Canguru Matemático sem Fronteiras 2009

Categoria: Estudante — Duração: 1h30min

Destinatários: alunos do 12° ano de Escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Existem 200 peixes num aquário, sendo 1% deles azuis e os restantes amarelos. Quantos peixes amarelos temos de tirar do aquário, de modo a que os peixes azuis representem 2% de todos os peixes?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 20 (**D**) 50 (**E**) 100

2. Qual é o maior dos números seguintes?

(**A**) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$ (**B**) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (**C**) $\sqrt{4}-\sqrt{3}$ (**D**) $\sqrt{5}-\sqrt{4}$ (**E**) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$

3. Para quantos números naturais n, o número da forma n^2+n é primo?

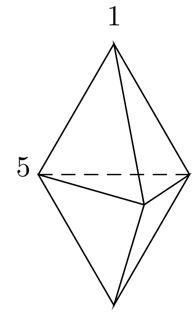
(**A**) 0
(**B**) 1
(**C**) 2
(**D**) Um número finito, mas maior que 2
(**E**) Um número infinito

4. A Maria, a Joana e a Cristina foram a um café. Cada uma delas pediu três copos de sumo, dois gelados e cinco bolinhos. A Maria pagou a conta final. Qual dos seguintes valores poderia ter sido o valor da conta?

(**A**) 39, 20 € (**B**) 38, 20 € (**C**) 37, 20 € (**D**) 36, 20 € (**E**) 35, 20 €

Organização do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra
com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática

5. A figura mostra um sólido formado por 6 faces triangulares. Em cada vértice existe um número. Para cada face consideramos a soma dos três números dos vértices dessa face. Se todas as somas forem iguais e dois dos números forem 1 e 5 como indicado na figura, qual é a soma de todos os 5 números?



(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 24

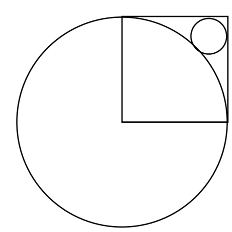
6. A circunferência $f(F;13)$, de centro em F e raio 13, intersecta a circunferência $g(G;15)$, de centro em G e raio 15, nos pontos P e Q. A medida do comprimento do segmento de recta $[PQ]$ é 24. Qual dos seguintes valores pode ser a medida do comprimento do segmento $[FG]$?

(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 14 (**E**) 18

7. Uma caixa contém 2 meias brancas, 3 meias vermelhas e 4 meias azuis. A Liliana sabe que um terço das meias têm um buraco mas não sabe a cor delas. Ela tira aleatoriamente meias da caixa, na esperança de encontrar duas meias da mesma cor e sem buracos. Quantas meias tem ela que tirar da caixa para ter a certeza que cumpre o seu objectivo?

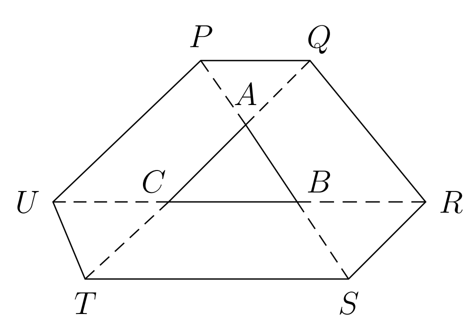
(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

8. O lado do quadrado na figura mede 1. Então a medida do raio do círculo mais pequeno é igual a:



(**A**) $\sqrt{2}-1$ (**B**) $\dfrac{1}{4}$ (**C**) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (**D**) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (**E**) $(1-\sqrt{2})^2$

9. Os lados do triângulo $[ABC]$ foram prolongados até aos pontos P, Q, R, S, T e U, de tal forma que $\overline{PA}=\overline{AB}=\overline{BS}$, $\overline{TC}=\overline{CA}=\overline{AQ}$ e $\overline{UC}=\overline{CB}=\overline{BR}$. Se a medida da área de $[ABC]$ é 1, qual é a medida da área do hexágono $[PQRSTU]$?



(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12
(**D**) 13 (**E**) Não há informação suficiente

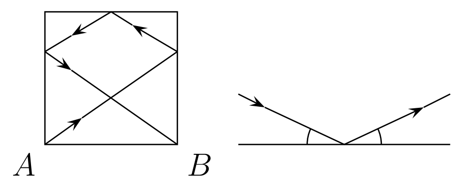
10. Pretendemos colorir os quadrados da tabela usando as cores A, B, C e D, de tal forma que os quadrados vizinhos não tenham a mesma cor (os quadrados que partilham pelo menos um vértice são considerados vizinhos). Alguns dos quadrados foram coloridos como se mostra na figura. Quais são as possibilidades de colorir o quadrado a sombreado?

A	B			
C	D			
		B		
B				

(**A**) A ou B (**B**) Apenas C (**C**) Apenas D
(**D**) C ou D (**E**) Qualquer uma de A, B, C ou D

Problemas de 4 pontos

11. Numa mesa de bilhar, com a forma de um quadrado com medida de lado igual a 2 m, é jogada uma bola a partir do canto A. Depois de tocar em três lados, como mostra a figura, vai para o canto B. Quantos metros percorreu a bola? (Lembra-te que a bola se desvia com o mesmo ângulo com que incide, como mostra a figura à direita.)

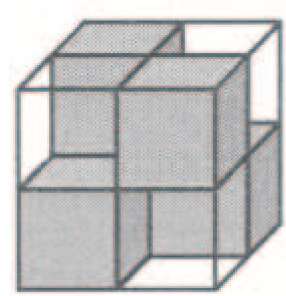


(**A**) 7 (**B**) $2\sqrt{13}$ (**C**) 8 (**D**) $4\sqrt{3}$ (**E**) $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

12. De 2009 cangurus, cada um deles de cor ou clara ou escura, compararam-se as suas alturas. Sabe-se que um canguru claro é mais alto do que exactamente 8 cangurus escuros, um outro canguru claro é mais alto do que exactamente 9 cangurus escuros, um outro canguru claro é mais alto do que exactamente 10 cangurus escuros, e assim sucessivamente, até que exactamente um outro canguru claro é mais alto do que todos os cangurus escuros. Qual é o número de cangurus claros?

(**A**) 1000 (**B**) 1001 (**C**) 1002
(**D**) 1003 (**E**) A situação é impossível

13. Um cubo com medida de lado 2 é constituído por quatro cubos transparentes com medida de lado 1 e quatro cubos escuros, não--transparentes, com medida de lado 1 (conforme a figura). Eles estão colocados de forma a que o cubo grande não seja transparente, o que significa não ser possível ver através dele, nem de cima para baixo, nem de frente para trás e nem mesmo a partir da esquerda para a direita. No mínimo, quantos cubos unitários escuros seriam necessários colocar dentro de um cubo grande com medida de lado 3 de forma a que este não seja transparente?



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 18

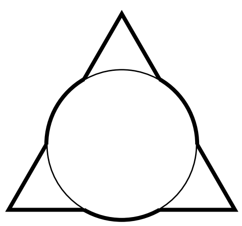
14. Na ilha dos honestos e mentirosos estão 25 pessoas numa fila. Todos, com excepção da primeira pessoa da fila, dizem que a pessoa à sua frente na fila é mentirosa e o primeiro indivíduo da fila diz que todas as pessoas que estão atrás de si são mentirosas. Quantos mentirosos existem na fila? (Os honestos dizem sempre a verdade e os mentirosos mentem sempre.)

(**A**) 0 (**B**) 12 (**C**) 13
(**D**) 24 (**E**) Impossível determinar

15. Qual é o último algarismo do número $1^2 - 2^2 + \ldots - 2008^2 + 2009^2$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

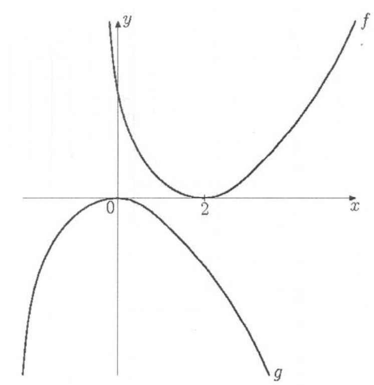
16. Sobrepomos um círculo de raio 1 a um triângulo equilátero com medida de lado 3 e fazendo coincidir os centros das duas figuras. Qual é a medida do perímetro da figura que obtemos?



(**A**) $3 + 2\pi$ (**B**) $6 + \pi$ (**C**) $9 + \dfrac{\pi}{3}$ (**D**) 3π (**E**) $9 + \pi$

17. Os gráficos das funções reais f e g estão representados na figura. Qual é a relação entre f e g?

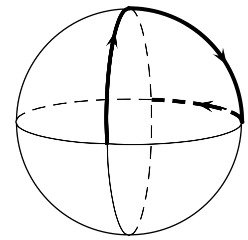
(**A**) $g(x) = f(x+2)$
(**B**) $g(x-2) = -f(x)$
(**C**) $g(x) = -f(-x+2)$
(**D**) $g(-x) = -f(-x+2)$
(**E**) $g(2-x) = -f(x)$



18. Foram propostos quatro problemas a cada um dos 100 participantes nas Olimpíadas de Matemática. 90 participantes resolveram o primeiro problema, 85 participantes resolveram o segundo problema, 80 participantes resolveram o terceiro problema e 70 participantes resolveram o quarto problema. Qual é o menor número possível de participantes que resolveram os quatro problemas?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

19. Três arcos circulares são unidos por forma a intersectarem-se segundo ângulos rectos, como mostra a figura. Uma joaninha aterra numa intersecção e rasteja em torno do arco como se segue: ela viaja ao longo de um quarto de círculo, vira à direita 90°, viaja ao longo de um quarto de círculo e vira à esquerda 90°. Procedendo desta forma, quantos quartos de círculo viajará ela até reencontrar pela primeira vez o ponto de partida?



(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18

20. Temos de preencher uma tabela quadrangular 3×3 com números reais, de tal forma que a soma dos elementos em cada linha, coluna e diagonal seja a mesma. Dois dos números estão na figura. Qual é o número que representa a?

a		
		47
	63	

(**A**) 16 (**B**) 51 (**C**) 54
(**D**) 55 (**E**) 110

Problemas de 5 pontos

21. Dois atletas A e B estão a correr à volta de um estádio circular. Cada um deles corre sempre à mesma velocidade e sem parar. O atleta A corre mais rápido do que o atleta B e demora 3 minutos a dar uma volta ao estádio. Os atletas A e B partem juntos e 8 minutos depois A alcança B pela primeira vez. Quanto tempo demora B a dar uma volta ao estádio?

(**A**) 6 min (**B**) 8 min (**C**) 4 min 30 s
(**D**) 4 min 48 s (**E**) 4 min 20 s

22. Seja z um número com 8 algarismos e todos não nulos. Quantos números existem com a forma de z e que sejam divisíveis por 9?

(**A**) $\frac{z}{8}$ (**B**) $\frac{z}{3}$ (**C**) $\frac{z}{9}$ (**D**) $\frac{8z}{9}$ (**E**) $\frac{7z}{8}$

23. Quantos números naturais de 10 algarismos existem, compostos só por 1, 2 e 3, em que cada dois algarismos vizinhos diferem de uma unidade?

(**A**) 16 (**B**) 32 (**C**) 64 (**D**) 80 (**E**) 100

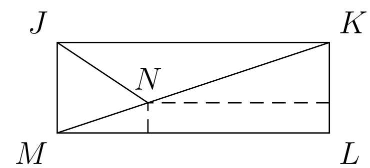
24. Para quantos números inteiros $n \geq 3$ existe um polígono convexo (não tem nenhum ângulo interno com medida de amplitude maior do que 180°) com n lados, cujos ângulos estão na razão $1 : 2 : \ldots : n$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3
(**D**) 5 (**E**) Mais do que 5

25. 55 alunos participaram nas Olimpíadas de Matemática. Ao corrigir as provas, o júri marcou cada um dos problemas com "+", se o problema estiver certo, ou com "−", se o problema estiver errado, ou com "0", se o aluno não respondeu à questão. Mais tarde verificou-se que não havia duas provas com o mesmo número de "+" e "−". No mínimo, quantos problemas tinha o enunciado da prova?

(**A**) 6 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) 11 (**E**) 12

26. Num rectângulo $[JKLM]$, a bissectriz de $\measuredangle KJM$ intersecta a diagonal $[KM]$ no ponto N. As distâncias entre N e os lados $[LM]$ e $[KL]$ são 1 e 8, respectivamente. Então $\overline{LM}$ é igual a:



(**A**) $8+2\sqrt{2}$ (**B**) $11-\sqrt{2}$ (**C**) 10 (**D**) $8+3\sqrt{2}$ (**E**) $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

27. Se $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$, quantos valores pode k tomar?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 6

28. Os números $1; 2; 3; \ldots; 99$ são distribuídos por n grupos sob as condições:

1. cada número está num, e num só, grupo;
2. existem pelo menos dois números em cada grupo;
3. se dois números estiverem no mesmo grupo, então a sua soma não é divisível por 3.

O menor dos números naturais n com esta propriedade é igual a:

(**A**) 3 (**B**) 9 (**C**) 33 (**D**) 34 (**E**) 66

29. A Sandra e as suas três irmãs vão ao teatro. Elas têm um camarote com 4 lugares. A Sandra e duas das suas irmãs chegaram mais cedo e cada uma delas sentou-se aleatoriamente num dos quatro lugares. Qual é a probabilidade da Sandra ter de se mudar quando a sua irmã mais nova, Maria, chegar e insistir em se sentar no lugar que lhe estava destinado assim como qualquer das suas irmãs no caso de terem que se levantar?

(**A**) $\frac{3}{4}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

30. A sucessão de números inteiros a_n é definida por: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$ para $n \geq 0$. O resto da divisão de a_{2009} por 7 é:

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 6