Topologia Algébrica

fjc[2] 5

Coberturas

1) Seja G um grupo topológico discreto que actua sobre o espaço topológico X. Mostre que $(G \times X, \phi)$, sendo ϕ a acção, é uma cobertura de X.

2) Seja $f : S^n \to R$, $n \geq 1$, contínua. Mostre que existem n pares $(x_i, -x_i)$, tais que $f(x_i) = f(-x_i), i = 1, \ldots, n$.

3) Sejam $p : \widetilde{X} \to X$ uma cobertura e X_0 um subconjunto não vazio de X. Faça $\widetilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$. Mostre que $p : \widetilde{X}_0 \to X_0$ também é uma cobertura.

4) Seja $p : X \to Y$ uma cobertura. Mostre que X é uma variedade topológica sse Y é.

5) Determine, a menos de isomorfismo, as coberturas de

- **a)** S^1
- **b)** S^n, $n \geq 2$
- **c)** RP^n, $n \geq 2$

6) Considere a acção Φ de Z_2 em S^2 dada por, para $(x, y, z) \in S^2$, $\Phi((x, y, z), 0) = (x, y, z)$ e $\Phi((x, y, z), 1) = (x, y, -z)$.

- **a)** Classifique a acção de Z_2.
- **b)** Determine o grupo fundamental de S^2/Z_2.
- **c)** Dê uma justificação simples que lhe permita dizer que a acção não dá origem a uma cobertura de S^2/Z_2 por S^2.

7) Considere a cobertura (Y, p) do espaço topológico X, sendo Y conexo. Mostre que $\#p^{-1}(x)$ não depende de $x \in X$.

8) Considere o espaço lenticular $L(6, q)$. Determine, a menos de isomorfismo, o número de coberturas de tal espaço.

9) Seja G um grupo topológico que actua livremente no espaço topológico X. Mostre que se a acção não é propriamente descontínua então (X, p), sendo $p : X \to X/G$ a projecção natural, não é uma cobertura de X/G.

10) Seja (E, p) uma cobertura de X, sendo os espaços topológicos conexos. Seja $A(E, p)$ o grupo dos isomorfismos daquela cobertura, munido da topologia discreta.

a) Mostre que $\phi : A(E,p) \times E \to E$, dada por $\phi(f,x) = f(x)$, é uma acção.

b) Mostre que ϕ é propriamente descontínua.

11) Sejam $\alpha : I \to S^1$ um lacete tendo $1 \in S^1$ por ponto base e $\beta : I \to S^1$ tal que $\beta(t) = \alpha(t)^m$, para $t \in I$ e m um inteiro fixo.

a) Mostre que $grau\ \beta = m\ grau\ \alpha$ usando a definição de grau.

b) Dê uma demonstração de que $grau\ \beta = m\ grau\ \alpha$ alternativa à anterior.