SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
Delegação Regional do Centro

Canguru sem fronteiras 2007

Categoria: Júnior — Duração: 1h15mn

Destinatários: alunos dos 10° e 11° anos de Escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

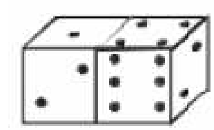
Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. O Afonso, o Beto e o Carlos têm em conjunto 30 bolas. Se o Beto der 5 bolas ao Carlos, o Carlos der 4 bolas ao Afonso e o Afonso der 2 bolas ao Beto, eles ficam com o mesmo número de bolas. Quantas bolas tinha o Afonso no início?

   (A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

2. Qual é a soma do número de pontos nas faces invisíveis dos dois dados?

   (A) 15 (B) 12 (C) 7 (D) 27 (E) Outra resposta.

3. Ao anunciar os resultados de um Sorteio na Escola, o Ivo disse: "*Os bilhetes vencedores são aqueles que têm um número com pelo menos 5 algarismos e com, no máximo, três algarismos maiores do que 2.*" Seguidamente, o Ivo retirou da tombola os bilhetes com os seguintes números: 1022, 22222, 102334, 213343, 3042531. Quantos são os bilhetes vencedores?

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Num triângulo $[ABC]$, D é o ponto médio de $[AB]$, E é o ponto médio de $[DB]$, F é o ponto médio de $[BC]$. Se a área de $\triangle ABC$ for 96, então a área de $\triangle AEF$ é

   (A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 36 (E) 48

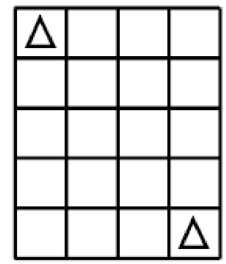
5. O Francisco dividiu os seus 2007 berlindes por três sacos A, B e C, de modo a que cada saco contenha exactamente o mesmo número de berlindes. Se o Francisco passar 2/3 dos berlindes do saco A para o saco C, a razão entre o número de berlindes no saco A e no saco C será

   (A) $1:2$ (B) $1:3$ (C) $2:3$ (D) $1:5$ (E) $3:2$

6. Uma organização internacional tem 32 membros. Quantos membros terá daqui a três anos, se o número de membros aumentar em cada ano 50 % dos membros do ano anterior?

(A) 182 (B) 128 (C) 108 (D) 96 (E) 80

7. Quantos caminhos possíveis existem, com o número mínimo de movimentos, para o rei se deslocar da casa no canto superior esquerdo para a casa no canto inferior direito do tabuleiro ao lado (o rei pode mover-se de cada vez para qualquer casa adjacente, incluindo casas na diagonal)?



(A) 1 (B) 4 (C) 7 (D) 20 (E) 35

8. A tabela ao lado deve ter dois rectângulos vermelhos (V) e dois rectângulos azuis (A) em cada coluna e em cada linha. Que cores terão os rectângulos X e Y ($XY =$)?

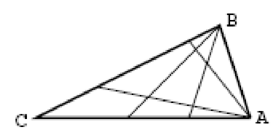
V		V	
		V	
	X		A
	Y		

(A) $XY = VV$ (B) $XY = VA$ (C) $XY = AV$ (D) $XY = AA$ (E) Impossível

9. Sabendo que a letras diferentes correspondem algarismos diferentes, encontra o menor valor possível para a seguinte subtracção $2007 - KAN - GA - ROO$.

(A) 100 (B) 110 (C) 112 (D) 119 (E) 129

10. Na figura ao lado está representado um triângulo $[ABC]$ onde foram traçados dois segmentos de recta desde cada um de dois dos vértices do triângulo até aos lados opostos a esses vértices. Isto divide o triângulo em nove secções não sobrepostas. Se forem traçados oito segmentos de recta, quatro a partir de A e quatro a partir de B até aos lados opostos aos vértices, em quantas secções não sobrepostas é que ficará dividido o triângulo?



(A) 16 (B) 25 (C) 36 (D) 42 (E) 49

Problemas de 4 pontos

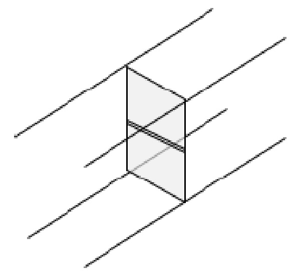
11. Uma ilha é habitada por pessoas honestas e por pessoas mentirosas (as pessoas honestas dizem sempre a verdade e as mentirosas mentem sempre). Hoje reuniram-se 12 habitantes da ilha, honestos e mentirosos, e fizeram alguns comentários. Duas pessoas disseram: "Exactamente duas pessoas das 12 aqui reunidas são mentirosas". Outras quatro pessoas disseram: "Exactamente quatro pessoas das 12 aqui reunidas são mentirosas". As restantes seis pessoas afirmaram: "Exactamente seis pessoas das 12 aqui reunidas são mentirosas". Quantos mentirosos estavam reunidos?

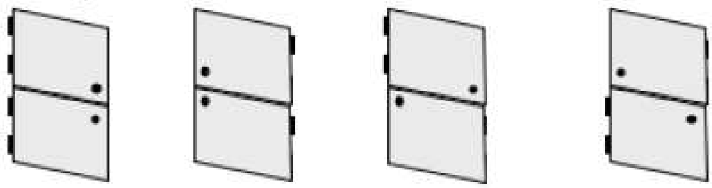
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

12. Para se obter o valor 8^8, temos de elevar o número 4^4 a

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8 (E) 16

13. Um corredor é inclinado para a direita, sendo o chão mais alto à esquerda do que à direita. Consequentemente, o perfil do corredor não é um rectângulo mas sim um paralelogramo. Colocou-se uma porta a meio do corredor. A porta está dividida ao meio em duas partes que deverão abrir separadamente (ver figura). Onde deverão ser colocadas as dobradiças?



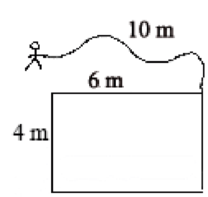


(A) À esquerda nas duas portas.
(B) À direita nas duas portas.
(C) À esquerda na porta superior e à direita na porta inferior.
(D) À esquerda na porta inferior e à direita na porta superior.
(E) A porta nunca poderá abrir propriamente.

14. Os estudantes estiveram a resolver um problema interessante do "Concurso Canguru". O número de rapazes que resolveram o problema é igual ao número de raparigas que não resolveram o problema. Quais é que estão em maior número: os estudantes que resolveram o problema ou as raparigas?

(A) As raparigas;
(B) Os estudantes que resolveram o problema;
(C) Estão em igual número;
(D) Impossível calcular;
(E) A situação não é possível.

15. A extremidade de uma corda com $10\,m$ de comprimento está presa a um dos vértices do rectângulo da figura ao lado. A outra ponta da corda está livre. O João pega na ponta livre da corda e descreve uma região de área máxima. O perímetro dessa região é:



(A) $20\pi\, m$ (B) $22\pi\, m$ (C) $40\pi\, m$ (D) $88\pi\, m$ (E) $100\pi\, m$

16. São 21 : 00 horas. O Júlio está a conduzir a uma velocidade de $100\,km/h$. A esta velocidade, o Júlio tem gasolina suficiente para $80\,km$. A estação de serviço mais próxima fica a $100\,km$ de distância. A quantidade de gasolina que o carro consome por km é directamente proporcional à velocidade do carro. O Júlio pretende chegar à estação de serviço o mais rapidamente possível. A que horas poderá o Júlio chegar à estação de serviço?

(A) 22 : 12 (B) 22 : 15 (C) 22 : 20 (D) 22 : 25 (E) 22 : 30

17. O Pedro removeu um canto a um triângulo equilátero obtendo um trapézio. Depois, considerou duas cópias desse trapézio e colocou-as uma ao lado da outra de modo a formar um paralelogramo. O perímetro do paralelogramo excede o perímetro do triângulo original em $10\,cm$. Qual é o perímetro do triângulo original?

(A) $10\,cm$ (B) $30\,cm$ (C) $40\,cm$ (D) $60\,cm$ (E) São necessários mais dados.

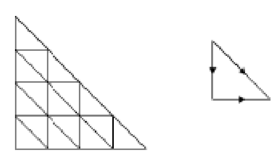
18. A sequência de letras $KANGAROOKANGAROO\cdots KANGAROO$ é construída ao se escrever 20 vezes a palavra $KANGAROO$. O Rui olhou para esta sequência e decidiu eliminar todas as letras correspondentes a posições ímpares. Depois, para a sequência obtida, decidiu remover mais uma vez todas as letras correspondentes a posições ímpares, e assim sucessivamente até chegar a uma sequência com apenas uma letra. Esta letra é:

(A) K (B) A (C) N (D) G (E) O

19. Duas escolas vão disputar um torneio de ténis de mesa. Cada escola é representada por cinco alunos. O torneio vai consistir apenas em jogos de equipas aos pares. Cada par de cada escola deverá jogar contra um par da outra escola e apenas uma vez. Então, cada aluno deverá jogar:

(A) 10 jogos (B) 20 jogos (C) 30 jogos (D) 40 jogos (E) 50 jogos.

20. Quantos caminhos diferentes existem para se ir do ponto superior da hipotenusa do triângulo maior para o ponto inferior da hipotenusa do triângulo maior (ver figura), sabendo que apenas se pode ir para baixo, para a direita ou para baixo pelas hipotenusas dos triângulos?



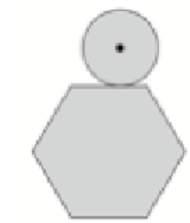
(A) 16 (B) 27 (C) 64 (D) 90 (E) 111

Problemas de 5 pontos

21. Numa aldeia não existem duas pessoas com o mesmo número de cabelos. Na aldeia ninguém tem exactamente 2007 cabelos. O João é a pessoa da aldeia que tem mais cabelos e o número de habitantes é maior que o número de cabelos do João. Qual é o número máximo de habitantes da aldeia?

(A) 0 (B) 2006 (C) 2007 (D) 2008 (E) 2009

22. Uma moeda com 1 cm de diâmetro roda à volta do hexágono regular com 1 cm de lado, como se pode ver na figura ao lado. Qual é o comprimento, em centímetros, do percurso descrito pelo centro da moeda?



(A) $6+\frac{\pi}{2}$ (B) $6+\pi$ (C) $12+\pi$ (D) $6+2\pi$ (E) $12+2\pi$

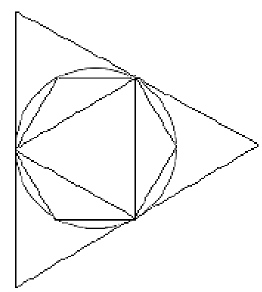
23. Seja a o menor número com a seguinte propriedade: $10\,a$ é um quadrado perfeito e $6\,a$ é um cubo perfeito. Quantos divisores positivos tem o número a?

(A) 30 (B) 40 (C) 54 (D) 72 (E) 96

24. No cofre de um Banco existem alguns colares. Os colares têm todos o mesmo número de diamantes (pelo menos dois diamantes em cada colar). Se soubermos o número de diamantes no cofre, também saberemos o número de colares no cofre com toda a certeza. Sabemos que o número de diamantes é maior do que 200 e menor do que 300. Quantos colares é que estão no cofre?

(A) 16 (B) 17 (C) 19 (D) 25 (E) Outra resposta.

25. Um triângulo equilátero e um hexágono regular estão inscritos numa circunferência, que por sua vez está inscrita num triângulo equilátero (ver a figura). Sejam S_1 a área do triângulo maior, S_2 a área do triângulo menor e S_3 a área do hexágono. Então,



(A) $S_3=\sqrt{S_1\times S_2}$;

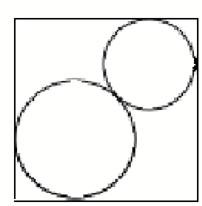
(B) $S_3=\frac{S_1+S_2}{2}$;

(C) $S_1=S_2+S_3$;

(D) $S_3=\sqrt{S_1^2\times S_2^2}$;

(E) $S_1=S_3+3S_2$.

26. Considera duas circunferências com os centros na diagonal de um quadrado, de modo a que cada uma toque os lados do quadrado (ver figura). O lado do quadrado mede 1 cm. Qual é o valor da soma das medidas dos raios das duas circunferências?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $2-\sqrt{2}$ (E) Depende das dimensões das circunferências.

27. Numa caixa estão três cartas de cada uma das seguintes cores: vermelho, verde, amarelo e azul. Para cada cor as cartas são numeradas com 1, 2 e 3. O Rui tira ao acaso três cartas da caixa. Qual dos seguintes eventos tem maior probabilidade?

    (A) As três cartas são da mesma cor;
    (B) As três cartas, independentemente das suas cores, têm números 1, 2 e 3;
    (C) As três cartas são de cores diferentes;
    (D) As três cartas têm o mesmo número;
    (E) Nenhum dos eventos anteriores, os quatro eventos anteriores têm a mesma probabilidade.

28. Na festa da Páscoa, cinco amigos vão trocar prendas de maneira a que cada um deles dê uma prenda e receba uma prenda (claro que ninguém deverá receber o seu próprio presente). De quantas formas é possível fazer esta troca de prendas?

    (A) 5 (B) 10 (C) 44 (D) 50 (E) 120

29. As soluções reais da equação $x^2 - 3x + 1 = 0$ são a e b. Qual é o valor de $a^3 + b^3$?

    (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 24

30. Considera um tetraedro regular. A distância entre quaisquer duas arestas que não se intersectem num vértice é $6\,cm$. Qual é o volume do tetraedro em cm^3?

    (A) 18 (B) 36 (C) 48 (D) 72 (E) 144