Canguru Matemático sem Fronteiras 2009

Categoria: Júnior | Duração: 1h30min

Destinatários: alunos dos 10° e 11° anos de Escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: ____________

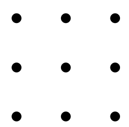
Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Qual dos números seguintes é múltiplo de 3?

(**A**) 2009 (**B**) $2+0+0+9$ (**C**) $(2+0)\times(0+9)$
(**D**) 2^9 (**E**) $200-9$

2. Qual é o menor número de pontos na figura que é necessário retirar de modo que quaisquer 3 pontos dos restantes não sejam colineares?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 7

3. Numa corrida popular participaram 2009 pessoas. O número de pessoas a quem o João ganhou é o triplo do número de pessoas que ganharam ao João. Em que lugar ficou classificado o João na corrida?

(**A**) 503 (**B**) 501 (**C**) 500 (**D**) 1503 (**E**) 1507

4. Qual é o valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?

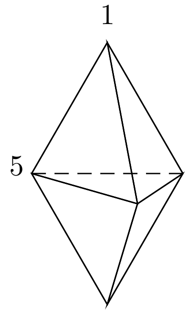
(**A**) 250 (**B**) 200 (**C**) 100
(**D**) 50 (**E**) Nenhum destes

5. Uma longa sequência de algarismos foi construída escrevendo o número 2009 repetidamente 2009 vezes. A soma dos algarismos ímpares da sequência que estão imediatamente seguidos por um algarismo par é igual a:

(**A**) 2 (**B**) 9 (**C**) 4018 (**D**) 18072 (**E**) 18081

Organização do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática

6. A figura mostra um sólido formado por 6 faces triangulares. Em cada vértice existe um número. Para cada face consideramos a soma dos três números dos vértices dessa face. Se todas as somas forem iguais e dois dos números forem 1 e 5 como indicado na figura, qual é a soma de todos os 5 números?

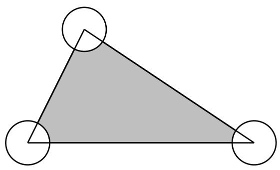


(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 24

7. Quantos números inteiros positivos têm igual número de algarismos na representação decimal do seu quadrado e do seu cubo?

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4
(**D**) 9 (**E**) Uma infinidade

8. A medida da área do triângulo na figura é de 80 m^2 e os raios dos círculos centrados nos vértices medem 2 m.



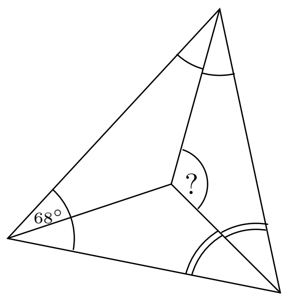
Qual é a medida, em m^2, da área a sombreado?

(**A**) 76 (**B**) $80 - 2\pi$ (**C**) $40 - 4\pi$ (**D**) $80 - \pi$ (**E**) 78π

9. O Leonardo escreveu uma sequência de números, de tal forma que cada número (a partir do terceiro número da sequência) é a soma dos dois números anteriores da sequência. O quarto número da sequência é 6 e o sexto número é 15. Qual é o sétimo número da sequência?

(**A**) 9 (**B**) 16 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

10. Um triângulo tem um ângulo com medida de amplitude 68°. Os três ângulos bissectores estão desenhados na figura. Qual é a medida da amplitude do ângulo assinalado com um ponto de interrogação?



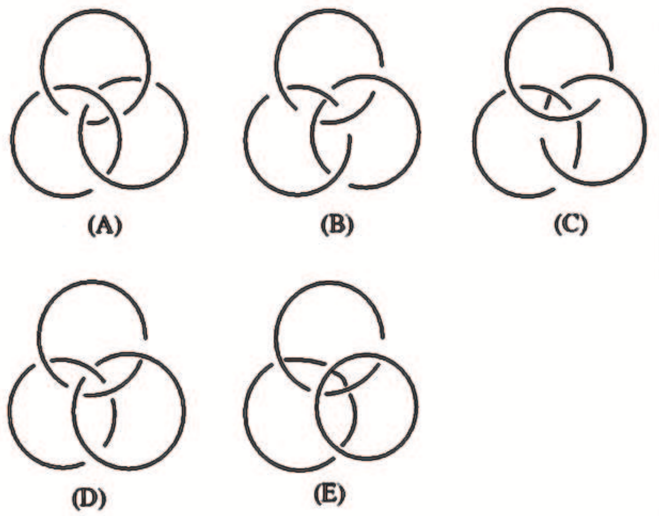
(**A**) 120° (**B**) 124° (**C**) 128° (**D**) 132° (**E**) 136°

Problemas de 4 pontos

11. Em cada teste a nota pode ser 0, 1, 2, 3, 4 ou 5. Após 4 testes, a média da Maria é 4. Uma das seguintes afirmações não pode ser verdadeira. Qual é?

(**A**) A Maria teve 4 em todos os testes
(**B**) A Maria teve 3 em exactamente dois dos testes
(**C**) A Maria teve 3 em exactamente três dos testes
(**D**) A Maria teve 1 somente num dos testes
(**E**) A Maria teve 4 em exactamente dois dos testes

12. Os anéis de *Borromean* têm a propriedade surpreendente de não puderem ser separados sem serem destruídos, mas se um deles for removido (independentemente de qual seja) os outros dois deixarão de estar ligados. Qual das seguintes figuras mostra os anéis de *Borromean*?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

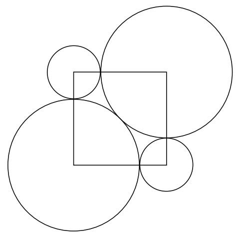
13. Na ilha dos honestos e mentirosos estão 25 pessoas numa fila. Todos, com excepção da primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa que está à sua frente na fila é mentirosa e o primeiro indivíduo da fila diz que todas as pessoas que estão atrás de si são mentirosas. Quantos mentirosos existem na fila? (Os honestos dizem sempre a verdade e os mentirosos mentem sempre.)

(**A**) 0 (**B**) 12 (**C**) 13
(**D**) 24 (**E**) Impossível determinar

14. Se $a \clubsuit b = ab + a + b$ e $3 \clubsuit 5 = 2 \clubsuit x$, então x é igual a:

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 10 (**E**) 12

15. Em torno dos vértices de um quadrado foram desenhados círculos: 2 grandes e 2 pequenos. Os círculos grandes são tangentes um ao outro e a ambos os círculos pequenos. A medida do raio do círculo grande é igual a X vezes a medida do raio de um dos círculos pequenos. O valor de X é igual a:



(**A**) $\frac{2}{9}$ (**B**) $\sqrt{5}$ (**C**) $1+\sqrt{2}$ (**D**) $2,5$ (**E**) $0,8\pi$

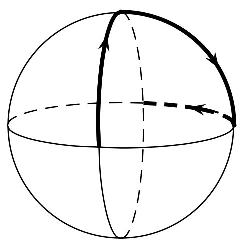
16. O módulo da diferença entre $\sqrt{n}$ e 10 é menor do que 1. Quantos números naturais n existem nestas condições?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 39 (**D**) 40 (**E**) 41

17. O senhor António escreveu numa linha vários números naturais diferentes e não superiores a 10. O Roberto observou aqueles números e reparou, com satisfação, que em cada par de números vizinhos um deles é divisível pelo outro. Quantos números escreveu, no máximo, o senhor António?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

18. Três arcos circulares são unidos por forma a intersectarem-se segundo ângulos rectos, como mostra a figura. Uma joaninha aterra numa intersecção e rasteja em torno do arco como se segue: ela viaja ao longo de um quarto de círculo, vira à direita 90°, viaja ao longo de um quarto de círculo e vira à esquerda 90°. Procedendo desta forma, quantos quartos de círculo viajará ela até reencontrar pela primeira vez o ponto de partida?



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18

19. Quantos zeros devem ser escritos no lugar de $*$ na parte decimal de $1,*1$ por forma a obter-se um número inferior a $\frac{2009}{2008}$ mas superior a $\frac{20009}{20008}$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

20. Se $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ e $c = 3^{11}$, então

(**A**) $a < b < c$ (**B**) $b < a < c$ (**C**) $c < b < a$ (**D**) $c < a < b$ (**E**) $b < c < a$

Problemas de 5 pontos

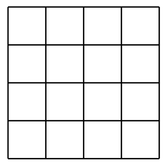
21. Quantos números de dez algarismos existem, formados somente pelos algarismos 1, 2 ou 3, e de tal forma que a diferença entre dois algarismos vizinhos seja igual a 1?

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 64 (**D**) 80 (**E**) 100

22. O jovem Canguru tem 2009 cubos unitários que ele colocou formando um paralelepípedo onde todas as faces são rectangulares. Ele também tem 2009 autocolantes 1×1 que terá de usar para colorir a superfície exterior do paralelepípedo. O jovem canguru cumpriu o seu objectivo, tendo-lhe sobrado autocolantes. Quantos autocolantes sobraram?

(**A**) Mais do que 1000 (**B**) 763
(**C**) 476 (**D**) 49
(**E**) Não é verdade que o Canguru tenha atingido o seu objectivo

23. O Ivo quer colocar damas nas casas de um tabuleiro 4×4, de tal forma que os números totais de damas nas linhas e nas colunas sejam todos diferentes (pode ser colocada mais do que uma dama numa casa assim como poderá haver casas vazias). Qual é o menor número possível de damas que podem ser colocadas no tabuleiro?



(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 14 (**D**) 18 (**E**) 21

24. Foram colocadas laranjas, pêssegos, maçãs e bananas numa fila, de tal modo que, algures na fila, cada tipo de fruta pode ser encontrada ao lado de cada um dos outros tipos de fruta. Qual é o menor número de frutos na fila?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 8
(**D**) 11 (**E**) Esta situação é impossível

25. Qual é o menor número natural n, para o qual $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \ldots (n^2 - 1)$ é um quadrado perfeito?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 16
(**D**) 27 (**E**) Outra resposta

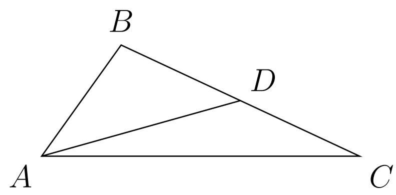
26. Todos os divisores do número natural N, diferentes de N e de 1, foram dispostos numa linha. Acontece que o maior dos divisores na linha é 45 vezes maior que o menor dos divisores. Quantos números N satisfazem esta condição?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2
(**D**) Mais do que 2 (**E**) Impossível determinar

27. Um Canguru está sentado na origem de um sistema de coordenadas. Ele pode saltar 1 unidade na vertical ou na horizontal. Quantos pontos existem no plano onde pode o canguru estar após 10 saltos?

(**A**) 121 (**B**) 100 (**C**) 400
(**D**) 441 (**E**) Nenhum dos outros

28. Seja $[AD]$ uma mediana do triângulo $[ABC]$. Sabe-se que $A\widehat{C}B = 30°$ e que $A\widehat{D}B = 45°$. Qual é a medida da amplitude do $\measuredangle BAD$?



(**A**) 45° (**B**) 30° (**C**) 25° (**D**) 20° (**E**) 15°

29. Determina o menor número de elementos que devem ser retirados do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots 16\}$ por forma a que a soma de quaisquer dois números que permaneçam no conjunto não seja um quadrado perfeito.

(**A**) 10 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

30. Um número primo é definido como sendo "estranho" se for um primo com um algarismo ou se for um primo com mais do que um algarismo em que os dois números obtidos, ao ser retirado o primeiro ou o último algarismo, também sejam primos "estranhos" (o número 1 não é considerado número primo). Quantos números primos "estranhos" existem?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 11