

Álgebra I

Folha 4 : Produtos e Teorema de Lagrange

63. Se $G \times H$ for cíclico, prove que G e H são ambos cíclicos.
64. Mostre que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ não é isomorfo a $\mathbb{Z}$.
65. Mostre que a *diagonal* $D = \{(x, x) : x \in G\}$ é um subgrupo de $G \times G$, e que esse subgrupo é isomorfo a G .
66. Se A for um subgrupo de G e B um subgrupo de H , verifique que $A \times B$ é um subgrupo de $G \times H$. Encontre um subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que não seja construído desta forma.
67. Seja G o grupo cujos elementos são seqüências infinitas $(a_1, a_2, \dots)$ de inteiros e tais que

$$(a_1, a_2, \dots)(b_1, b_2, \dots) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, \dots)$$

Mostre que $G \times \mathbb{Z}$ e $G \times G$ são ambos isomorfos a G .

68. Seja G um grupo finito em que todo o elemento diferente do elemento neutro tem ordem 2. Prove que G é isomorfo ao produto directo de um número finito de cópias de $\mathbb{Z}_2$.
69. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{18}$?
70. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo abeliano e H e K subgrupos de $(G, \cdot)$. Prove que

$$\langle H \cup K \rangle = HK.$$

71. Prove que se H e K são subgrupos finitos de um grupo G então

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

72. Existe algum elemento de $\mathbb{Z}_{180}$ que tenha ordem 7?
73. Seja H um subgrupo de G . Prove que $g_1H = g_2H$ se e só se $g_1^{-1}g_2$ pertencer a H .
74. Mostre que se H e K forem subgrupos finitos de um grupo G , e se as suas ordens forem primos entre si então H e K têm apenas o elemento neutro em comum.
75. Suponha que a ordem de G é o produto de dois primos distintos. Mostre que cada subgrupo próprio de G tem de ser cíclico.
76. (a) Seja G um grupo abeliano finito e seja m o menor múltiplo comum das ordens dos seus elementos. Prove que G contém um elemento de ordem m .
- (b) Encontre um exemplo de um grupo finito não abeliano em que a conclusão da alínea anterior não se verifique.

77. Prove que A_4 não tem subgrupos de ordem 6.
78. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
- (a) Qualquer grupo de ordem 13 é cíclico.
 - (b) A ordem de qualquer elemento de um grupo de ordem 25 é divisível por 5.
 - (c) Todos os grupos abelianos são cíclicos.
 - (d) A_5 tem exactamente um subgrupo de ordem 60.
 - (e) $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_7$ tem ordem 140 e é abeliano.
 - (f) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ tem mais do que um elemento de ordem 6.
 - (g) $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_4$ é cíclico.

Lagrange: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html>