OP}$; *(b)* $\begin{cases} x(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{2}kt) \\ y(t) = \sqrt{2}\cosh(\sqrt{2}kt) - \operatorname{senh}(\sqrt{2}kt) \end{cases}$; *(c)* $y^2 - x^2 + 2xy - 2 = 0$

18. Seja $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ um sistema de referência inercial. Um ponto P de massa unitária está sujeito à acção da força

$$\vec{F} = y(\vec{j} + \vec{k}) + 2\vec{i}.$$

No instante $t = 0$, o ponto encontra-se em O com velocidade $\vec{v}(0) = 2(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$. Determine as equações finitas do movimento e mostre que se trata de movimento plano.

19. Um ponto material, de massa unitária, pesado (sujeito à acção da gravidade) é obrigado a mover-se, sem atrito, sobre uma recta que faz um ângulo α com a horizontal. No instante $t = 0$, a velocidade é nula.

(a) Determine as equações finitas do movimento do ponto.

(b) Determine a reacção que a recta exerce sobre o ponto.