Topologia Algébrica

fjc[2]

Um espaço topológico X é *conexo* se não existirem abertos A, B, não vazios, com $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$.

1) Mostre que X é conexo sse $\emptyset$ e X são os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados.

Um subconjunto de X é *conexo* se é conexo como subespaço topológico de X.

2) Sejam X um espaço topológico e $(A_i)_{\,i\in I}$ uma família não vazia de subespaços conexos de X tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Mostre que $\bigcup_{i\in I} A_i$ é conexo.

Em X vamos introduzir a seguinte relação

$x \sim y$ *se existe* U, *subconjunto conexo de* X, *tal que* $x, y \in U$.

3) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

As classes de equivalência originadas por $\sim$ são chamadas as *componentes conexas* de X.

4) Mostre que uma componente conexa é conexa.

Consideremos os subconjuntos conexos de X. U, conexo, é *maximal* se $U \subset Y$, Y conexo, implica $U = Y$. De forma equivalente podemos dizer que U não está propriamente contido em nenhum conexo de X.

5) Mostre que um subconjunto C de X é uma componente conexa sse C for um conexo maximal.

6) Mostre que

- **a)** Cada ponto $x \in X$ pertence a uma e a uma só componente de X.
- **b)** Cada subespaço conexo está contido numa componente de X.
- **c)** Um subespaço conexo simultaneamente aberto e fechado é uma componente de X.
- **d)** Cada componente de X é fechada.

O espaço topológico X é *conexo por arcos* se, para $x, y \in X$, existir um *caminho* $\gamma : [0,1] \to X$ contínuo tal que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Um subconjunto Y de X é *conexo por arcos* se é conexo por arcos como subespaço topológico.

7) Mostre que conjuntos conexos por arcos são conexos.

Em X vamos introduzir a seguinte relação

$x \sim y$ *se existe* $\gamma : [0,1] \to X$ *contínuo tal que* $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

8) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Para uma analogia com o caso dos espaços conexos podíamos definir $\sim'$ tal que

$x \sim' y$ *se existe* U, *subconjunto conexo por arcos de* X, *tal que* $x, y \in U$.

9) Mostre que $\sim$ e $\sim'$ são a mesma relação de equivalência.

Chama-se *componente (conexa) por arcos* a qualquer classe de equivalência determinada pela relação de equivalência definida atrás.

10) Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de conjuntos conexos por arcos tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Mostre que $\bigcup_{i\in I} A_i$ é conexo por arcos.

11) Mostre que uma componente por arcos é conexa por arcos.

12) Mostre que um subconjunto C de X é uma componente por arcos de X sse C é um conexo por arcos maximal.

Um espaço topológico é *localmente conexo* se, para $x \in X$, existir uma base de abertos conexos em x.

13) Mostre que X é localmente conexo sse as componentes de abertos de X são abertos.

Em particular, se X é localmente conexo então as componentes de X são abertos.

14) Mostre que um espaço topológico compacto e localmente conexo possui um número finito de componentes.

Um espaço topológico X diz-se *localmente conexo por arcos* se, para $x \in X$, existir uma base de abertos conexos por arcos em x.

15) Mostre que X é localmente conexo por arcos sse as componentes por arcos de abertos de X são abertos.

Em particular, se X é localmente conexo por arcos então as componentes por arcos de X são abertos.

16) Prove que num espaço localmente conexo por arcos as componentes e as componentes por arcos coincidem.

Como consequência deduz-se que um espaço conexo, localmente conexo por arcos é conexo por arcos.

17) Mostre que os espaços seguintes são conexos por arcos.

- **a)** R^n
- **b)** $S^n, n \geq 1$
- **c)** RP^n
- **d)** $S^1 \times S^1$