2 Superfícies Quádricas

1. Identifique e faça um esboço gráfico das seguintes superfícies:

   (a) $x + y + z = 1$

   (b) $y = 3$

   (c) $z = 4$

   (d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

   (g) $x^2 + (y-2)^2 = 1$

   (h) $z = y^2$

   (i) $z = 4 - x^2$

   (j) $z = 4 - x^2 - y^2$

2. Identifique e faça um esboço gráfico de cada uma das seguintes superfícies quádricas:

   (a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

   (b) $x^2 + z^2 = 9$

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = -2z$

   (d) $x^2 + y^2 = 4 - z$

   (e) $(z-4)^2 = x^2 + y^2$

   (f) $y = x^2$

   (g) $\begin{cases} z = 2 - y^2 \\ x \geq 2 \end{cases}$

   (h) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$

   (i) $x^2 - y^2 - z^2 = 9$

3. Represente geometricamente o sólido S definido pelas condições:

   (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$

   (b) $x^2 + y^2 \leq 4$ e $x^2 + y^2 \geq (z-6)^2$

   (c) $x^2 + y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq x + y$

   (d) $0 \leq z \leq 2$ e $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$

4. Faça o esboço gráfico dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $V = \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 6x + 3y + 2z \leq 12\right\}$

   (b) $V = \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 6y \ \text{ e } \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 36\right\}$

   (c) $V = \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : 4 + z \geq x^2 + y^2 \ \text{ e } \ 2 - z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$

3 Cálculo Integral

3.1 Integral Duplo

3.1.1 Cálculo do integral duplo em coordenadas cartesianas

1. Calcule $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dA$, sendo:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $D = [0,1]$ x $[0,1]$; R: $\frac{2}{3}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{se} \quad x + y \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x + y > 1 \end{cases}$ e $D = [0,1] \times [0,1]$; R: $\frac{1}{6}$

   (c) $f(x,y) = x\,y - 1$ e D a região de $\mathbb{R}^2$ definida por $y \geq x^2$ e $x \geq y^2$; R: $-\frac{1}{4}$

   (d) $f(x,y) = \sin x$ e D a região de $\mathbb{R}^2$ definida por $y \leq \sin x$, $\pi y \geq 2x$ e $x \geq 0$;
   R: $\frac{\pi^2-8}{4\pi}$

   (e) $f(x,y) = |x+y|$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\ ,\ |y| \leq 1\}$; R: $\frac{8}{3}$

   (f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2a-x}}$ e
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-a)^2 \geq a^2\ ,\ 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq a\}$;
   R: $\left(-\frac{8}{3} + 2\sqrt{2}\right) a^{\frac{3}{2}}$

2. Inverta a ordem de integração e calcule, nos casos em que é dada a função integranda, os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\ dydx$; R: $\frac{e^4-1}{4}$

   (b) $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(x^3)\ dx\ dy$; R: $\frac{1-\cos 27}{3}$

   (c) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} y\ dy\ dx$; R: $\frac{e-2}{2}$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y}\ \sin y\ \cos(\frac{x}{y})\ dy\ dx$; R: $\sin 1\,(1 - \cos 1)$

   (e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}} f(x,y)\ dy\ dx$;

   (f) $\displaystyle\int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\ dy$;

(g) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\ dy\ dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\ dy\ dx;$

(h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{2y^2}^{y^2+1} f(x,y)\ dxdy;$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\ dydx;$

3.1.2 Mudança de variável no integral duplo

3. Calcule os seguintes integrais, passando para coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, x \geq 0, x^2+y^2 \leq 9 \text{ e } x^2+y^2 \geq 4\};$

R: $\frac{-19(\sqrt{2}-2)}{6}$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\ dy\ dx;$ R: $\frac{32\pi}{5}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx;$ R: $\frac{\pi}{2}$

(d) $\displaystyle\iint_D dxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \geq 0, x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } y \leq \sqrt{3}x\};$

R: $\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

4. Calcule os seguintes integrais, efectuando a mudança de variável indicada:

(a) $\displaystyle\iint_D dxdy,$ fazendo $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$, com
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0 \text{ e } x+y \leq 1\};$ R: $\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\iint_D (x+y)\ dxdy,$ fazendo $u = x+y$ e $v = 2x-y$, sendo
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0 \text{ e } x+y \leq 1\};$ R: $\frac{1}{3}$

5. Usando uma mudança de variável adequada, calcule:

(a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy,$ onde D é o triângulo limitado pelas rectas $x=0$, $y=0$ e $x+y=2$;
R: $e - \frac{1}{e}$

(b) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\ dxdy,$ onde D é o polígono de vértices nos pontos de coordenadas $(\pi,0), (2\pi,\pi), (\pi,2\pi), (0,\pi)$. R: $\frac{\pi^4}{3}$

6. Usando a transformação
$$\begin{cases} x+y=u \\ y=uv \end{cases},$$
mostre que
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\, dy\, dx = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\,.$$

7. Usando mudanças de coordenadas convenientes, calcule $\displaystyle\iint_D xy\; dxdy$, onde
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 \leq 4 \,\wedge\, x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (4x^2+y^2 \leq 4 \,\wedge\, x \leq 0 \wedge y \geq 0)\}\,.$$

R: $\frac{3}{2}$

8. Calcule
$$\iint_E (x-y)\, e^{x+y} dxdy,$$
onde
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 + (x-y)^2 \leq 3,\; x+y \geq 0,\; x-y \leq 0\right\}.$$
R: $\frac{e^{\sqrt{3}}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{4}$

3.1.3 Aplicações do integral duplo

9. Usando integrais duplos, determine as áreas dos domínios planos definidos por:

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 6x - x^2 \text{ e } y \geq x^2 - 2x\}$; R: $\frac{64}{3}$

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 16,\; (x+2)^2+y^2 \geq 4 \text{ e } y \geq 0\}$; R: 6π

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x,\; y \leq \sqrt{3}x \text{ e } y \geq x\}$; R: $\frac{3\sqrt{3}+\pi-6}{12}$

   (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \leq 1,\; y \leq x \text{ e } y \geq 0\}$; R: $\dfrac{\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4}$

   (e) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4}+y^2 \geq 1,\; \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \leq 1,\; y \leq x,\; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$;
   R: $3\arctan\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{2}$

   (f) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x \text{ e } y \geq 2x-4\}$; R: 9

10. Usando integrais duplos, calcule a área da região plana D definida por
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\; (x-1)^2+y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq 0\}\,.$$
R: $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

11. Calcule as <u>áreas das superfícies</u> seguintes:

    (a) Porção do plano de equação $6x+3y+2z=12$ situada no primeiro octante; R: 14

    (b) Porção do parabolóide de equação $x^2+y^2=2z$ situada no interior da superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$; R: $\frac{2\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{3}$

    (c) Superfície esférica; R: $4\pi r^2$

    (d) Porção da superfície cónica de equação $x^2+y^2=z^2$ situada no interior da superfície cilíndrica de equação $x^2+y^2=1$; R: $2\sqrt{2}\pi$

    (e) $S=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4 \text{ e } x^2+y^2\leq z^2\}$; R: $8\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$.

12. Usando integrais duplos, <u>calcule o volume dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$</u> definidos pelas seguintes condições:

    (a) $\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ 0\leq z\leq x+y \end{cases}$ R: $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

    (b) $x^2+y^2\leq z\leq 2-x^2-y^2$ R: π

    (c) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1 \\ 1\leq z\leq 12-3x-4y \end{cases}$ R: 22π

    (d) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leq 4 \\ x^2+y^2\leq 2x \end{cases}$ R: $\frac{16}{3}\pi-\frac{64}{9}$

    (e) $\begin{cases} (z-16)^2\leq x^2+y^2 \\ x^2+y^2\leq 4 \end{cases}$ R: $\frac{32}{3}\pi$

    (f) $\begin{cases} z\leq 2-(x^2+y^2) \\ y+z\geq 2 \end{cases}$ R: $\frac{\pi}{32}$

13. Seja $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 1,\ x^2+z^2\leq y^2 \text{ e } 0\leq y\leq 2\}$.

    Determine o volume de E usando integrais duplos. R: $\frac{4}{3}\pi$

14. Estabeleça, através de integrais iterados, o volume do sólido do 1ºoctante limitado pelas superfícies

    $$y=x,\ \ y=2x,\ \ z=1-y^2 \ \text{ e } \ z=0,$$

    considerando que o sólido é projectado

    (a) no plano xOy;

(b) no plano xOz;

(c) no plano yOz.

15. Utilizando integrais duplos, determine a <u>massa</u> m, os <u>momentos</u> M_x e M_y e o <u>centro de massa</u> $C(x_0, y_0)$, de uma lâmina T, cuja densidade em cada ponto $P(x, y)$ de T é dada por $\rho(x, y)$, quando:

    (a) T é um triângulo rectângulo isósceles, cujos catetos medem a, e $\rho(x, y)$ é directamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice do ângulo recto;
    R: $m = \frac{ka^4}{6}$; $M_y = M_x = \frac{ka^5}{15}$; $(x_0, y_0) = \left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$

    (b) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ e $\rho(x, y)$ é a distância de P ao ponto $O(0, 0)$;
    R: $m = \frac{a^3\pi}{3}$; $M_x = \frac{a^4}{2}$; $M_y = 0$; $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$

3.2 Integral Triplo

3.2.1 Cálculo do integral triplo em coordenadas cartesianas

16. Calcule os seguintes integrais triplos:

    (a) $\iiint_E \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz$, com

    $$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\right\}.$$

    R: $-\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2$

    (b) $\iiint_E z \; dxdydz$, em que E é a região do 1ºoctante limitada pelas superfícies

    $$x + y = 2, \; x + 2y = 2 \;\text{ e }\; y^2 + z^2 = 4.$$

    R: $\frac{17}{12}$

    (c) $\iiint_E y \; dxdydz$, em que E é limitado pelas superfícies de equações

    $$y = x^2 + z^2 \;\text{ e }\; y = \sqrt{20 - x^2 - z^2}.$$

    R: $\frac{76}{3}\pi$

17. Em cada um dos integrais seguintes, identifique o domínio de integração, escreva, se possível, os integrais dados por uma ordem de integração diferente, e calcule-os:

    (a) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x \; dz \; dy \; dx.$ R: $\frac{4}{3}\pi$

    (b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2+x^2+y^2}^{3} dz \; dy \; dx.$ R: $\frac{\pi}{8}$

    (c) $\int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy \; dz \; dx.$ R: $\frac{304}{15}$

3.2.2 Mudança de variável no integral triplo

18. Usando uma mudança de variável conveniente, calcule os seguintes integrais triplos

    (a) $\iiint_E \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dV$ com

    $$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\};$$

    R: 4π

(b) $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$ com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}\,;$$

R: $4\pi \ln \frac{3}{2}$

(c) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1\}\,;$$

R: $\frac{3}{10}\pi$

(d) $\displaystyle\iiint_E y\, dV$ com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge z \geq -\sqrt{x^2+y^2}\}\,;$$

R: 0

(e) $\displaystyle\iiint_E z\, dV$ com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq z^2 \wedge x^2+y^2+z^2 \leq -2z\}\,;$$

R: $-\frac{\pi}{6}$

(f) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{1-(\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9})}\, dxdydz$ com

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2+36y^2+4z^2 \leq 36\}\,.$$

R: $\frac{3}{2}\pi^2$

19. Considere o integral triplo I escrito na seguinte forma

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2-1}^{2-rcos\theta} 4r^2\sin\theta\; dz\; dr\; d\theta\,.$$

(a) Calcule o valor de I; R: 0

(b) Represente graficamente o domínio de integração E;

(c) Escreva I como um integral iterado usando coordenadas cartesianas.

R: $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-1+x^2+y^2}^{2-x} 4y\; dz$

3.2.3 Aplicações do integral triplo

20. Usando integrais triplos, calcule o volume das regiões de $\mathbb{R}^3$ definidas por:

    (a) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq (z-1)^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$; R: $\frac{\pi}{3}$

    (b) $x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$; R: $\frac{\pi}{6}$

    (c) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 8 \\ z^2 \geq x^2+y^2 \end{cases}$; R: $\frac{64(\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

    (d) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq 4 \\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \end{cases}$. R: $\frac{10}{3}\pi$

    (e) $\begin{cases} x^2+y^2 \leq z \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$. R: $\frac{3\pi}{2}$

21. Determine o volume dos seguintes sólidos

    (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 \text{ e } x^2+y^2-z^2 \leq 1\}$; R: $\frac{14}{3}\pi$

    (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2z\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq 3 \text{ e } y \geq x\}$. R: $\left(\sqrt{3}-\frac{9}{8}\right)\pi$

    (c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z+x^2 \leq 4\,,\ y+z \leq 4,\ y \geq 0 \ \text{ e } \ z \geq 0\}$. R: $\frac{128}{5}$

22. Seja $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1+\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$.

    (a) Calcule o volume de Q; R: $\frac{2}{3}\pi$

    (b) Calcule o volume de $T(Q)$, onde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definida por

    $$T(x,y,z) = (x-y, y+z, z-x).$$

    R: $\frac{4}{3}\pi$

23. Determine a massa do sólido

    $$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}\,,$$

    sabendo que a densidade, em cada ponto, é directamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto à origem.

    R: $m = \frac{128}{5}k\pi$

24. Supondo que o sólido V, limitado pelas superfícíes de equações $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=x^2+y^2$, é homogéneo, determine a sua massa e o momento em relação ao plano XOY.

    R: $m=\frac{k\pi}{6}$; $M_{xy}=\frac{k\pi}{12}$

25. Determine as coordenadas do centro de massa do sólido

$$Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq z\leq 5-x^2-y^2 \text{ e } x^2+y^2\geq 1\},$$

    sabendo que $\rho(x,y,z)=k|z|$.

    R: $\left(0,0,\frac{9}{4}\right)$

26. Considere o sólido S definido por

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0\,,\ \ y\geq\sqrt{3}x\,,\ \ z^2\geq 4(x^2+y^2) \text{ e } 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}\,.$$

    Determine a massa total de S, sabendo que

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

    R: $m=\frac{\pi}{2}\arctan\frac{1}{2}$

27. Seja E o sólido definido por

$$\begin{cases} z^2\geq 4(x^2+y^2)\\ x^2+y^2+(z-6)^2\geq 17\\ 0\leq z\leq 5\,. \end{cases}$$

    Calcule a massa total de E, sabendo que a densidade, em cada ponto (x,y,z) de E, é directamente proporcional à distância desse ponto ao plano de equação $z=6$.

    R: $m=\frac{11}{4}\pi$

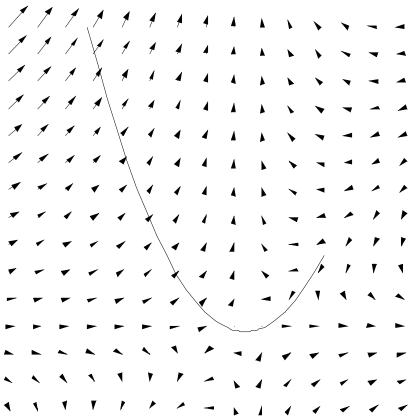
3.3 Integral Curvilíneo de uma função vectorial

3.3.1 Cálculo do integral curvilíneo de uma função vectorial

28. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde

    (a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy)\hat{\imath} + (y^2 - 2xy)\hat{\jmath}$ e C é o arco da parábola de equação $y = x^2$ que vai de $A(-2, 4)$ a $B(1, 1)$;

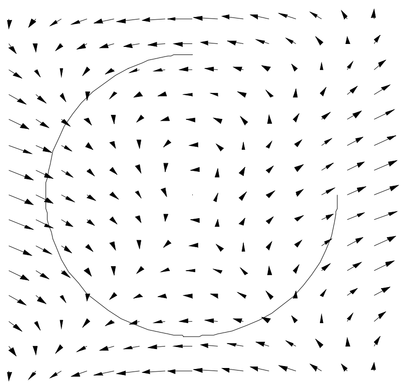
    R: $-\frac{369}{10}$

    Curva C e campo vectorial F

    (b) $F(x, y) = (x^2 - y^2)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ e C é o arco da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido directo, que vai de $A(0, 2)$ a $B(2, 0)$;

    R: $3\pi - \frac{8}{3}$

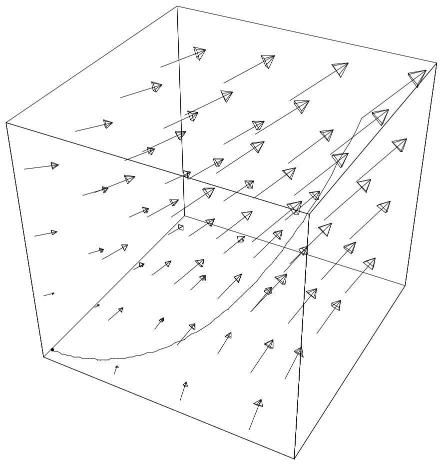
    Curva C e campo vectorial F

    (c) $F(x, y, z) = (y + z)\hat{\imath} + (x + z)\hat{\jmath} + (x + y)\hat{k}$ e C é o arco da curva de equação

    $$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^4 \end{cases}$$

    que une os pontos $A(0, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$ e orientada de A para B;

    R: 3



Curva C e campo vectorial F

(d) $F(x,y,z) = (2x-z)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$ e C é a curva que se obtem por justaposição do segmento de recta de extremos $(0,0,0)$ e $(1,0,0)$ com a curva parametrizada por

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{t}{\pi} \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi \, ;$$

R: 2

(e) $F(x,y,z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ e C é a curva definida por

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = \sqrt{x^2+y^2} \right\} ,$$

orientada no sentido directo. R: π

(f) $F(x,y) = (y+1, -x^2)$ e C é a curva definida por

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \vee y = 4) \wedge x \in [-2,2]\},$$

orientada no sentido directo; R: $-\frac{32}{3}$

(g) $F(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ e C é a elipse definida por

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x + z = 1.$$

R: -4π

29. Sendo $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \text{ e } x^2+y^2 \geq 1\}$ e C a curva fechada definida pela intersecção de Q com o plano $z = 1$ e orientada no sentido directo, calcule

$$\int_C y \, dx + x \, dy + z \, dz \, .$$

R: 0

30. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y,z) = x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} - z\hat{k}$, no deslocamento ao longo da curva C definida por:

$$\begin{cases} z = y^4 \\ x = 1 \end{cases} , \qquad \text{desde } (1,0,0) \text{ a } (1,1,1)\,.$$

R: $\frac{1}{2}$

31. Considere as duas superfícies de equações

$$S_1 \,:\, x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad S_2 \,:\, z = \sqrt{3}\,,$$

e seja Γ a linha de intersecção de S_1 com S_2. Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$\vec{G}(x,y,z) = -y^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + (z^2+1)\hat{k},$$

para deslocar uma partícula material ao longo da curva Γ, orientada no sentido directo.
R: 0

3.3.2 Campos conservativos. Independência do caminho

32. Calcule
$$\int_C e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy,$$
onde C é uma curva entre o ponto $P(0,0)$ e o ponto $Q\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

    R: $e^{\frac{\pi}{2}}$

33. Calcule $\displaystyle\int_C (y - x^2)\, dx + x\, dy$, onde
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2x - x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x + 3y = 4 \wedge 1 \leq x \leq 4)\}$$
e está orientada de $A = (4,0)$ para $B = (0,0)$.

    R: $\frac{64}{3}$

34. Determine a função $\phi(x)$, com primeira derivada contínua, que se anula para $x = 2$ e tal que o integral $\displaystyle\int_C 2y\, dx + \phi(x)\, dy$ é independente do caminho de integração .

    R: $\phi(x) = 2x - 4$

35. Calcule o integral $\displaystyle\int_C \frac{y\, dx - x\, dy}{y^2}$ onde C é uma curva simples, fechada e parcialmente suave, que não intersecta o eixo das abcissas.

    R: 0

36. Calcule:

    (a) $\displaystyle\int_\gamma 2xyz\, dx + (x^2z + z^2)\, dy + (x^2y + 2yz)\, dz,$

    onde γ é uma curva suave que liga os pontos $A = (1,5,0)$ e $B = (1,0,-1)$.

    R: 0

    (b) $\displaystyle\int_\gamma y^2 \cos x\, dx + (2y \sin x + e^{2z})\, dy + 2ye^{2z}\, dz,$

    onde γ é uma curva suave que liga os pontos O e $A = \left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right)$.

    R: $1 + e^2$

3.3.3 Teorema de Green

37. Por aplicação do Teorema de Green, calcule o integral $\displaystyle\int_C -x^2y\, dx + xy^2\, dy$, onde C é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = a^2$, orientada no sentido directo.

    R: $\frac{\pi}{2}a^4$

38. Sendo
$$R=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\geq y^2 \text{ e } x\leq \frac{y^2}{2}+2\right\},$$
use o Teorema de Green para calcular o integral $\displaystyle\iint_R y^2\, dxdy.$

R: $\frac{64}{15}$

39. Seja $K=\displaystyle\int_C y\, dx+e^y y^2\, dy$ onde C é a fronteira, orientada no sentido directo, da região plana R determinada pelas condições
$$x\leq 2 \;\text{ e }\; y^2\leq 2(x+2).$$
Apresente o valor da área de R em função de K.

R: $-k$

40. Considere o campo de vectores definido por
$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\arccos x}, x+1\right),\quad (x,y)\in\,]-1,1[\,\times\mathbb{R}.$$
Calcule o trabalho realizado pelo campo F para deslocar uma partícula desde o ponto $A=\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ até ao ponto $B=\left(0,\frac{1}{2}\right)$, ao longo do arco de circunferência definido por
$$x^2+y^2=\frac{1}{4}\quad \text{e}\quad x\geq 0.$$

R: $\frac{1}{8}\pi+1$

41. Calcule
$$\int_\Gamma e^{x^2}dx+\left(1+y^2\right)dy,$$
onde Γ é a curva que se obtém por justaposição da curva definida por $x^2+y^2=4$ com $x\geq 0$ e $y\geq 0$, orientada de $A\,(0,2)$ para $B\,(2,0)$, com a curva definida parametricamente por
$$\begin{cases} x=2-2t\\ y=4t^2-8t\end{cases},\ t\in[0,1].$$

R: -30

42. Considere a região plana
$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x \text{ e } x^2+y^2\leq -2x\right\}.$$

(a) Calcule o valor da constante k dada por $k=\displaystyle\iint_R y\, dA.$ R: $\frac{1}{6}$

(b) Sendo C a curva com orientação positiva, que é fronteira da região R, mostre que

$$\int_C (x+2y^2)\;dx + (xy+y^2)\;dy = -3k\,.$$

43. Considere a seguinte região plana

$$R = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1-(x+1)^2\}$$

e a curva C que é a fronteira de R, orientada positivamente.

(a) Calcule

$$\int_C -x^2\;dy - y^2\;dx\,.$$

R: $\frac{56}{15}$

(b) Use o resultado anterior para determinar o volume do sólido

$$E = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : (x,y)\in R \text{ e } 0\leq z\leq y-x\}\,.$$

R: $\frac{28}{15}$

44. Recorrendo ao Teorema de Green, determine condições que definam um sólido cujo volume é dado por

$$\int_C (y^3+2yx^2)\;dx + (2x+y^2x)\;dy\,,$$

onde C representa a circunferência de equação $x^2+y^2=1$, percorrida no sentido directo.

R: $z\leq 2$ e $z\geq 2\,(x^2+y^2)$ ou $z\geq 0$ e $z\leq 2-2\,(x^2+y^2)$

45. Seja C a curva de equações paramétricas

$$x(t)=a\cos t\,,\quad t\in[0,2\pi] \quad \text{e} \quad y(t)=\begin{cases} a\sin t\,, & t\in[0,\pi] \\ 0\,, & t\in]\pi,2\pi] \end{cases}\,.$$

Usando o Teorema de Green, determine $\underline{a}$ por forma a que

$$\int_C x\;dx + xy\;dy = 18\,.$$

R: $a=3$

46. Seja

$$F(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}\,.$$

(a) Prove que $\int_C F \cdot d\vec{r}$ tem sempre o mesmo valor, qualquer que seja a curva C fechada, simples e parcialmente suave que circunda a origem.

(b) Prove que esse valor é 2π.

(c) Prove ainda que, se a curva C não circundar nem passar na origem, então $\int_C F \cdot d\vec{r} = 0$.

47. Seja r um parâmetro real positivo e diferente de $\sqrt{2}$. Discuta, para os diferentes valores de r, o valor de

$$\oint_C \frac{-y\ dx + x\ dy}{x^2 + y^2},$$

sendo C a curva plana de equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$.

R: 0, se $r < \sqrt{2}$; 2π, se $r > \sqrt{2}$

3.4 Integral Curvilíneo de uma função escalar

3.4.1 Cálculo do integral curvilíneo de uma função escalar

48. Calcule o $\int_C f(x,y,z)\,ds$, onde

    (a) $f(x,y,z) = x+y+z$ e C é a curva de equações paramétricas

    $$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases} ,t \in [0,2\pi];$$

    R: $2\sqrt{2}\pi^2$

    (b) $f(x,y,z) = x\cos z$ e C é a curva de equações paramétricas

    $$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases} ,t \in [0,1];$$

    R: $\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

    (c) $f(x,y,z) = \frac{z}{1+2x-y}$ e C é a curva de equações paramétricas

    $$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t^2 \\ y = 2t^2 \\ z = 5t \end{cases} ,t \in [0,1].$$

    R: $25\left(\sqrt{2}-1\right)$

49. Calcule:

    (a) $\displaystyle\int_C \frac{1}{x-y}\,ds$, em que C é o segmento de recta de equação $y = \frac{1}{2}x-2$, compreendido entre os pontos $A(0,-2)$ e $B(4,0)$; R: $\sqrt{5}\ln 2$

    (b) $\displaystyle\int_C xy\,ds$, onde C é a circunferência de equação $x^2+y^2-6x-4y+12=0$; R: 12π

    (c) $\displaystyle\int_C x-\sqrt{y}\,ds$, onde

    $$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \vee y = 4) \wedge |x| \le 2\right\};$$

    R: $\frac{49}{6} - \frac{17}{6}\sqrt{17}$

    (d) $\int_C x^2-y^2\,ds$, onde

    $$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1 \wedge x+y+z = 0\right\}.$$

    R: 0

3.4.2 Aplicações do integral curvilíneo de uma função escalar

50. Sejam C_1 e C_2 as curvas de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 2\cos 4t \\ y = 3\sin 4t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

respectivamente.

   (a) Faça um esboço de C_1 e C_2;

   (b) Mostre que o comprimento de C_2 é igual a 4 vezes o comprimento de C_1.

51. Considere uma lata cilíndrica cuja base é modelada parametricamente por $(\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, e à qual foi feito um corte, no topo, modelado pela função $z = 2 + \frac{1}{2}\sin(3t)$. Calcule a área da superfície lateral da lata. R: 4π

52. Calcule a área da superfície S definida por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge 0 \le z \le \frac{|\,y\,|}{\sqrt{3 - 2\,x}} \right\},$$

onde C é o arco da curva de equação $2\,(1 - x) = y^2$ que une os pontos $A = \left(0, -\sqrt{2}\right)$ e $B = \left(0, \sqrt{2}\right)$.

R: 2

53. Pretendem-se caiar ambos os lados de uma cerca que tem por base a curva

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{30}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{30}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ e } y \ge 0 \right\}$$

e em que a altura é dada em cada ponto $(x, y) \in C$ por $a(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$. Desprezando os encargos com a cal, e sabendo que o pintor leva 10 euros por caiar 25 u.a., determine o preço a que fica o trabalho.

R: 360 euros

54. Um anel de arame, com a forma da curva de equação $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, tem densidade $f(x, y) = |x| + |y|$. Determine a massa e o centro de massa do anel.

R: $m = 8a^2$; $(x_0, y_0) = (0, 0)$

55. Determine o comprimento e o centro de massa de uma catenária uniforme (a densidade é constante), de equação $y = 2\cosh\frac{x}{2}$, entre os pontos de abcissas -5 e 5.

R: $l(C) = 4\sinh\frac{5}{2}$; $(x_0, y_0) = \left(0, \frac{5 + \sinh 5}{2\sinh\frac{5}{2}}\right)$

3.5 Integral de Superfície de uma função escalar

3.5.1 Cálculo do Integral de Superfície de uma função escalar

56. Calcule os seguintes integrais de superfície

    (a) $\displaystyle\iint_S z^2\, dS$, onde S é a porção da superfície cónica

    $$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

    limitada pelos planos $z = 1$ e $z = 3$;
    R: $40\sqrt{2}\pi$

    (b) $\displaystyle\iint_S z\, dS$, onde S é o elipsóide de equação

    $$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1;$$

    R: 0

    (c) $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$, onde S é a reunião da porção do parabolóide

    $$z = 1 - (x^2 + y^2),$$

    situada acima do plano XOY, com a porção desse mesmo plano definida por $x^2 + y^2 \leq 1$;
    R: $\frac{25\sqrt{5}+1}{60}\pi + \frac{\pi}{2}$

    (d) $\displaystyle\iint_S x\, dS$, onde

    $$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

    R: $\frac{32}{3}$.

57. Considere a superfície S definida por

    $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq x + 3\}.$$

    Calcule os seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\iint_S y^2\, dS$; R: 24π

    (b) $\displaystyle\iint_S z^2\, dS$. R: 60π

3.5.2 Aplicações do Integral de Superfície de uma função escalar

58. Calcule a área de superfície de S quando:

    (a) S é uma superfície esférica de raio igual a a, com $a > 0$; R: $4\pi a^2$

    (b) S é composta pela porção do parabolóide $x^2 + y^2 = 4 - z$, situada acima do plano XOY, e pela porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situada abaixo desse mesmo plano;
    R: $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) + 8\pi$

    (c) S é a superfície que limita o sólido Q definido por

    $$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - (z-6)^2 \leq 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 6\right\}.$$

    R: $36\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$

59. Determine o centro de massa do hemisfério

    $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0,$$

    se ele tiver densidade constante. R: $\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$

60. Determine a massa de um funil fino com o formato da superfície definida por

    $$z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 4,$$

    se a sua função densidade for $\rho(x, y, z) = 10 - z$.
    R: $108\pi\sqrt{2}$

3.6 Integral de Superfície de uma função vectorial

3.6.1 Cálculo do Integral de Superfície de uma função vectorial

61. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$ quando:

    (a) $\vec{F}(x,y,z)=y\hat{\imath}-x\hat{\jmath}+8\hat{k}$ e S é a porção do parabolóide $z=9-x^2-y^2$ que fica situada acima do plano XOY, com $\hat{n}$ dirigida para cima;

    R: 72π

    (b) $\vec{F}(x,y,z)=x\hat{\imath}-\hat{\jmath}+2x^2\hat{k}$, sendo S a porção do parabolóide $z=x^2+y^2$, limitada pelas superfícies $x=1-y^2$ e $x=y^2-1$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para baixo;

    R: 0

    (c) $\vec{F}(x,y,z)=-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}+z\hat{k}$ e S é a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=4$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para dentro;

    R: $-\frac{32}{3}\pi$

    (d) $\vec{F}(x,y,z)=xz\hat{\imath}+xy\hat{\jmath}+yz\hat{k}$ e S é definida por

    $$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2=r^2\wedge x\geq 0\wedge y\geq 0\wedge 0\leq z\leq h\}\quad (r>0,\,h>0)$$

    e orientada com $\hat{n}$ a apontar para o exterior.

    R: $\frac{r^2h^2}{8}\pi+\frac{hr^3}{3}$

    (e) $F(x,y,z)=(xz,y,z)$ e S é definida por

    $$S=\left\{(x,y,z)\in 1^o\text{octante}\,:\,y=x^2,\ 0\leq z\leq 1,\ 0\leq y\leq 4\right\}$$

    e orientada com $\hat{n}$ dirigida para a parte positiva do eixo Ox.

    R: 0

62. Calcule o fluxo de

    $$F(x,y,z)=\left(\sin(xyz),x^2y,z^2e^{\frac{x}{5}}\right)$$

    através da parte do cilindro

    $$4x^2+z^2=4$$

    situada acima do plano xOy e entre os planos $y=-2$ e $y=2$, com orientação para cima.

    R: $800\left(-4\sqrt[5]{e}+\sqrt[5]{e^{-1}}\right)$.

63. Seja $\vec{F}(x,y,z)=x\hat{\imath}+x^2\hat{\jmath}+yz\hat{k}$ o campo vectorial que representa a velocidade (em m/s) de uma corrente de fluido.

(a) Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, o plano XOY através do quadrado definido por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. R: $0\ m^3$

(b) Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, o plano $z = 1$ através do quadrado definido por $z = 1$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. R: $0.5\ m^3$

3.6.2 Teorema de Stokes

64. Usando o Teorema de Stokes, transforme o integral de superfície $\displaystyle\iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$ num integral curvilíneo e calcule o seu valor, para cada um dos casos seguintes:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = 2y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ e S é a superfície do parabolóide $z = 1 - (x^2 + y^2)$, situada acima do plano XOY, com a orientação canónica. R:-2π

(b) $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{\imath} - y\hat{\jmath} - x^2y\hat{k}$, S é composta pelas 3 faces, não situadas no plano XOZ, do tetraedro limitado pelos 3 planos coordenados e pelo plano $3x + y + 3z = 6$, com orientação determinada pela normal unitária exterior do tetraedro. R: $\frac{4}{3}$

65. Usando o Teorema de Stokes, mostre que cada um dos seguintes integrais curvilíneos tem o valor indicado. Em cada caso diga em que sentido é que a curva C é percorrida, para obter o resultado pretendido.

(a) $\displaystyle\oint_C (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - zx)\, dy + (z^2 - xy)\, dz = 0$, com C uma curva simples, fechada e parcialmente suave.

(b) $\displaystyle\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = -\pi$, sendo C a circunferência $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

(c) $\displaystyle\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pi\sqrt{3}$, sendo C a curva de intersecção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$.

(d) $\displaystyle\oint_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$, sendo C a curva de intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

3.6.3 Teorema da Divergência

66. Utilizando o Teorema da Divergência, calcule:

(a) $\displaystyle\iint_S (yz, xz, xy) \cdot \hat{n}\, dS$ onde S é composta pelas faces do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 3$, e $\hat{n}$ é a normal unitária exterior a S; R: 0

(b) $\displaystyle\iint_S \left(x^2, y^2, z^2\right) \cdot \hat{n}\, dS$ onde $\hat{n}$ é a normal unitária exterior a S e

i. S é composta pelas faces do cubo de vértices

$$(0,0,0),\ (2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2),\ (2,2,0) \ \text{ e } \ (2,2,2);$$

R: 48

ii. S é a superfície que limita o sólido

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\};$$

R: $\frac{\pi}{2}$

iii. S é a superfície que limita o sólido

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2 + y^2) \leq z^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}.$$

R: $\frac{\pi}{8}$

67. Considere o sólido V definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \text{ e } z \geq 3\}.$$

Sendo $\hat{n}$ a normal exterior a S, com $S = fr\,(V)$, calcule

$$\iint_S (xz, yz, 1) \cdot \hat{n}\, dS$$

(a) utilizando a definição;

(b) usando o teorema da divergência. R: 128π

68. O filtro de uma máquina de lavar loiça tem a forma aproximada da superfície que é a fronteira do conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\},$$

e está imerso, durante a lavagem, numa corrente de água com uma velocidade dada pelo campo

$$F\,(x,y,z) = \left(2yz \cos y^2, 2xz \cos x^2, 1\right).$$

(a) Mostre que a quantidade da água no interior do filtro se mantém constante durante a lavagem.

(b) Calcule o fluxo de água que atravessa o filtro, através da sua parede curva. Interprete o resultado obtido.

R: -9π

Exercícios de Exames

69. Use a transformada de Laplace para resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + y = 6\cos t \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

R: $y = 3\cos t + (3t+1)\sin t$

70. Sendo $\mathcal{L}$ o operador transformada de Laplace, calcule:

(a) $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < 5 \\ e^{3t} & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$.

R: $\frac{2}{s}\left(1 - e^{-5s}\right) + \frac{e^{-5(s-3)}}{s-3}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2\sqrt{s}}\right\}$.

R: $\frac{4}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$

71. Usando transformada de Laplace, determine a função $y(t)$, definida em $\mathbb{R}^+$, que verifica $y(0) = 0$ e

$$y'(t) = 1 - \sin t - \int_0^t y(\tau)\ d\tau.$$

R: $\sin t - \frac{t\sin t}{2}$

1. Sendo k uma constante real não nula prove, a partir da igualdade

$$[\cos(kt)]'' = -k^2\cos(kt),$$

que

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}.$$

72. Seja $\vec{F}(x,y,z) = (x-1)\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}$ e S a superfície definida por

$$z = 4 - y^2 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \leq 1.$$

(a) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ supondo S com orientação canónica; R: $-\frac{\pi}{2}$

(b) Use a alínea anterior para calcular $\displaystyle\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ com

$$\vec{G}(x,y,z) = x^2\,\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$$

e C a curva definida por $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 4 - y^2 \end{cases}$.

R: $-\frac{\pi}{2}$

73. Seja S a fronteira da região Q de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\,, 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}\ .$$

Seja ainda

$$\vec{F}(x, y, z) = e^{xyz} \sin x\ \hat{\imath} + \cos(x + y + z)e^{x^2/2}\ \hat{\jmath} + \sin(e^{x^2} + y^2 + z)\ \hat{k}\ .$$

Determine $\displaystyle\iint_S \text{rot}\ \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$ sendo $\hat{n}$ a normal exterior a S.

R: 0

74. (a) Calcule o volume do sólido Q determinado por

$$2z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 \leq z^2\,.$$

R: 7π

(b) Seja

$$\vec{F}(x, y, z) = (2x + y^2)\ \hat{\imath} + (3y + z^3)\ \hat{\jmath} + (4z + \ \text{e}^{\ x^4})\ \hat{k}$$

e sejam ainda S a fronteira do sólido Q e $\hat{n}$ a normal exterior a S.
Recorrendo ao resultado obtido na alínea anterior, determine o valor de

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS\ .$$

R: 63π

75. Seja S a fronteira da região D definida por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z^2 \geq x^2 + y^2 \ \text{e}\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$$

e suponha S orientada para fora..
Seja ainda

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{yz} \sin^2 z + x)\ \hat{\imath} + (e^{\sin x} - 3y)\ \hat{\jmath} + (z^2 + 2z + x \sin y e^{xy})\ \hat{k}\ .$$

(a) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$. R: $\frac{7}{3}\pi$

(b) Calcule $\displaystyle\iint_S 3\ \text{rot}\ \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$. R: 0

76. Seja

$$F\,(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-x^3}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 4\right\},$$

e está orientada no sentido directo. R: $-\pi$.

77. (a) Calcule o volume do sólido Q definido por

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \ \text{ e } \ 0 \leq z \leq y\right\}.$$

R: $\frac{2}{3}$

(b) Usando o Teorema de Stokes, calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde C é a curva definida por

$$r(t) = (\cos t, \ \ \sin t, \ \ \sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

e

$$F(x, y, z) = \left(2xyz^2, \ 2x^2yz, \ e^z\right).$$

R: 0

78. Seja F o campo de vectores definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}\right).$$

(a) Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, com

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36, \quad x \geq 0\right\},$$

orientada de $B = (0, -2)$ para $A = (0, 2)$.

R: $2 \arctan 2$

(b) Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, com

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\right\},$$

orientada no sentido directo.

R: 2π

(c) Calcule a área da região plana

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq \frac{2}{3}x\right\}.$$

R: $\frac{3\pi}{4}$

79. Calcule a área da superfície S definida por

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \geq 1 \ \text{ e } \ z \geq 0\right\}$$

R: $4\sqrt{3}\pi$

80. Seja S a superfície definida por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = y^2 + z^2 \wedge x \leq 2\right\},$$

orientada com a normal unitária exterior $\widehat{n}$.

(a) Faça um esboço de S.

(b) Sendo $F(x,y,z) = (1,0,3z)$, calcule $\displaystyle\iint_S F \, dS$.

R: 8π

(c) Usando o resultado da alínea anterior, calcule o volume do sólido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x \geq y^2 + z^2 \wedge x \leq 2\right\}.$$

R: 4π

81. Calcule

$$\int_C 2x \arctan y \, dx + \frac{x^2}{1+y^2} \, dy,$$

onde C é a curva

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \ln x \wedge e \leq x \leq e^2\right\},$$

orientada da esquerda para a direita.

R: $-\pi\frac{e^2}{4} + e^4 \arctan 2$

82. Calcule

$$\iint_S rotF \cdot \widehat{n} \, dS,$$

onde $F(x,y,z) = (-y, x^2, x^3)$ e

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$

orientada com a normal unitária exterior $\widehat{n}$.

R: 0

83. Efectuando uma mudança de variáveis, calcule

$$\iint_D \sin(x+y)\cos(x-2y) \, dxdy,$$

onde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq -x+\pi \ \text{ e } 0 \leq x-2y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.

R: $\frac{2}{3}$

84. Considere o integral duplo escrito em coordenadas polares,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\theta}^{\frac{2}{\cos\theta}} r^3 dr d\theta.$$

   (a) Faça um esboço gráfico do domínio de integração D. Apresente todos os cálculos que efectuar.

   (b) Usando coordenadas cartesianas, expresse o integral anterior através de integrais simples iterados.

85. Seja C a curva de equação $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com $y \geq 0$ $(b \neq 0)$.
   Mostre que $\int_C ye^x \; dx + (e^x + 2y) \; dy = 0$.

86. Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y \;\text{ e }\; 0 \leq z \leq x^2 + y^2\right\}.$$

   Determine uma expressão, em função de integrais simples, para calcular a área da superfície S:

   (a) através de um integral de superfície;

   (b) através de um integral curvilíneo de uma função escalar.

87. Considere o sólido

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \;\text{ e }\; z \leq \sqrt{3\left(x^2 + y^2\right)}\right\}.$$

   (a) Faça um esboço do sólido E.

   (b) Estabeleça o integral triplo que lhe permita calcular o volume de E:

      i. usando coordenadas cilíndricas;

      ii. usando coordenadas esféricas.

88. Sejam

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x \leq z \leq 6 - x^2 \;\text{ e }\; 0 \leq y \leq 4\right\}$$

   uma região de $\mathbb{R}^3$ e

$$F(x, y, z) = \left(x^3 + e^{-y} \sin z, x^2 y + \arctan z, \sqrt{y}\right)$$

   uma função vectorial.

(a) Faça um esboço da região Q.

(b) Considerando a fronteira de Q orientada com a normal exterior $\widehat{n}$, determine

$$\iint_{fr(Q)} F \cdot \widehat{n} dS.$$

R: 500

89. Sejam $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \text{ e } \ x \geq 1\right\}$ e C a sua fronteira orientada no sentido directo.

(a) Calcule $K = \iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$, usando coordenadas polares. R: $\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$

(b) Mostre que $\int_C \ln \sqrt{x^2+y^2} dy = K$.

90. Considere o sólido

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ \text{ e } \ x + z \leq 0\right\}$$

Seja T a superfície plana que delimita E, orientada com a normal $\widehat{n}_1$, exterior a E e $F(x,y,z) = (2y - z, x^3, z)$.

(a) Calcule $\iint_T F \cdot \widehat{n}_1 \, dS$. R: 0

(b) Usando o Teorema da Divergência, calcule $\iint_S F \cdot \widehat{n}_2 \, dS$, sendo S a superfície curva que delimita E, orientada com a normal $\widehat{n}_2$ exterior a E. R: $\frac{16\pi}{3}$

91. Sejam

$$\begin{aligned} T &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \ \text{ e } \ z \geq 0\right\}, \\ U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} \ \text{ e } \ z \geq 0\right\}, \end{aligned}$$

duas superfícies com orientação canónica.

(a) Faça um esboço da região sólida Q que está situada acima do plano xOy e abaixo, simultaneamente, das superfícies T e U.

(b) Usando coordenadas cilíndricas, apresente uma expressão que permita determinar o volume de Q.

(c) Sendo $F(x,y,z) = (y, -x, \sin z)$, calcule $\iint_T rotF \cdot dS$. R: -8π

92. (a) Considere a superfície

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = 4 - 4x^2 - y^2, \; z \geq 0, \; y \geq 2x \}.$$

i. Determine a área A da projecção ortogonal de S no plano XOY. R: π

ii. Estabeleça um integral curvilíneo cujo valor seja igual a A.

(b) Considere as superfícies

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 4x^2 - y^2, \; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

e

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \; z \leq 4 - 4x^2 - y^2 \text{ e } z \geq 0 \right\}.$$

i. Através de um integral de superfície, estabeleça uma expressão que permita determinar a área de S_1.

ii. Através de um integral curvilíneo de função escalar, estabeleça uma expressão que permita determinar a área de S_2.

Nota: os cálculos das alíneas $i)$ e $ii)$ devem ser desenvolvidos até serem obtidos integrais simples.

93. Uma fonte de água, que consideramos na origem do referencial, emite um fluxo com velocidade $F(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$, em m/s.

Determine a quantidade de água que atravessa a semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z \geq 0$, durante um minuto. R: $120\pi \; m^3$

94. (a) Calcule, mudando a ordem de integração, o valor do integral

$$I = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx dy.$$

R: $e - 1$

(b) Determine uma função M tal que $I = \displaystyle\int_C M(x, y) \, dx$, sendo C a curva que limita o domínio definido em a).

R: $M = -ye^{x^2}$ (por exemplo).

95. (a) Determine o integral curvilíneo

$$\oint_C \frac{y - 1}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} dx + \frac{1 - x}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} dy,$$

sendo C

i. a circunferência de equação $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; R: -2π

ii. a circunferência de equação $x^2+y^2=\frac{1}{4}$. R: 0

(b) Diga, justificando, qual o valor de

$$\oint_C \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}dx+\frac{1-x}{(x-1)^2+(y-1)^2}dy,$$

quando C for uma curva simples, suave e fechada, que circunde, sem o conter, o ponto $(1,1)$. R: -2π