

# Canguru Matemático sem Fronteiras 2009



Categoria: Estudante

Duração: 1h30min

Destinatários: alunos do 12º ano de Escolaridade

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Não podes usar calculadora.** Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada és penalizado em  $1/4$  dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

## Problemas de 3 pontos

1. Existem 200 peixes num aquário, sendo 1% deles azuis e os restantes amarelos. Quantos peixes amarelos temos de tirar do aquário, de modo a que os peixes azuis representem 2% de todos os peixes?

- (A) 2                      (B) 4                      (C) 20                      (D) 50                      (E) 100

2. Qual é o maior dos números seguintes?

- (A)  $\sqrt{2} - \sqrt{1}$               (B)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$               (C)  $\sqrt{4} - \sqrt{3}$               (D)  $\sqrt{5} - \sqrt{4}$               (E)  $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

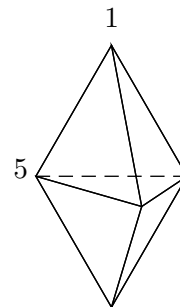
3. Para quantos números naturais  $n$ , o número da forma  $n^2 + n$  é primo?

- (A) 0                                      (B) 1  
(C) 2                                      (D) Um número finito, mas maior que 2  
(E) Um número infinito

4. A Maria, a Joana e a Cristina foram a um café. Cada uma delas pediu três copos de sumo, dois gelados e cinco bolinhos. A Maria pagou a conta final. Qual dos seguintes valores poderia ter sido o valor da conta?

- (A) 39,20 €              (B) 38,20 €              (C) 37,20 €              (D) 36,20 €              (E) 35,20 €

5. A figura mostra um sólido formado por 6 faces triangulares. Em cada vértice existe um número. Para cada face consideramos a soma dos três números dos vértices dessa face. Se todas as somas forem iguais e dois dos números forem 1 e 5 como indicado na figura, qual é a soma de todos os 5 números?



- (A) 9                      (B) 12                      (C) 17                      (D) 18                      (E) 24

6. A circunferência  $f(F; 13)$ , de centro em  $F$  e raio 13, intersecta a circunferência  $g(G; 15)$ , de centro em  $G$  e raio 15, nos pontos  $P$  e  $Q$ . A medida do comprimento do segmento de recta  $[PQ]$  é 24. Qual dos seguintes valores pode ser a medida do comprimento do segmento  $[FG]$ ?

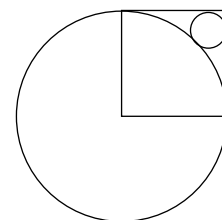
- (A) 2                      (B) 5                      (C) 9                      (D) 14                      (E) 18

7. Uma caixa contém 2 meias brancas, 3 meias vermelhas e 4 meias azuis. A Liliana sabe que um terço das meias têm um buraco mas não sabe a cor delas. Ela tira aleatoriamente meias da caixa, na esperança de encontrar duas meias da mesma cor e sem buracos. Quantas meias tem ela que tirar da caixa para ter a certeza que cumpre o seu objectivo?

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 6                      (D) 7                      (E) 8

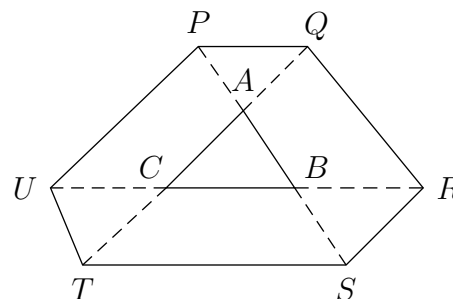
8. O lado do quadrado na figura mede 1. Então a medida do raio do círculo mais pequeno é igual a:

- (A)  $\sqrt{2} - 1$       (B)  $\frac{1}{4}$                       (C)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       (D)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$       (E)  $(1 - \sqrt{2})^2$



9. Os lados do triângulo  $[ABC]$  foram prolongados até aos pontos  $P, Q, R, S, T$  e  $U$ , de tal forma que  $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BS}$ ,  $\overline{TC} = \overline{CA} = \overline{AQ}$  e  $\overline{UC} = \overline{CB} = \overline{BR}$ . Se a medida da área de  $[ABC]$  é 1, qual é a medida da área do hexágono  $[PQRSTU]$ ?

- (A) 9                      (B) 10                      (C) 12  
(D) 13                      (E) Não há informação suficiente



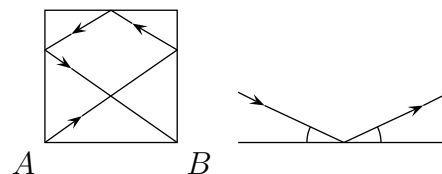
10. Pretendemos colorir os quadrados da tabela usando as cores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , de tal forma que os quadrados vizinhos não tenham a mesma cor (os quadrados que partilham pelo menos um vértice são considerados vizinhos). Alguns dos quadrados foram coloridos como se mostra na figura. Quais são as possibilidades de colorir o quadrado a sombreado?

$A$	$B$			
$C$	$D$			
		$B$		
$B$				

- (A)  $A$  ou  $B$                       (B) Apenas  $C$                       (C) Apenas  $D$   
 (D)  $C$  ou  $D$                       (E) Qualquer uma de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D$

**Problemas de 4 pontos**

11. Numa mesa de bilhar, com a forma de um quadrado com medida de lado igual a 2 m, é jogada uma bola a partir do canto  $A$ . Depois de tocar em três lados, como mostra a figura, vai para o canto  $B$ . Quantos metros percorreu a bola? (Lembra-te que a bola se desvia com o mesmo ângulo com que incide, como mostra a figura à direita.)

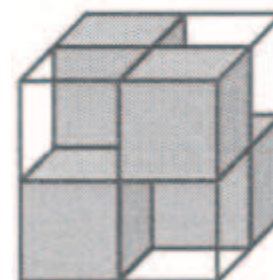


- (A) 7                      (B)  $2\sqrt{13}$                       (C) 8                      (D)  $4\sqrt{3}$                       (E)  $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

12. De 2009 cangurus, cada um deles de cor ou clara ou escura, compararam-se as suas alturas. Sabe-se que um canguru claro é mais alto do que exactamente 8 cangurus escuros, um outro canguru claro é mais alto do que exactamente 9 cangurus escuros, um outro canguru claro é mais alto do que exactamente 10 cangurus escuros, e assim sucessivamente, até que exactamente um outro canguru claro é mais alto do que todos os cangurus escuros. Qual é o número de cangurus claros?

- (A) 1000                      (B) 1001                      (C) 1002  
 (D) 1003                      (E) A situação é impossível

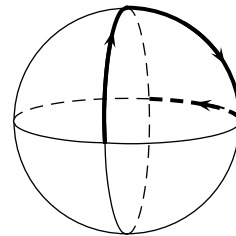
13. Um cubo com medida de lado 2 é constituído por quatro cubos transparentes com medida de lado 1 e quatro cubos escuros, não-transparentes, com medida de lado 1 (conforme a figura). Eles estão colocados de forma a que o cubo grande não seja transparente, o que significa não ser possível ver através dele, nem de cima para baixo, nem de frente para trás e nem mesmo a partir da esquerda para a direita. No mínimo, quantos cubos unitários escuros seriam necessários colocar dentro de um cubo grande com medida de lado 3 de forma a que este não seja transparente?



- (A) 6                      (B) 9                      (C) 10                      (D) 12                      (E) 18



19. Três arcos circulares são unidos por forma a intersectarem-se segundo ângulos rectos, como mostra a figura. Uma joaninha aterra numa intersecção e rasteja em torno do arco como se segue: ela viaja ao longo de um quarto de círculo, vira à direita  $90^\circ$ , viaja ao longo de um quarto de círculo e vira à esquerda  $90^\circ$ . Procedendo desta forma, quantos quartos de círculo viajará ela até reencontrar pela primeira vez o ponto de partida?



- (A) 6                      (B) 9                      (C) 12                      (D) 15                      (E) 18

20. Temos de preencher uma tabela quadrangular  $3 \times 3$  com números reais, de tal forma que a soma dos elementos em cada linha, coluna e diagonal seja a mesma. Dois dos números estão na figura. Qual é o número que representa  $a$ ?

$a$		
		47
	63	

- (A) 16                      (B) 51                      (C) 54  
(D) 55                      (E) 110

### Problemas de 5 pontos

21. Dois atletas  $A$  e  $B$  estão a correr à volta de um estádio circular. Cada um deles corre sempre à mesma velocidade e sem parar. O atleta  $A$  corre mais rápido do que o atleta  $B$  e demora 3 minutos a dar uma volta ao estádio. Os atletas  $A$  e  $B$  partem juntos e 8 minutos depois  $A$  alcança  $B$  pela primeira vez. Quanto tempo demora  $B$  a dar uma volta ao estádio?

- (A) 6 min                      (B) 8 min                      (C) 4 min 30 s  
(D) 4 min 48 s                      (E) 4 min 20 s

22. Seja  $z$  um número com 8 algarismos e todos não nulos. Quantos números existem com a forma de  $z$  e que sejam divisíveis por 9?

- (A)  $\frac{z}{8}$                       (B)  $\frac{z}{3}$                       (C)  $\frac{z}{9}$                       (D)  $\frac{8z}{9}$                       (E)  $\frac{7z}{8}$

23. Quantos números naturais de 10 algarismos existem, compostos só por 1, 2 e 3, em que cada dois algarismos vizinhos diferem de uma unidade?

- (A) 16                      (B) 32                      (C) 64                      (D) 80                      (E) 100

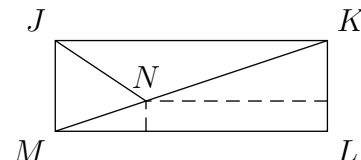
24. Para quantos números inteiros  $n \geq 3$  existe um polígono convexo (não tem nenhum ângulo interno com medida de amplitude maior do que  $180^\circ$ ) com  $n$  lados, cujos ângulos estão na razão  $1 : 2 : \dots : n$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3  
(D) 5                      (E) Mais do que 5

**25.** 55 alunos participaram nas Olimpíadas de Matemática. Ao corrigir as provas, o júri marcou cada um dos problemas com “+”, se o problema estiver certo, ou com “-”, se o problema estiver errado, ou com “0”, se o aluno não respondeu à questão. Mais tarde verificou-se que não havia duas provas com o mesmo número de “+” e “-”. No mínimo, quantos problemas tinha o enunciado da prova?

- (A) 6 (B) 9 (C) 10  
(D) 11 (E) 12

**26.** Num rectângulo  $[JKLM]$ , a bissetriz de  $\angle KJM$  intersecta a diagonal  $[KM]$  no ponto  $N$ . As distâncias entre  $N$  e os lados  $[LM]$  e  $[KL]$  são 1 e 8, respectivamente. Então  $\overline{LM}$  é igual a:



- (A)  $8 + 2\sqrt{2}$  (B)  $11 - \sqrt{2}$  (C) 10 (D)  $8 + 3\sqrt{2}$  (E)  $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

**27.** Se  $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$ , quantos valores pode  $k$  tomar?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

**28.** Os números  $1; 2; 3; \dots; 99$  são distribuídos por  $n$  grupos sob as condições:

1. cada número está num, e num só, grupo;
2. existem pelo menos dois números em cada grupo;
3. se dois números estiverem no mesmo grupo, então a sua soma não é divisível por 3.

O menor dos números naturais  $n$  com esta propriedade é igual a:

- (A) 3 (B) 9 (C) 33 (D) 34 (E) 66

**29.** A Sandra e as suas três irmãs vão ao teatro. Elas têm um camarote com 4 lugares. A Sandra e duas das suas irmãs chegaram mais cedo e cada uma delas sentou-se aleatoriamente num dos quatro lugares. Qual é a probabilidade da Sandra ter de se mudar quando a sua irmã mais nova, Maria, chegar e insistir em se sentar no lugar que lhe estava destinado assim como qualquer das suas irmãs no caso de terem que se levantar?

- (A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{4}$  (E)  $\frac{1}{6}$

**30.** A sucessão de números inteiros  $a_n$  é definida por:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$  para  $n \geq 0$ . O resto da divisão de  $a_{2009}$  por 7 é:

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 6