Topologia Algébrica

fjc[2] 3

1) Sejam H, G grupos topológicos e $f : G \to H$ um homomorfismo. Conclua que se f é contínua no elemento neutro e de G então f é contínua.

2) Sejam G um grupo topológico e G_e a componente conexa de G contendo o elemento neutro e. Mostre que as componentes conexas de G são as classes laterais à esquerda de G_e.

3) Sejam X um espaço topológico e G um grupo topológico que actua em X. Mostre que, supondo G e X/G conexos, X é conexo.

4) Sejam G um grupo topológico e H um seu subgrupo topológico. Considere a acção

$$\begin{array}{ccc} H \times G & \to & G \\ (h, g) & \mapsto & gh^{-1}. \end{array}$$

Prove que G/H é de Hausdorff sse H é um subgrupo fechado.

5) Sejam G um grupo topológico e H um seu subgrupo topológico. Mostre que se H e G/H são de Hausdorff então G é de Hausdorff.

6) **a)** Considere as aplicações contínuas $g : X \to Y$ e $f : Y \to Z$. Mostre que se $f \circ g$ é quociente então f é quociente.

b) Use o resultado da alínea a) para concluir que, sendo G um grupo topológico, a operação $\theta : G \times G \to G$ é uma aplicação quociente.

7) Considere o espaço topológico $S^1 \times [0, 1]$ e defina nele a relação $(x, t) \sim (y, s)$ se $tx = sy$. Mostre que o espaço quociente obtido é homeomorfo a um espaço topológico conhecido.

8) Sejam X, Y espaços topológicos e considere em $X \times Y$ a relação de equivalência:

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ se } y = y'.$$

Determine, a menos de homeomorfismo, o espaço $X \times Y/\sim$.