Topologia Algébrica

fjc[2] 4

Homotopia e grupo fundamental

1) Considere o chamado *espaço de Sierpinski*, isto é, $\{a, b\}$ com a topologia $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Mostre que

- **a)** O espaço de Sierpinski é conexo por arcos.
- **b)** O espaço de Sierpinski é contráctil.

2) Seja X um espaço topológico contráctil. Mostre que X é conexo por arcos.

3) Sejam X, Y espaços topológicos sendo Y contráctil. Prove que duas quaisquer aplicações $f, g : X \to Y$ são homotópicas. Deduza que qualquer aplicação C^0 entre espaços contrácteis é uma equivalência homotópica.

4) Seja Y um espaço topológico contráctil. Prove que a projecção $\pi : X \times Y \to X$ é uma equivalência homotópica.

5) Suponha que $X_i \cong Y_i$, $i = 1, 2$, isto é, X_i e Y_i têm o mesmo tipo homotópico. Mostre que $X_1 \times X_2 \cong Y_1 \times Y_2$.

6) O subespaço Y é um *retracto* do espaço topológico X se existe uma aplicação contínua $r : X \to Y$ tal que $r|Y = id_Y$.

Mostre que um retracto de um espaço contráctil ainda é contráctil.

7) Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Designe por C_x a componente conexa que contém x e defina F entre os conjuntos de componentes conexas de X e Y por $F(C_x) = C_{f(x)}$.

- **a)** Mostre que F está bem definida.
- **b)** Mostre que se f e g são aplicações homotópicas então $F = G$.
- **c)** Deduza que se X e Y têm o mesmo tipo homotópico então têm o mesmo número de componentes conexas.

8) Considere o seguinte subespaço topológico de R^2:

$$X = ((-\epsilon, \epsilon) \times R) \cup (R \times (-\epsilon, \epsilon)), \text{ sendo } \epsilon > 0.$$

- **a)** Mostre que X é um espaço topológico contráctil e, portanto, simplesmente conexo.
- **b)** Use agora um resultado demonstrado na aula teórica para concluir, de outra forma, que X é simplesmente conexo.

9) Mostre que $R^{n+1} \setminus \{0\}$ é homotopicamente equivalente a S^n.

10) Seja X um espaço topológico qualquer. Se $f, g : X \to S^n$ são tais que, para $x \in X$, $f(x) \neq -g(x)$ então $f \simeq g$.

11) Mostre que a fita de Möbius e S^1 têm o mesmo tipo homotópico.

12) Seja $X = \{(p, q) \in S^n \times S^n \mid p \neq -q\}$. Prove que $X \simeq S^n$.

13) O grupo $G = OE(2, R)$ actua sobre a esfera S^2, sendo a acção $\Phi : G \times S^2 \to S^2$ dada por $\Phi(A, (x, y, z)) = (A(x, y), z)$. Determine o grupo fundamental de S^2/G.

14) Toda a matriz de $O(2, R)$ é da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, com $a^2 + b^2 = 1$. Determine $\pi_1(O(2, R), I)$.

15) Determine o grupo fundamental do subespaço de R^3 obtido pela remoção de uma recta paralela ao eixo dos z's.

16) Considere $T = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2, b < a\}$. Seja $Z_2 = \{id, g\}$, em que $g : T \to T$ é dada por $g(x, y, z) = (x, y, -z)$. Mostre que T/Z_2 é homeomorfo a $S^1 \times [a-b, a+b]$ e, consequentemente, tem grupo fundamental isomorfo a Z.

17) Mostre que o grupo fundamental da garrafa de Klein não é finito.

18) Sejam $0 < p < n$ e Y um p-plano em R^n. Determine o grupo fundamental de $R^n - Y$.

19) Sejam G um grupo topológico e $\alpha : I \to G$ um lacete tendo o elemento neutro e por ponto base. Mostre que $[\alpha]^{-1} = [\alpha']$, em que $\alpha'(t) = \alpha(t)^{-1}$.

20) Considere o subespaço topológico X de S^2 obtido pela remoção de um arco de círculo máximo ligando os pólos norte e sul. Determine $\pi_1(X, *)$.