Topologia Algébrica

fjc[2] 2

Grupos Topológicos

1) Sejam G um grupo topológico e A, B subconjuntos de G. Defina AB como sendo o subconjunto de G dado por $\{g \in G \mid g = ab, a \in A, b \in B\}$. Mostre que

a) A aberto implica AB e BA abertos.

b) A fechado e B finito implica AB e BA fechados.

2) Seja H um subgrupo do grupo topológico G. Mostre que o fecho $\overline{H}$ de H é um subgrupo de G.

3) Seja U_e um aberto contendo o elemento neutro e no grupo topológico G. Prove que existe um aberto V_e tal que $V_e V_e^{-1} \subset U_e$.

Dado $V \subset G$, V^{-1} é o conjunto $\{x \in G \mid x = y^{-1}, y \in G\}$.

4) Mostre que se um grupo topológico é T_0 então é de Hausdorff.

5) Seja G um grupo topológico T_0. Mostre que o centro de G,

$$C(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \text{ para } x \in G\},$$

é um subgrupo fechado de G.

6) Seja G um grupo topológico. Prove que

a) Todo o subgrupo aberto de G é fechado.

b) Todo o subgrupo de G contendo um aberto U_e, sendo e o elemento neutro de G, é aberto.

7) Seja C_e a componente conexa do grupo topológico G que contém o elemento neutro e. Prove que C_e é um subgrupo normal de G.

8) Considere a aplicação determinante, $det : GL(n, R) \to R$. Mostre que det é uma aplicação aberta. Conclua que $GL(n, R)/GLE(n, R) \approx R \setminus \{0\}$, em que $\approx$ significa homeomorfo a.

9) Seja G_1 o subgrupo de $GL(n, R)$ formado pelas matrizes da forma tId, $t \in R \setminus \{0\}$. Tal grupo é normal e isomorfo a $R \setminus \{0\}$. Mostre que ele é fechado em $GL(n, R)$.

10) Prove que $O(n, R)$ é homeomorfo a $OE(n, R) \times Z_2$, estando Z_2 munido da topologia discreta.